

ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Т.Г. Сукачева

Рассматривается обобщенная линеаризованная модель термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка. В рамках теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа доказана теорема существования единственного решения задачи Коши–Дирихле для соответствующей системы уравнений Осколкова и получено описание расширенного фазового пространства указанной задачи.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, несжимаемая вязкоупругая жидкость, модели Осколкова, расширенное фазовое пространство.

Введение

Система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \lambda \nabla^2) \mathbf{v}_t = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 \mathbf{w}_{m,q} - \\ g\gamma\theta - \mathbf{p} + \mathbf{f}, \quad 0 = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{m,0}}{\partial t} = \mathbf{v} + \alpha_m \mathbf{w}_{m,0}, \quad \alpha_m \in \mathbb{R}_-, \quad m = \overline{1, M}, \\ \frac{\partial \mathbf{w}_{m,q}}{\partial t} = q \mathbf{w}_{m,p-1} + \alpha_m \mathbf{w}_{m,q}, \quad q = \overline{1, n_m - 1}, \\ \theta_t = \kappa \nabla^2 \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \gamma \end{array} \right. \quad (1)$$

получена на основе линеаризованной системы Осколкова ненулевого порядка [1, 2] и приближенного уравнения теплопроводности, моделирующего термоконвекцию несжимаемой вязкоупругой жидкости. Она моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = v_i(x, t)$, градиента давления $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = p_i(x, t)$ и температуры $\theta = \theta(x, t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высшего порядка K ($K = n_1 + \dots + n_M$) [1, 3]. Параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ – ускорение свободного падения; $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$ – орт в \mathbb{R}^n . Параметры $A_{m,q} \in \mathbb{R}_+$, определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(x, t)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость, а вектор-функция $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{v}_k = \tilde{v}_k(x)$ соответствует стационарному решению исходной системы [1, 2]. В [4] содержится обоснование линеаризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка.

Рассмотрим разрешимость первой начально – краевой задачи

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), & \mathbf{w}_{m,q}(x, 0) = \mathbf{w}_{m,q}^0(x), & \theta(x, 0) = \theta_0(x), & \forall x \in \Omega; \\ \mathbf{v}(x, t) = 0, & \mathbf{w}_{m,q}(x, t) = 0, & \theta(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ m = \overline{1, M}, & q = \overline{0, n_m - 1} & & \end{array} \quad (2)$$

для системы (1). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ .

Впервые задачу термоконвекции для несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина – Фойгта поставил А.П. Осколков [5]. Им же была исследована разрешимость задачи (2) для соответствующей нелинейной модели нулевого порядка в случае $\lambda^{-1} > -\lambda_1$ (λ_1 — наименьшее собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω) [6]. Первая начально-краевая задача для этой модели рассматривалась в [4, 7], а для ее модификации на случай плоско-параллельного течения в [8]. В этих работах изучалась ситуация, когда свободный член \mathbf{f} не зависит от времени, а в [9] — указанная неавтономная задача. Нестационарная линеаризованная модель нулевого порядка изучалась в [10], а ее обобщение в [11].

Нашей целью является изучение разрешимости задачи (1), (2) при нестационарном свободном члене $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$. Эту задачу мы исследуем в рамках теории полулинейных неавтономных уравнений соболевского типа. Основным инструментом исследования является понятие относительно p -секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, и получено описание ее расширенного фазового пространства. Статья состоит из трех частей. В первой части приводятся известные результаты из теории полулинейных уравнений соболевского типа, необходимые нам в дальнейшем [4, 9, 12]. Во второй части проводится редукция задачи (1), (2) к полулинейному неавтономному уравнению соболевского типа. В третьей части устанавливается существование квазистационарных полутраекторий указанной задачи и описывается ее расширенное фазовое пространство. В данной работе получены результаты, обобщающие результаты для линеаризованных моделей Осколкова меньшего порядка, полученные автором ранее в [13, 14].

1. Полулинейные неавтономные уравнения соболевского типа

Пусть \mathcal{U} и \mathcal{F} — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен, $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в \mathcal{U} , т.е. $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Через \mathcal{U}_M обозначим линеал $\text{dom } M$, снабженный нормой графика $\|\cdot\| = \|M \cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Пусть оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного нестационарного уравнения соболевского типа

$$L \dot{u} = M u + F(u) + f(t). \tag{4}$$

Определение 1. Локальным решением (далее просто — решением) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0, T); \mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \rightarrow u_0$ при $t \rightarrow 0+$.

Введем в рассмотрение L -резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ и L -спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M .

