

# О ДЕКОМПОЗИЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*В.Ф. Чистяков, Э.А. Таиров, Е.В. Чистякова, А.А. Левин*

Рассматриваются квазилинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), с тождественно вырожденной матрицей перед производной искомой вектор-функции и разностные схемы, применяемые для их решения. В работе обсуждаются условия, обеспечивающие на каждом шаге вычислительного процесса возможность последовательного решения алгебраических (конечных) уравнений и подстановки этих решений в уравнения динамики. Приведены результаты численных экспериментов для систем ОДУ, описывающих прямоточную котельную установку.

*Ключевые слова:* дифференциально-алгебраические уравнения, индекс, декомпозиция, разностные схемы, математические модели, прямоточные паровые котлы.

## Введение

Рассмотрим вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(x, t, \nu)\dot{x} + B(x, t, \nu) = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1)$$

где  $A(v, t, \nu) - (n \times n)$ -матрица,  $B(v, t, \nu) - n$ -мерная вектор-функция, определенные в области  $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n \times T \times \mathcal{N}$ ,  $x \equiv x(t, \nu)$  - искомая вектор-функция,  $\nu$  - векторный параметр из множества  $\mathcal{N} = [-\nu_1, \nu_1] \times [-\nu_1, \nu_1] \times \dots \times [-\nu_m, \nu_m] \subset \mathbf{R}^m$ ,  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

Предполагается, что характер вырождения определяется соотношениями

$$\det A(v, t, \nu) \equiv 0 \quad \forall (t, v, \nu) \in \mathbf{V}, \quad (2)$$

и заданы начальные данные

$$x(\alpha, \nu) = a(\nu), \quad (3)$$

где  $a(\nu)$  - заданная вектор-функция,  $\nu \in \mathcal{N}$ .

Под решением системы (1) на отрезке  $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq T$  при значении параметра  $\nu = \nu_*$  мы будем понимать любую вектор-функцию  $x(t, \nu_*) \in \mathbf{C}^1(T_\varepsilon)$ , которые обращают исходные уравнения в тождество на  $T_\varepsilon$ .

В частности, в виде системы (1), удовлетворяющей условию (2), можно записать системы дифференциальных и алгебраических уравнений, связанные по части переменных. Единого названия таких систем в настоящее время не существует. В литературе используют термины: алгебро-дифференциальные системы (АДС), дескрипторные системы, системы леонтьевского типа (см., например, соответственно [1 - 3]). В зарубежной литературе утвердилось название: дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) (см., например, [4]). В теории бесконечномерных задач уравнения с необратимым оператором при производной искомой функции называют уравнениями соболевского типа (см., например, [5]). Интерес к ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования в прикладных областях, в частности, в теориях электронных схем и электрических цепей, механике и теплотехнике (см., например, [5 - 8] и приводимую там библиографию). В данной работе проведено обоснование декомпозиции одной разностной схемы для ДАУ, и эта расчетная схема применена к математической модели главного тракта прямоточного парового котла.

## 1. Теоремы существования

Приведем ряд необходимых для дальнейших рассуждений сведений. В работе используются нормы  $n$ -мерного вектора  $v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^\top$ , и  $(\mu \times n)$ -матрицы  $V = (v_{ij}, \ i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, \mu)$ , вычисляемые по правилам

$$\|v\| = \max\{|v_i|, \ i = 1, 2, \dots, n\}, \ \|V\| = \max\{\sum_{j=1}^n |v_{ij}|, \ i = 1, 2, \dots, \mu\}.$$

Под символами  $\|v(w)\|$ ,  $\|V(w)\|$  понимаются нормы вектор-функции  $v(w)$  и матрицы  $V(w)$ , вычисленные в точке  $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$ . Включения  $v(w), V(w) \in \mathbf{C}^l(D)$  означают, что все частные производные элементов вектор-функции  $v(w)$  или матрицы  $V(w)$  имеют непрерывные частные производные порядка до  $l$  включительно по всем компонентам вектора  $w$  в любой точке области  $D$ . Непрерывности соответствуют включения:  $v(w), V(w) \in \mathbf{C}(D)$ . Если  $v(w), V(w) \in \mathbf{C}(D)$ , то их нормы также непрерывны в  $D$ .

ДАУ обладают сложной внутренней структурой. Мерой сложности является целочисленная величина, называемая индексом.

**Определение 1.** Пусть для системы

$$\Lambda_1(x) := A(x, t, \nu_*)\dot{x} + B(x, t, \nu_*) = 0, \ t \in T, \quad (4)$$

где  $\nu_* \in \mathcal{N}$ , существует дифференциальный оператор

$$\Lambda_l(y) := \sum_{j=0}^l L_j(t, y, \dots, y^{(l+1)})(d/dt)^j,$$

со где  $L_j(t, v, \dots, v_{l+1}) - (n \times n)$ -матрицы из  $\mathbf{C}(T \times \mathbf{R}^{n(l+2)})$ , со свойством

$$\Lambda_l(y) \circ \Lambda_1(y) = \tilde{A}(y, t)\dot{y} + \tilde{B}(y, t) \ \forall y \equiv y(t) \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

причем  $\det \tilde{A}(a(\nu_*), \alpha) \neq 0$ . Минимально возможное  $l$  называется индексом системы (4) в окрестности точки  $(a(\nu_*), \alpha, \nu_*)$ .

Вычисление индекса является непростой задачей. Для этого нам потребуются следующие определения и утверждения.

**Определение 2.** (см., например [8]). Матрица, обозначаемая в дальнейшем как  $S^-$ , называется полуобратной к матрице  $S$ , если она удовлетворяет уравнению:  $SS^-S = S$ .

**Лемма 1.** [8]. Полуобратная матрица определена для произвольной матрицы  $S$ . Если выполнено условие Кронекера–Капелли:  $\text{rank } S = \text{rank}(S|u)$ , то система уравнений  $Sy = u$  разрешима, и все ее решения описываются формулой:  $y = S^-u + [E - S^-S]C$ , где  $E$ —единичная матрица подходящей размерности,  $C$ —произвольный вектор.

**Лемма 2.** Пусть пучок постоянных матриц  $\mathbf{A}(\lambda) = \lambda\bar{A} + \bar{B}$  регулярен:  $\det A(\lambda) \neq 0$ . Тогда  $\text{rank}\bar{A} \geq \text{deg det } \mathbf{A}(\lambda)$ , где  $\text{deg}$ —символ степени многочлена.

*Доказательство.* Если пучок матриц  $\mathbf{A}(\lambda)$  регулярен, то существуют постоянные неособенные матрицы  $P, Q$ , со свойством

$$P\mathbf{A}(\lambda)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\bar{N}^k = 0$ ,  $\bar{J}$  – некоторый блок размерности  $(d \times d)$  [9, с.354]. Отсюда

$$\deg \det \mathbf{A}(\lambda) = \deg[\det(\lambda E_d + \bar{J}) \det(\lambda \bar{N} + E_{n-d})] = \deg \det(\lambda E_d + \bar{J}) \cdot 1 = d.$$

Следовательно,  $d \leq \text{rank} \bar{A}$ ,  $d = \text{rank} \bar{A}$  тогда и только тогда, когда  $\bar{N} = 0$ . □

**Определение 3.** Говорят, что пучок квадратных матриц  $\lambda A(w) + B(w)$ ,  $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$ , где  $\lambda$  – скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет критерию «ранг-степень» в области  $D$ , если выполнены условия

1.  $\max \text{rank} A(w) = r$ ,  $w \in D$ ; 2.  $\det[\lambda A(w) + B(w)] = \lambda^r a_0(w) + \dots$ ,  $a_0(w) \neq 0 \forall w \in D$ .

**Следствие 1.** Для пучка матриц  $\lambda A(w) + B(w)$ ,  $w \in D$ , удовлетворяющего критерию «ранг-степень» справедливо равенство:  $\text{rank} A(w) = \text{const} = r \forall w \in D$ .

**Лемма 3.** [1] Матричный пучок  $\mathcal{P}(\lambda; t) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(w) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix}$ ,  $w \in D$ , где блок  $A_1(w)$  имеет полный ранг для любого  $w \in D$ , удовлетворяет критерию «ранг-степень» тогда и только тогда, когда

$$\det \mathcal{P}(\lambda; w) = \lambda^r a_0(w) + \dots, \quad a_0(t) = \det \begin{pmatrix} A_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix} \neq 0 \forall w \in D. \quad (6)$$

**Теорема 1.** Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:

1.  $A(v, t, \nu_*)$ ,  $B(v, t, \nu_*) \in \mathbf{C}^m(T \times \mathbf{R}^n)$ ,  $\nu_* \in \mathcal{N}$ ,  $m \geq 2$ ;
2.  $\text{rank} A(v, t, \nu_*) = r = \text{const}$  в окрестности точки  $\zeta = (a(\nu_*), \alpha)$ ;
3.  $\text{rank} A(\zeta, \nu_*) = \text{rank} [A(\zeta, \nu_*) | \tilde{b}]$ ,  $\tilde{b} = -B(\zeta, \nu_*)$ ;
4.  $\text{rank} A(\zeta, \nu_*) = \deg \det[\lambda A(\zeta, \nu_*) + \Theta(c)]$ , где

$$\Theta(c) = \mathbf{B}(\zeta, \nu_*), \quad \mathbf{B}(v, t, \nu_*) = \frac{\partial}{\partial v} [B(v, t, \nu_*) + A(v, t, \nu_*)c], \quad c: A(\zeta, \nu_*)c = -\tilde{b}.$$

Тогда:

1. индекс системы равен 1;
2. существует отрезок  $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon] \subseteq T$ , на котором определено единственное решение  $x(t, \nu_*) \in \mathbf{C}^m(T_\varepsilon)$  задачи (1), (2).

**Следствие 2.** Пусть

1.  $A(v, t, \nu)$ ,  $B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V})$ ,  $m \geq 2$ ;
2.  $\text{rank} A(v, t, \nu) = r = \text{const}$  в окрестности точки  $(a(\nu_*), \alpha, \nu_*)$ ;
3. для любого  $\nu_* \in \mathcal{N}$  выполнены условия 3, 4 теоремы 1.

Тогда существует отрезок  $T_\varepsilon \subseteq T$ , на котором определено решение  $x^*(t, \nu) \in \mathbf{C}^m(T_\varepsilon \times \mathcal{N})$  задачи (1), (2).

**Следствие 3.** Пусть

1.  $A(v, t, \nu)$ ,  $B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V})$ ,  $m \geq 2$ ;

2. при  $\nu = \nu_*$  на отрезке  $T$  определено решение задачи (1), (3)  $x(t, \nu_*)$ ;  
 3.  $\text{rank}A(z(t)) = \text{deg det}[\lambda A(z(t)) + \Theta(z(t))] = r = \text{const}$ ,  $t \in T$ , где  $z(t) = (x(t, \nu_*), t, \nu_*)$ ,

$$\Theta(z(t)) = \mathbf{B}(z(t)), \quad \mathbf{B}(v, t, \nu_*) = \frac{\partial}{\partial v} [B(v, t, \nu_*) + A(v, t, \nu_*)c], \quad c = \dot{x}(t, \nu_*).$$

Тогда существует окрестность

$$\mathbf{U} = \{w : \|w - a(\nu_*)\| < \varrho, \text{rank}A(w, \alpha, \nu_*) = \text{rank}[A(w, \alpha, \nu_*)|B(w, \alpha, \nu_*)]\}$$

такая, что для любого  $b \in \mathbf{U}$  на  $T$  определено решение системы (1) с начальным данным  $x(0, \nu_*) = b$ .