Определение 2. Оператор M называется (L, p) -секториальным, если существуют константы $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$, $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad S_{\Theta, a}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M); \\ & \text{(ii)} \quad \max\{ \|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})} \} \leq \frac{k}{\prod_{q=0}^p |\mu_q - a|} \end{aligned}$$

при любых $\mu, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{\Theta, a}^L(M)$.

Здесь $R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p R_{\mu_q}^L(M)$, $L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{q=0}^p L_{\mu_q}^L(M)$ соответственно правая и левая (L,p) -резольвенты оператора M , $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ [12].

Определение 3. Оператор M называется сильно (L,p) -секториальным, если он (L,p) -секториален и при всех $\mu, \mu_0, \dots, \mu_p \in S_{\Theta,a}^L(M)$

$$(i) \|MR_{(\mu,p)}^L(M)(\mu L - M)^{-1}f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}(f)}{|\mu - a| \prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}$$

при всех f из некоторого плотного в \mathcal{F} линейала;

$$(ii) \|(\mu L - M)^{-1}L_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\mu - a| \prod_{q=0}^p |\mu_q - a|}.$$

Замечание 1. Если $p = 0$, то (L,p) - и сильно (L,p) -секториальный оператор M называется соответственно L - и сильно L -секториальным [4].

Будем рассматривать задачу (3), (4) в предположении, что оператор M сильно (L,p) -секториален. При условии сильной (L,p) -секториальности оператора M решение задачи (3), (4) может быть неединственным, что показывает пример, приведенный в [15]. Поэтому сузим понятие решения уравнения (4). Также известно [16 – 18], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем два определения.

Определение 4. Множество $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{U}_M \times \bar{\mathbb{R}}_+$ назовем расширенным фазовым пространством уравнения (4), если для любой точки $u_0 \in \mathcal{U}_M$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathcal{B}^0$ существует единственное решение задачи (3), (4), причем $(u(t), t) \in \mathcal{B}^t$.

Замечание 2. Если $\mathcal{B}^t = \mathcal{B} \times \bar{\mathbb{R}}_+$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$, то множество \mathcal{B} называется фазовым пространством уравнения (4). Ранее вместо термина «расширенное фазовое пространство» использовался термин «конфигурационное пространство» [9], что вносило некоторую путаницу в терминологию [13, 14].

Определение 5. Пусть пространство \mathcal{U} расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$ так, чтобы $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. Решение $u = v + w$, где $v(t) \in \mathcal{U}_0$, а $w(t) \in \mathcal{U}_1$ при всех $t \in (0, T)$, уравнения (4) назовем квазистационарной полутраекторией, если $L\dot{v} \equiv 0$.

Замечание 3. Понятие квазистационарной полутраектории обобщает понятие квазистационарной траектории, введенное для динамического случая [15, 17, 18].

В силу того, что оператор M сильно (L,p) -секториален, пространства \mathcal{U} и \mathcal{F} расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ [12], где

$$\mathcal{U}^0 = \{\varphi \in \mathcal{U} : U^t \varphi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}, \quad \mathcal{F}^0 = \{\psi \in \mathcal{F} : F^t \psi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}_+\} -$$

ядра, а

$$\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow 0+} U^t u = u\}, \quad \mathcal{F}^1 = \{f \in \mathcal{F} : \lim_{t \rightarrow 0+} F^t f = f\} -$$

образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu,$$

($\Gamma \subset S_{\Theta,a}^L(M)$ – контур такой, что $\arg \mu \rightarrow \pm\Theta$ при $|\mu| \rightarrow +\infty$) линейного однородного уравнения $L\dot{u} = Mu$.

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k (\mathcal{U}^k \cap \text{dom } M)$, $k = 0, 1$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{F}^k$, $M_k : \mathcal{U}^k \cap \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$, причем сужения M_0 и L_1 операторов M и L на пространства $\mathcal{U}^0 \cap \text{dom } M$ и \mathcal{U}^1 соответственно являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы. Эти утверждения следуют из соответствующих результатов [12]. Поэтому приведем уравнение (4) к эквивалентной форме

$$\begin{aligned} R\dot{u}^0 &= u^0 + G(u) + g(t) & u^0(0) &= u_0^0, \\ \dot{u}^1 &= Su^1 + H(u) + h(t) & u^1(0) &= u_0^1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $u^k \in \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, $u = u^0 + u^1$, операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, $G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $H = L_1^{-1}QF$, $g = M_0^{-1}(I - Q)f$, $h = L_1^{-1}Qf$. Здесь $Q \in \mathcal{L}(F) (\equiv \mathcal{L}(F; F))$ — проектор, расщепляющий пространство \mathcal{F} требуемым образом.