Теорема 1 и следствия к ней являются частным случаем утверждений из [10].

**Замечание 1.** В теореме 1, согласно лемме 1,  $c = S^{-1}\tilde{b} + [E - S^{-1}S]C$ ,  $S = A(a(\alpha), \alpha, \nu_*)$ .

**Замечание 2.** Если старший коэффициент многочлена в следствии 3

$$\xi(t; \lambda) = \text{det}[\lambda A(z(t)) + \Theta(z(t))] = a_r(t)\lambda^r + \dots + a_0(t)$$

обращается в нуль в точке  $t_*$  :  $a_r(t_*) = 0$ , то эта точка является особой. В ней могут ответвляться другие решения системы (1) или другие решения могут иметь разрывы.

**Пример 1.** Рассмотрим две системы

$$1) \begin{pmatrix} -e^t & 1 \\ -e^t & 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + x = 0; \quad 2) \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} + y = 0,$$

где  $t \in T = [-1, 1]$ . Обе системы имеют тривиальное решение. Формально общие решения можно записать так

$$x(t, c) = c_1 \begin{pmatrix} e^t & e^t \end{pmatrix}^\top / (e^t - 1), \quad y(t, c) = \varphi_1(t)c_1 + \varphi_2(t)c_2,$$

где  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi_1(t) = \{0, t \in T_1; g(t), t \in T_2\}$ ,  $\varphi_2(t) = \{g(t), t \in T_1; 0, t \in T_2\}$ ,  $g(t) = (t^2 \ t^3)^\top$ ,  $T_1 = [-1, 0]$ ,  $T_2 = (0, 1]$ ,  $\top$ -символ транспонирования.

У системы 1) все другие решения имеют разрыв в точке  $t = 0$ . У системы 2) в этой точке ответвляются ненулевые решения, причем ранг матрицы  $A(t)$  постоянен и не несет информации о наличии на  $T$  особых точек. Здесь  $\xi_1(t; \lambda) = (-e^t + 1)\lambda + 1$ ,  $\xi_2(t; \lambda) = -t\lambda + 1$ ,  $a_1(0) = 0$  в обоих многочленах. Эти нули совпадают с особыми точкам ДАУ.

К сожалению, ДАУ, у которых пучок матриц Якоби на решении удовлетворяет критерию «ранг-степень», не исчерпывают всех систем индекса 1.

**Пример 2.** Рассмотрим тестовую задачу вида (1), (3)

$$A(x, t, \nu)\dot{x} + B(x, t, \nu) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [0, 1], \quad (7)$$

где  $(x_1(0) \ x_2(0))^\top = (0 \ 0)^\top$ . Матрица  $A(x, t, \nu)$  здесь меняет ранг в сколь угодно малой окрестности начальной точки. Тем не менее, простое вычисление показывает, что в определении 1 можно принять

$$\Lambda_1(y) = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{y}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\dot{y}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}, \quad \Lambda_1(y) \circ [A(y, t, \nu)\dot{x} + B(y, t, \nu)] = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad \forall y \in \mathbf{C}^2(T).$$

В различных областях приложений применяют следующий прием: ДАУ регуляризуют, дифференцируя алгебраические связи. В нашем случае это приводит в тупик. После дифференцирования в системе (7) второго уравнения  $x_2 = 0$  мы получаем задачу, у которой матрица перед производной вырождается на решении, и непонятно, что делать дальше.

Достаточно часто в приложениях дифференциальные и алгебраические уравнения разделены, и система (1) имеет вид

$$A(t, x, \nu)\dot{x} + B(t, x, \nu) = \begin{pmatrix} A_1(t, x, \nu) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} B_1(t, x, \nu) \\ B_2(t, x, \nu) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta]. \quad (8)$$

Для системы (8) справедливо утверждение о разрешимости ДАУ на всем отрезке  $T$ .

**Теорема 2.** Пусть для задачи (8), (2) выполнены условия:

1.  $A(v, t, \nu), B(v, t, \nu) \in \mathbf{C}^m(\mathbf{V}), m \geq 2$ ;
2.  $\max\{\text{rank}A(v, t, \nu), (v, t, \nu) \in \mathbf{V}\} = r$ ;
3.  $\text{rank}A(v, t, \nu) = \text{rank} [A(v, t, \nu) | \tilde{b}(\nu)], \tilde{b}(\nu) = -B(v, t, \nu)$ ;
4. старший коэффициент многочлена

$$\det \left[ \lambda A(v, t, \nu) + \frac{\partial B(v, t, \nu)}{\partial v} \right] = a_r(v, t, \nu)\lambda^r + \dots$$

удовлетворяет условию  $|a_r(v, t, \nu)| \geq c_0 > 0, \forall (v, t, \nu) \in \mathbf{V}$ ;

5.  $\|A_1(v, t, \nu)\| + \|\partial B_2(v, t, \nu)/\partial v\| \leq \kappa_1, \|B(v, t, \nu)\| \leq \kappa_2 + \kappa_3\|v\|,$

$$\|\partial B_2(v, t, \nu)/\partial t\| \leq \kappa_4 + \kappa_5\|v\| \quad \forall (v, t, \nu) \in \mathbf{V}, \quad \kappa_i = \text{const}, i = \overline{1, 5}.$$

Тогда существует единственное решение  $x(t, \nu) \in \mathbf{C}^m(T \times \mathcal{N})$  задачи (8), (2).

Доказательство проводится тем же способом, как в теореме 1 из [10].

## 2. Численные методы

Обоснование численных методов для решения задачи (1), (2) связано с со значительными трудностями. На отрезке  $T = [\alpha, \beta]$  введем сетку  $t_i = \alpha + ih, i = 0, 1, \dots, M - 1, h = (\beta - \alpha)/M, M$  – число узлов сетки. Запишем неявную схему Эйлера в двух вариантах

$$A(Y_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B(Y_{i+1}) = 0, \quad (9)$$

$$A(Y_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B(Y_{i+1}) = 0, \quad (10)$$

где  $Y_i = (t_i, x_i, \nu_*)$ ,  $x_0 = a(\nu_*)$ , и при каждом  $i$  нужно один раз решить нелинейную систему.

**Пример 3.** Рассмотрим тестовую задачу вида (1), (3)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ (x_1 - x_2)x_1 & (x_1 - x_2)x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2e^{2t} \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [0, 1], \quad (11)$$

где  $(x_1(0) \ x_2(0))^T = (1 \ 1)^T$ . Применим теорему 1. Имеем

$$A(\zeta)c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c = -B(\zeta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \kappa \\ 2 - \kappa \end{pmatrix} \quad \forall \kappa \in \mathbf{R},$$

$$\text{rank } A(\zeta) = \text{deg det}[\lambda A(\zeta) + \Theta(c)] = \text{deg det} \left[ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \kappa & 1 - \kappa \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \text{deg}(-4\lambda - 4) = 1.$$

Согласно теореме 1, начальная задача для системы (9) имеет решение. Методом исключения неизвестных можно найти решение  $(x_1(t) \ x_2(t))^T = (e^t \ e^t)^T$ . Применим схемы (9), (10) для решения системы (9). Нелинейные системы будем решать методом Ньютона. За начальные данные при вычислении  $x_{i+1}$  будем брать вектор  $x_i$  [11]. Легко видеть, что для системы (11) в методе (9) матрица Якоби вырожденная для любой итерации, и метод Ньютона не применим.

Проведем анализ схемы (10). Она гораздо сложнее чем схема (9). Упростим ее. Разлагая в ряд Тэйлора вектор-функцию  $B(Y_{i+1})$  и матрицу  $A(Y_{i+1})$  в точке  $x_i$  приведем (9) к виду

$$[A_i + h(\tilde{B}_i + \tilde{A}_i)](x_{i+1} - x_i) = -hB_i, \quad (12)$$

где  $A_i = A(Y_i)$ ,  $B(Y_i)$ ,

$$\tilde{B}_i = \frac{\partial B(v, t, \nu)}{\partial v} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad \tilde{A}_i = \frac{\partial [A(v, t, \nu)P_i]}{\partial t} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad P_i = (x_i - x_{i-1})/h, \quad i \geq 1.$$

Если  $i = 0$ , то принимаем  $P_0 = c$ , где  $c$  – вектор из теоремы 1.

### Теорема 3.

1. Пусть выполнены условия теоремы 1;
2. на отрезке  $T_\varepsilon = [\alpha, \alpha + \varepsilon]$  задана сетка  $t_i = \alpha + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, M - 1$ ,  $h = \varepsilon/M$ .

Тогда, начиная с некоторого  $M > M_0$ , система (12) разрешима для всех  $i$  относительно  $x_{i+1}$ , и справедлива оценка  $\|x_i - x(t_i)\| = O(h)$  равномерно по  $i$ .

Метод ниже не используется, поэтому мы опускаем доказательство.

**Лемма 4.** (см., например [12]) Пусть для неотрицательных чисел  $u_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$  выполнено неравенство

$$u_i \leq c + t \sum_{j=1}^{i-1} u_j, \quad u_1 \leq c,$$

где  $c, t$  – неотрицательные постоянные. Тогда справедлива оценка (разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана):  $u_i \leq c(1 + t)^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Для схемы (10) эти трудности отсутствуют. Проведем следующие преобразования. Продифференцируем второе уравнение в системе (8) и выпишем разностную аппроксимацию этого выражения

$$\tilde{B}_{2,i} \frac{x_{i+1} - x_i}{h} + G_i = 0, \quad \tilde{B}_{2,i} = \frac{\partial B_2(v, t, \nu)}{\partial x} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}, \quad G_i = \frac{\partial B_2(v, t, \nu)}{\partial t} \Big|_{(v, t, \nu) = Y_i}.$$

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из леммы 3 вытекает, что  $\det S_i = \det \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \tilde{B}_{2,i} \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall i$ , и матрица  $\tilde{B}_{2,i}$  имеет полный ранг для любого  $i$ . Тогда можно произвести разбиение  $\tilde{B}_{2,i} =$

$(B_{21,i} \ B_{22,i})$  где  $\det B_{22,i} \neq 0$  для любого  $i$ . Согласно разбиению матрицы  $\tilde{B}_{2,i}$ , произведем разбиение:  $x_i = (y_i^\top \ z_i^\top)^\top$ . Тогда из схемы (10) следует

$$\mathcal{A}_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + B_1(y_i, z_i, \nu_*) = 0, \quad \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = -B_{22,i}^{-1} [B_{21,i} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + G_i], \quad (13)$$

Здесь аргумент при вычислении функции  $B_1$  сдвинут на один шаг. Матрица  $\mathcal{A}_i = A_{11,i} - A_{12,i} B_{22,i}^{-1} B_{21,i}$  в (13) получена применением формулы Шура [9] к матрице  $S_i$ , следовательно,  $\det \mathcal{A}_i \neq 0 \ \forall i$ . Итак, мы произвели декомпозицию схемы (10), выписав схему (13). Здесь нам нужно обратить две матрицы  $\mathcal{A}_i, B_{22,i}$ . Мы получили существенное уменьшение объема вычислений. Например, если размерности матриц  $\mathcal{A}_i, B_{22,i}$  равны, то количество операций уменьшается в 4 раза по сравнению с применением исходной схемы (10). К тому же нам не нужно решать нелинейные уравнения. Это очень важно при проведении вычислений в режиме реального времени.