Определение 6. Систему уравнений (5) назовем нормальной формой уравнения (4).

Замечание 4. В случае, когда оператор M сильно L -секториален, нормальная форма уравнения (4) (в случае $f(t) \equiv 0$) имеет вид (5.1) в [8].

В дальнейшем ограничимся изучением таких квазистационарных полутраекторий уравнения (4), для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор R — бирасщепляющий [19], т.е. его ядро $\ker R$ и образ $\text{im } R$ дополняемы в пространстве \mathcal{U} . Положим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству \mathcal{U}^{00} . Тогда первое уравнение нормальной формы (5) редуцируется к виду

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \tag{6}$$

где $u = u^{00} + u^{01} + u^1$.

Теорема 1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория $u = u(t)$ уравнения (4). Тогда она удовлетворяет соотношениям

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u) + g(t), \quad u^{01} = \text{const}. \tag{7}$$

Доказательство. Первое соотношение вытекает из (6) в силу требования квазистационарности $R\dot{u}^0 = R\dot{u}^{01} \equiv 0$. Второе соотношение вытекает из тождества $R\dot{u}^{01} \equiv 0$, так как по теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора $Q_R R(I - P_R)$ на \mathcal{U}^{01} есть непрерывно обратимый оператор. Здесь Q_R и P_R — проекторы на $\text{im } R$ и $\ker R$ соответственно, $\ker P_R = \mathcal{U}^{01}$. \square

Замечание 5. Второе соотношение в (7) поясняет смысл термина «квазистационарные полутраектории», т.е. это такие полутраектории, которые «стационарны по некоторым переменным». Другими словами, квазистационарная полутраектория обязательно лежит в некоторой плоскости $(I - P_R)u^0 = \text{const}$.

Теорема 1 устанавливает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Перейдем к рассмотрению достаточных условий. Известно, что при условии сильной (L, p) -секториальности оператора M оператор S секториален [12]. Значит, он порождает на \mathcal{U}^1 аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U_1^t : t \geq 0\}$, так как в действительности оператор U_1^t есть сужение оператора U^t на \mathcal{U}^1 . Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий

данному расщеплению. Можно показать, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$ [12]. Тогда пространство \mathcal{U}_M расщепляется в прямую сумму $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_M^0 \oplus \mathcal{U}_M^1$ так, что вложение $\mathcal{U}_M^k \subset \mathcal{U}^k$, $k = 0, 1$, плотно и непрерывно. Символом A'_v обозначена производная Фреше в точке $v \in \mathcal{V}$ оператора A , определенного на некотором банаховом пространстве \mathcal{V} .

Теорема 2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, а вектор-функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$. Пусть

(i) в некоторой окрестности $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ точки u_0 выполнено соотношение

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)); \quad (8)$$

(ii) проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, и оператор $I + P_R G'_{u_0} : \mathcal{U}_M^{00} \rightarrow \mathcal{U}_M^{00}$ — топологический изоморфизм ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00}$);

(iii) для аналитической полугруппы $\{U_1^t : t \geq 0\}$ выполнено соотношение

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (9)$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения (4).

Доказательство. Рассмотрим окрестность \mathcal{O}_{u_0} точки u_0 . В этой окрестности первое уравнение (5) приобретет вид

$$0 = u^{00} + P_R(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1) + g(t)) \quad (10)$$

в силу условия (i). Далее, из (i) в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathcal{O}_{u_0^{00}} \subset \mathcal{U}_M^{00}$, ($\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}^{00} \cap \mathcal{U}_M$) $\mathcal{O}_{u_0^1} \subset \mathcal{U}_M^1$ ($\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}_M$) точек $u_0^{00} = P_R(I - P)u_0$, u_0^1 соответственно и отображение $\delta : \mathcal{O}_{u_0^1} \rightarrow \mathcal{O}_{u_0^{00}}$ класса C^∞ такое, что уравнение

$$u^{00} = \delta(u^1, t) \quad (11)$$

эквивалентно уравнению (10).

Теперь в силу (11) второе уравнение (5) в окрестности $\mathcal{O}_{u_0^1}$ приобретет вид

$$u^1 = Su^1 + H(\delta(u^1) + u_0^{01} + u^1) + h(t), \quad (12)$$

где оператор $H((I + \delta)(\cdot) + u_0^{01}) : \mathcal{O}_{u_0^1} \rightarrow \mathcal{U}^1$ принадлежит классу C^∞ по построению.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (12) воспользуемся методом Соболевского-Танабэ, изложенным в [20, глава 9]. В силу (iii), гладкости оператора H и вектор-функции h все условия теорем 9.4, 9.6 и 9.7 в [20] выполнены. Поэтому если $u_0^1 \in \mathcal{U}_M^1$, то при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u^1 = u^1(t)$, $t \in [0, T)$ уравнения (12) такое, что $u^1(t) \rightarrow u_0^1$ при $t \rightarrow 0+$ в топологии \mathcal{U}_M^1 .