Если мы подставим решение задачи (8), (2) в первое уравнение из (13), вычтем из полученного выражения уравнение (13) и перейдем к нормам, то в условиях теоремы 2 получим выражение  $w_i \leq \sigma + \kappa h \sum_{j=1}^{i-1} w_j$ ,  $w_i = \|z(t_i) - z_i\|$ ,  $\sigma = O(h)$ ,  $\kappa = const$ . Из леммы 4 следует, что справедлива оценка  $w_i \leq e^{\kappa(\beta-\alpha)\sigma}$ .

**Замечание 3.** Если система (8) жесткая, то в (13) можно сдвиг аргумента производить следующим образом: слагаемое  $B_1(y_i, z_i, \nu_*)$  заменить на слагаемое  $B_1(y_{i+1}, z_i, \nu_*)$ , и мы получим неявную схему. На сходимость это не влияет.

### 3. Модель основного тракта проточного парового котла

В технологической установке, называемой паровым котлом, вода в сети трубопроводов (схематично изображенных на рис. 1) последовательно нагревается в устройствах, называемых теплообменниками (ТО), по ходу от насоса к турбине газами и лучевым теплом, получаемыми от сгорания топлива в топке. Газы идут в противоположном направлении по отношению к ходу воды.

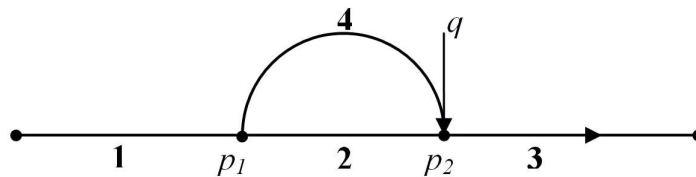


Рис. 1. Принципиальная схема главного тракта проточного котла

В ТО 1 происходит нагревание воды до температуры кипения, в ТО 2 (зона кипения) вода превращается в пар, а в ТО 3 (участок перегрева) пар доводится до нужной температуры и давления. По ветке 4 в ТО 3 подается вода из ТО 1 для регулирования температуры пара на выходе из котла. Содержание тепла в среде характеризуется величиной, называемой энтальпией и обозначаемой ниже буквой  $I$ . В простейшем случае  $I = ct$ , где  $c$  — теплоемкость среды, а  $t$  — ее температура. Система уравнений, описывающая ТО имеет вид

$$V_j \rho \frac{d\bar{I}_j}{d\tau} + D_{b,j}(I_j - I_{bx,j}) = \alpha_{b,j} H_j [\theta_j - t(p_i, \bar{I}_j)], \quad (14)$$

$$M_{m,j} c_m \frac{d\theta_j}{d\tau} = q_{L,j} + \alpha_{g,j} H_{g,j}(t_{g,j} - \theta_j) - \alpha_{b,j} H_{b,j}[\theta_j - t(p_i, \bar{I}_j)], \quad (15)$$

$$V_{g,j} \rho_g c_g \frac{d\bar{t}_{g,j}}{d\tau} = D_g c_g (t_{g,j} - t_{gbx,j}) - \alpha_{g,j} H_{g,j} (\bar{t}_{g,j} - \theta_j). \quad (16)$$

где  $j = 1, 2, 3$  – номер ТО,  $i = 1, 2$ ,  $I_{bx,j}$ ,  $t_{gbx,j}$  – входные в ТО энтальпия и температура газа,  $D_{b,j}, D_g$  – расходы теплоносителя (пара, воды или пароводяной смеси) и газа через ТО,  $I_j$  – энтальпия на выходе из ТО,  $\bar{I}_j$  – средняя энтальпия,  $\bar{I}_j = \gamma I_j + (1 - \gamma) I_{bx}$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  – коэффициент усреднения  $t(p, I)$  – функция, связывающая температуру теплоносителя с энтальпией и давлением в ТО;  $\rho = \rho(p, I)$  – функция плотности теплоносителя в ТО;  $\theta_j$  – температура стенки ТО,  $t_{g,j}$  – температура газа в ТО,  $D_g$  – расход газа,  $c_m, c_g$  – теплоемкости газа и металла,  $V_j, V_{g,j}, H_{b,j}, H_{g,j}$  – объемы ТО и площади тепловоспринимающих поверхностей по воде и газу,  $\alpha_{b,j}, \alpha_{g,j}$  – коэффициенты теплоотдачи по теплоносителю и газу,  $q_{L,j}$  – лучевое тепло, воспринимаемое ТО.

В основу моделирования топки положен закон Стефана – Больцмана.

$$V_g \rho_g c_g \frac{dT_g}{d\tau} = -D_g c_g (T_g - rCK) - Q_L + Q_{ugl}, \quad (17)$$

$$M_z c_z \frac{dT_z}{d\tau} = -\frac{H}{\rho_z} (T_z - T_1) + Q_L, \quad Q_L = a_1 H ([z(T_g)]^4 - T_z^4), \quad (18)$$

где  $T_g = t_g + rCK$ ,  $T_z = \theta_t + rCK$ ,  $T_1 = t(p_2, I_2) + rCK$ ,  $rCK = 273.15$  – соответственно температуры газа на выходе из топки, тепловоспринимающего слоя и теплоносителя в градусах Кельвина,  $z = cT_g$  – температура факела,  $c = \text{const} = 1, 1$ ,  $Q_L$  – лучевое тепло, выделяемое топкой,  $Q_{ugl}$  – тепло выделяемое от сгорания топлива (угля),  $Q_L = q_{L,1} + q_{L,2} + q_{L,3}$ . Система уравнений, описывающих математическую модель ТО или топки, выражает законы сохранения. Количество тепла, поступающее из газом и лучевым теплом в теплообменник  $D_g c_g (t_{g,j} - t_{gbx,j}) + q_{L,j}$ , в стационарном состоянии равно количеству тепла, уносимого теплоносителем  $D_{b,j} (I_j - I_{bx,j})$ . Для топки количество тепла от сгорания топлива равно теплу, уносимому с газом и лучевым теплом:  $Q_{ugl} = D_g c_g (T_g - rCK) + Q_L$ .

Сеть трубопроводов моделируется гидравлической цепью (ГЦ). Под гидравлической цепью понимается плоский граф (для примера см. рис.1), для которого выполнены первый и второй законы Кирхгофа: а) количество среды втекающей в вершину графа, равно количеству вытекающей; б) сумма перепадов давлений в замкнутом контуре равна нулю. ГЦ из  $m$  узлов и  $r$  ветвей ставится в соответствие  $(m \times r)$  – матрица соединения ветвей и границ  $\bar{A}$ , состоящая из нулей и единиц [13]. Уравнения, вытекающие из этих законов, дополняются соотношениями, связывающими давления в вершинах графа с расходами по ветвям. Используя результаты из [7], нестационарную модель ГЦ запишем в виде ДАУ

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{D}(t) \\ \dot{P}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & A^\top \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S|D(t)|D(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + A_1^\top P_*(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty), \quad (19)$$

где  $(A^\top \ A_1^\top) = \bar{A}$ ,  $D(t) = (d_1(t) \ d_2(t), \dots, d_r(t))^\top$  – вектор-функция расходов среды по ветвям,  $P(t) = (p_1(t) \ p_2(t), \dots, p_\mu(t))^\top$  – вектор-функция давлений в узлах,  $P_*(t) = (p_{1,*}(t) \ p_{2,*}(t), \dots, p_{\nu,*}(t))^\top$  – вектор-функция известных давлений,  $\mu + \nu = m$ ,  $R = \text{diag}\{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r\} > 0$  – параметры инерции ГЦ,  $S_0 = \text{diag}\{s_{1,0}, s_{2,0}, \dots, s_{r,0}\} > 0$ ,  $S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_r\} > 0$  – параметры сопротивлений ветвей ГЦ,  $|D(t)|D(t) = (d_1(t)|d_1(t)|, \ d_2(t)|d_2(t)|, \dots, d_q(t)|d_q(t)|)^\top$ ,  $H(t) = (h_1(t) \ h_2(t), \dots, h_r(t))^\top$ ,  $Q(t) = (q_1(t) \ q_2(t), \dots, q_r(t))^\top$  – вектора напоров и притоков в ГЦ. Индекс системы (19) глобально равен 2. В определения 1 можно принять

$$\Lambda_2 = \left[ \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & E_\mu \end{pmatrix} \right] \circ \left[ \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_\mu \end{pmatrix} \right], \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \Psi(D) & -AR^{-1}A^\top \end{pmatrix},$$



где  $\det AR^{-1}A^T > 0$ ,  $\Psi(D) = -[AR^{-1}S_0 + \partial(AS|D|D)/\partial D]$ . При нулевых  $H(t)$ ,  $P_*(t)$  и  $Q(t)$  система (19) имеет нулевое решение, которое является контрактивным. Рассмотрим скалярное произведение вектор-функции  $(D^T(t), -P^T(t))^T$  с системой. Получим

$$\frac{d}{dt}(D(t), D^T(t)) = -S_0(D(t), D^T(t)) - S(|D(t)|D(t), D^T(t)) < 0.$$

Следовательно,  $\|D(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . В силу алгебраических связей  $\|P(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

**Замечание 4.** Если в (19) положить  $R = 0$ , то мы получим стационарную ГЦ, которая исчерпывающе изучена в [13].

Используя формулы (14) – (18), выпишем ДАУ, описывающее модель котельной установки, принципиальная схема которой изображена на рис. 1. Параметры соответствуют реальной установке (прямоточному котлу ПК-24). Элементами управления здесь служат параметры  $Q_{ugl}$  и  $I_{bx}$  – теплосодержание воды на входе в котел, сопротивления участков  $s_3, s_4$ , регулирующие количество воды, поступающее в котел и температуру пара на входе в турбину.