Итак, решение задачи (3), (4) в данном случае будет иметь вид $u = u^1 + \delta(u^1) + u_0^{01}$, и это решение будет квазистационарной полутраекторией по построению. \square

Замечание 6. Для любой квазистационарной полутраектории уравнения (4) соотношение (8) непосредственно вытекает из первого уравнения (7).

Замечание 7. Условие (9) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1)} < t^{-1} \text{const}$, не выполняется. В дальнейшем мы собираемся использовать теорему 2 именно в такой ситуации, и потому необходимо сделать некоторые пояснения. Пусть

$\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S . В теореме 2 условие «оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{F})$, вектор-функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{F})$ » дополним условием «оператор $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{U}_\alpha^1)$,» а соотношение (9) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (13)$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [20, глава 9].

Замечание 8. Пусть выполнены условия теоремы 2 (возможно, с учетом замечания 7). Построим плоскость $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{U}_M : (I - P_R)(I - P)u = u_0^{01}\}$ и множество $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : P_R((I - P)u + G(u) + g(t)) = 0\}$. По условию теоремы их пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, так как содержит по крайней мере точку u_0 . Более того, существует \mathcal{C}^∞ -диффеоморфизм $I + \delta$, отображающий окрестность $\mathcal{O}_{u_0^1}$ на некоторую окрестность $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. Следовательно, в качестве начального значения можно брать не только точку u_0 , но и любую из некоторой ее окрестности \mathcal{O}_{u_0} . Это значит, что \mathcal{O}_{u_0} является частью *расширенного фазового пространства* \mathcal{B}^t уравнения (4).

Теперь пусть \mathcal{U}_k и \mathcal{F}_k — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы $B_k : \text{dom } B_k \rightarrow \mathcal{F}$ линейны и замкнуты с областями определений $\text{dom } B_k$ плотными в \mathcal{U}_k , $k = 1, 2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\text{dom } M = \text{dom } B_1 \times \text{dom } B_2$.

Теорема 3. [21] Пусть операторы B_k сильно (A_k, p_k) -секториальны, $k = 1, 2$; причем $p_1 \geq p_2$. Тогда оператор M сильно (L, p_1) -секториален.

2. Редукция к уравнению соболевского типа

Для того, чтобы редуцировать задачу (1), (2) к задаче (3), (4) введем, следуя [22], [23], пространства \mathbf{H}_σ^2 , \mathbf{H}_π^2 , \mathbf{H}_σ и \mathbf{H}_π . Здесь \mathbf{H}_σ^2 и \mathbf{H}_π^2 — подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(\Omega))^n \cap (W_2^1(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а \mathbf{H}_π^2 и \mathbf{H}_π — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Через Σ обозначим ортопроектор на \mathbf{H}_σ , причем его сужение на пространство $(W_2^2(\Omega))^n \cap (W_2^1(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$.

Формулой $A = \nabla^2 E_n : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n , зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \mathbf{v} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B : \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbf{H}_\sigma^2$.

Положим $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}_\sigma^2 \cap \mathbf{H}_\pi^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1, K}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \bigoplus_{i=0}^K \mathcal{U}_{1i}$, $\mathcal{F}_1 = \bigoplus_{i=0}^K \mathcal{F}_{1i}$. Оператор $A_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ определим формулой $A_1 = \text{diag} [\hat{A}_1, E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix};$$

Оператор $B_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ положим равным оператору \tilde{M} (см. формулу (14) в [23]).

Замечание 9. Пространства \mathcal{U}_1 и \mathcal{F}_1 определяются точно также, как пространства \mathcal{U} и \mathcal{F} в модели [23]. Оператор A_1 определяется точно так же, как оператор L в [23].

Замечание 10. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на \mathbf{H}_σ^2 . По теореме Солонникова-Воровича-Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Теорема 4. (i) Операторы $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$, и, если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, то оператор A_1 — бирасщепляющий, $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_K$, $\text{im } A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_{11} \times \mathcal{F}_{12} \times \dots \times \mathcal{F}_{1K}$.

(ii) Если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор B_1 $(A_1, 1)$ -ограничен.

Замечание 11. Доказательство теоремы 4 приведено в [9], только в другой терминологии. Впервые понятие относительно ограниченного оператора введено в [24]. Случай относительно секториального оператора рассматривался в [8, 25, 26].