$$\begin{aligned} \text{Уравнения ГЦ:} & \begin{cases} 0 = x_3 - x_4 - x_6, \\ q(x_2, x_{10}) = x_4 - x_5 + x_6, \\ \varrho_3 \dot{x}_3 = x_1 + s_{0,3}x_3 + \left[ s_3 + \kappa_1 \int_0^t (545 - x_{13}(s)ds \right] |x_3|x_3 - h_1(t), \\ \varrho_4 \dot{x}_4 = -x_1 + x_2 + s_{0,4}x_4 + s_4|x_4|x_4, \\ \varrho_5 \dot{x}_5 = -x_2 + s_{0,5}x_5 + s_5|x_5|x_5 - h_2(t) \\ \varrho_6 \dot{x}_6 = -x_1 + x_2 + s_{0,6}x_4 + s_6|x_6|x_6; \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 1:} & \begin{cases} -a_{11}\dot{x}_7 = a_{12}x_3(x_7 - I_{bx}) - a_{13}(x_8 - a_{14}x_7), \\ -a_{15}\dot{x}_8 = a_{16}(x_9 - x_8) + a_{13}(x_8 - a_{14}x_7), \\ -a_{17}\dot{x}_9 = a_{18}(x_9 - x_{12}) + a_{16}(x_9 - x_8) \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 2:} & \begin{cases} -a_{21}\dot{x}_{10} = a_{22}x_4(x_{10} - x_7) - a_{23}(x_{11} - a_{24}x_{10}), \\ -a_{25}\dot{x}_{11} = -a_{26}(x_{12} - x_{11}) - a_{23}(x_{11} - a_{24}x_{10}) - \omega_1 Q(x_{16}, x_{17}), \\ -a_{27}\dot{x}_{12} = a_{28}(x_{12} - x_{15}) + a_{26}(x_{12} - x_{11}) \end{cases} \\ \text{Уравнения ТО 3:} & \begin{cases} -a_{31}\dot{x}_{13} = a_{32}x_5(x_{13} - I_{sm}) - a_{33}(x_{14} - a_{34}x_{13}), \\ -a_{35}\dot{x}_{14} = -a_{36}(x_{15} - x_{14}) + a_{33}(x_{14} - a_{34}x_{13}) - \omega_2 Q(x_{16}, x_{17}), \\ -a_{37}\dot{x}_{15} = a_{38}(x_{15} - \omega_3(x_{16} - r_{CK})) + a_{36}(x_{15} - x_{14}), \\ I_{sm} = (x_6x_7 + x_{10}x_4)/x_5; \end{cases} \\ \text{Уравнения топки:} & \begin{cases} a_{41}\dot{x}_{16} = a_{42}(x_{16} - r_{CK}) + Q(x_{16}, x_{17}) - Q_{ugl}, \\ a_{45}\dot{x}_{14} = a_{46}(x_{17} - x_{11}) - Q(x_{16}, x_{17}), \\ Q(x_{16}, x_{17}) = a_{43} [(a_{44}x_{16})^4 - x_{17}^4]. \end{cases} \end{aligned}$$

Предполагается, что вода в ТО 2 находится на линии насыщения. Приток  $q(x_2, x_{10}) = -V_2 d\rho/dt$  появляется в результате учета изменения плотности воды в ТО 2 при возмущениях. В стационарном состоянии  $q(x_2, x_{10}) = 0$ . Если предполагать что гидравлические процессы протекают существенно быстрее, чем тепловые (в (19)  $R = 0$ ), то система вблизи стационарного существования имеет индекс 1. В обратном случае индекс системы равен 2. Укажем соответствие между физическими параметрами и переменными системы. Здесь

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}) = \\ (p_1, p_2, d_1, d_2, d_3, d_4, I_1, \theta_1, t_{g,1}, I_2, \theta_2, t_{g,2}, I_3, \theta_3, t_{g,3}, T_g, T_z). \end{aligned}$$

Таблица

Основные параметры, их обозначение и значения

Обозначение	Численная величина	Обозначение	Численная величина
$a_{11}$	500	$a_{21}$	1000
$a_{12}$	0,5	$a_{22}$	0,5
$a_{13}$	102.24	$a_{23}$	100
$a_{14}$	1/4,5	$a_{24}$	0,1
$a_{15}$	50 000	$a_{25}$	100 000
$a_{16}$	690	$a_{26}$	700
$a_{17}$	100	$a_{27}$	100
$a_{18}$	132,78	$a_{28}$	140
$a_{31}$	1000	$a_{41}$	3700
$a_{32}$	0,5	$a_{42}$	139
$a_{33}$	100	$a_{43}$	$0,265110222 \times 10^{-7}$
$a_{34}$	1/7,5	$a_{44}$	1,1
$a_{35}$	100 000	$a_{45}$	825
$a_{36}$	700	$a_{46}$	1125/7,8
$a_{37}$	100	$h_1(t)$	200
$a_{38}$	140	$h_2(t)$	140
$s_3$	0,002	$s_{0,3}$	0
$s_4$	0,002	$s_{0,4}$	0
$s_5$	0,002	$s_{0,5}$	0
$s_6$	0,1	$s_{0,6}$	0
$x_1(0)$	167	$x_{10}(0)$	2600
$x_2(0)$	154	$x_{11}(0)$	590
$x_3(0)$	100	$x_{12}(0)$	600
$x_4(0)$	95	$x_{13}(0)$	4000
$x_6(0)$	5	$x_{15}(0)$	650
$x_7(0)$	1193	$x_{16}(0)$	1379,266638
$x_8(0)$	400	$x_{17}(0)$	1202,612331
$x_9(0)$	420		

Проведены расчеты при  $R = 0$  с использованием декомпозиции и без на временном отрезке  $[0, 1200]$  (время измеряется в секундах) с шагом интегрирования  $h = 0,05$ , коэффициент усреднения  $\gamma = 0,5$ . Результат расчетов с декомпозицией изображен на графике ниже (рис. 2), который иллюстрирует поведение температуры пара на выходе из котла (переменная  $x_{13}/c_p$ ,  $c_p$  – теплоемкость пара). Начальные данные намеренно взяты далеко от стационарных. Температура на выходе из котла должна быть равна  $545^\circ\text{C}$ . В масштабах графика различия (с декомпозицией и без) не видны. Точное сравнение показало, что максимальная величина расхождения расчетов с декомпозицией и без нее равна  $0,2762$ .

Расчеты при  $R > 0$  проведены по следующей схеме: индекс системы понижался до 1, а затем применялась схема с декомпозицией. Понижение индекса проводилось по методу из [14]. Результаты вычислений для нестационарного случая ГЦ отличаются незначительно от случая  $R = 0$ . При всех вариантах принято  $Q_{ugl} = 294074,55$ ,  $I_{vh} = 1000$ .

*Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, гранты №09-08-00201-а, 11-01-93005-Вьет-а*

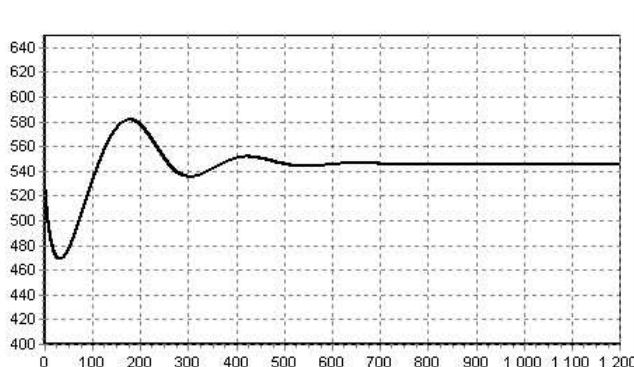


Рис. 2. Поведение температуры пара на выходе из котла

## Литература

1. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования /Ю.Е. Бояринцев , В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998.
2. Зубова, С.П. Решение задачи управления для линейной модели дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88, № 6. – С. 885 – 896.
3. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук /А.В. Келлер. – Челябинск, 2011.
4. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк //Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, № 126. – С. 2169 – 2171.
6. Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука, 1988.
7. Бальшев, О.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты) /О.А. Бальшев, Э.А. Таиров. – Новосибирск: Наука, 1998.
8. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений /Ю.Е. Бояринцев . – Новосибирск: Наука, 1980.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М: Наука, 1967.
10. Чистякова, Е.В. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегродифференциальных уравнений общего вида /Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 16, № 5.–С. 100-114.
11. Калиткин, Н.Н. Численные методы /Н.Н. Калиткин . – М.: Наука, 1978.
12. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы /А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999.
13. Меренков, А.П. Теория гидравлических цепей парогенераторов / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. – М.: Наука, 1985.
14. Булатов, М.В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – Т. 34, № 3. – С. 360 – 372.

Виктор Филимонович Чистяков, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), [chist@icc.ru](mailto:chist@icc.ru).

Эмир Асгадович Таиров, доктор технических наук, заведующий лабораторией, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), [tairov@isem.sei.irk.ru](mailto:tairov@isem.sei.irk.ru).

Елена Викторовна Чистякова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), [elena.chistyakova@icc.ru](mailto:elena.chistyakova@icc.ru).

Анатолий Алексеевич Левин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Российская Федерация), [levin@isem.sei.irk.ru](mailto:levin@isem.sei.irk.ru).

---

## On Decomposition of Difference Schemes for Numerical Solution of Differential Algebraic Equations

**V.F. Chistyakov**, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

**E.A. Tairov**, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

**E.V. Chistyakova**, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation),

**A.A. Levin**, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

We consider quasi-linear systems of ordinary differential equations (ODE) with identically singular matrix multiplying the derivative of the desired vector-function and difference scheme for their numerical solution. We discuss conditions that make it possible to solve algebraic (finite-dimensional) equations at each step of numerical process and substitute the solutions obtained into the dynamics equations. Results of numerical solution of ODE systems modeling direct-flow boiler unit are given.

*Keywords: differential-algebraic equations, index, difference schemes, mathematical models, direct-flow boiler.*

## References

1. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody chislennogo resheniya i issledovaniya* [Differential Algebraic Equations. Methods of Numerical Solution and Research]. Novosibirsk, Nauka, 1998.
2. Zubova S.P. Solution of the Control Problem for a Linear Descriptor System with Rectangular Coefficient Matrix. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, no. 5 – 6, pp. 844 – 854.
3. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis...doktor fiz.-mat. nauk*. Chelyabinsk, 2011.
4. Hairer E., Wanner G. *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi* [Solution of Ordinary Differential Equations. Rigid and Differential-algebraic Problems]. Moscow, Mir, 1999.
5. Sviridyuk G.A. The Cauchy Problem for a Linear Singular Operator Sobolev-type Equations [Zadacha Koshi dlya lineynogo singulyarnogo operatornogo uravneniya tipa Soboleva]. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 126, pp. 2169 – 2171.

6. Ushakov E.I. *Statischeckaya ustoychivost' elektricheskikh sistem* [Static Stability of Electrical Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1988.
7. Balyshv O.A., Tairov E.A. *Analiz perekhodnykh i statsionarnykh protsessov v truboprovodnykh sistemakh (teoreticheskie i eksperimental'nye aspekty)* [Analysis of Transient and Steady-state Processes in Pipeline Systems (Theoretical and Experimental Aspects)]. Novosibirsk, Nauka, 1998.
8. Boyarintsev Yu.E. *Regulyarnye i singulyarnye sistemy lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Regular and Singular Linear Systems Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1980.
9. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka, 1967.
10. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. On the Solvability of Degenerate Systems of Quasilinear Integro-differential Equations of the Form [O razreshimosti vyrozhdennykh sistem kvazilineynykh integro-differentsial'nykh uravneniy obshchego vida]. *Computational Technologies*, 2001, vol. 16, no. 5, pp. 100 – 114.
11. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978.
12. Apartsin, A.S. *Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda: teoriya i chislennyye metody* [Non-classical Equations of Volterra Type I: Theory and Numerical Methods]. Novosibirsk, Nauka, 1999.
13. Merenkov A.P., Khasilev V.Ya. *Teoriya gidravlicheskikh tsepey parogeneratorov* [Theory of Hydraulic Circuits Steam]. Moscow, Nauka, 1985.
14. Bulatov M.V. The Transformation of Differential-algebraic Systems of Equations [O preobrazovanii algebro-differentsial'nykh sistem uravneniy]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1994, vol.34, no. 3, pp. 360 – 372.

Поступила в редакцию 19 декабря 2011 г.