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \kappa \nabla^2 : \text{dom } B_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2 , $\text{dom } B_2 = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$. Если оператор A_2 положить равным I , то в силу секториальности оператора B_2 [27, гл. 1] справедлива

Теорема 5. Оператор B_2 сильно A_2 -секториален.

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства \mathcal{U} имеет вид $u = \text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_K, u_\theta)$, где $\text{col}(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \dots, w_K) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \bar{p}$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \text{dom } M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\text{dom } M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$.

Из теоремы 4 и замечания 2.1.1 [4] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$ -секториален. В силу этого и теорем 3, 5 справедлива

Теорема 6. Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, тогда оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.

Перейдем к построению нелинейного оператора F . В данном случае его удобно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \text{col}(-\Sigma((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta), -\Pi((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + g\gamma u_\theta), \underbrace{0, \dots, 0}_{K+1})$,

а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma + u_\pi) \cdot (\gamma - \nabla u_\theta)$.

Далее, в нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \text{dom } B_2$ (в силу непрерывности оператора B_1). Используя стандартную технику (см., например, [17, 18]), нетрудно показать, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Аналогично устанавливается, что вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в \mathcal{F} , а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. Оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Вектор-функцию f представим в виде $f = f_1 \otimes f_2$, где $f_1 = \text{col}(\Sigma f, \Pi f, \underbrace{0, \dots, 0}_{K+1})$, $f_2 = 0$.

Будем предполагать, что $f \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{F})$. Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) закончена. В дальнейшем всюду отождествляем задачи (1), (2) и (3), (4).

3. Расширенное фазовое пространство и квазистационарные полутраектории

Теперь перейдем к проверке выполнения условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и соответствующих результатов [12] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (4), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \otimes W^t$, где $V^t (W^t)$ – сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1 (\mathcal{U}_2)$. Поскольку оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, что влечет за собой $\mathcal{W}^0 = \{0\}$ и $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и цитируемой монографии [12] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \dots \times \{0\} (= \ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1} [\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K+1}$. Здесь $A_\lambda = I - \lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ – сужение оператора PA_λ^{-1} на \mathbf{H}_π . Известно, что

если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$ – топологический изоморфизм (см., например, [9]). Обозначим через \mathcal{U}_1^1 образ \mathcal{V}^1 . Тогда пространство \mathcal{U}_1 разлагается в прямую сумму подпространств: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10} (B_{10})$ – сужение оператора $A_1 (B_1)$ на $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6 и соответствующих результатов [12]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в [22] показано, что $\text{im } R = \mathcal{U}_1^{00}$. Значит, оператор R – бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на \mathcal{U}_1^{00} вдоль \mathcal{U}_1^{01} . В силу конструкции пространства \mathcal{U}_M проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}) (= \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R – бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.

Введем в рассмотрение проекторы $P_k, Q_k, k = 0, 1$, определенные формулами (17), (18) в [23]. Из результатов [23] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O, Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I, P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^1, Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1$. Применяя проектор $I - P$ к уравнению (4) в данной транскрипции, получаем

$$\begin{aligned} & \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 \mathbf{w}_{m,q} - u_p - g\gamma u_\theta + f(t)) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$B u_\pi = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 1 и свойств оператора B , получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$. Другими словами, все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$. А так как $\Pi u_p = u_p$, то из первого уравнения (14) получаем соотношение (7) в нашей транскрипции

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla) u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) + \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 \mathbf{w}_{m,q} - g\gamma u_\theta + f(t)). \tag{15}$$

Очевидно, $P_0 \equiv P_R$, поэтому второе уравнение (14) есть соотношение (8) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. В условиях леммы 1 любое решение задачи (3), (4) лежит во множестве

$$\mathcal{A}^t = \{(u, t) : u \in \mathcal{U}_M, t \in \mathbb{R}_+, u_\pi = 0, u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - ((\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) \cdot \nabla) u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)(\tilde{u}_\sigma + \tilde{u}_\pi) +$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 \mathbf{w}_{m,q} - g\gamma u_\theta + f_\pi(t).$$

Замечание 12. Из (15) сразу следует условие (ii) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00} (\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому ввиду замечания 8 множество \mathcal{A}^t — простое банахово многообразие \mathcal{C}^∞ -диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ — является кандидатом на роль расширенного фазового пространства задачи (1), (2).

Приступим к проверке условий (9) и (13). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times W_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на \mathcal{U}_1^1 , где V_1^t — сужение оператора V^t на \mathcal{U}_1^1 . Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению) и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1; \mathcal{U}_M^1)} dt \leq \text{const} \|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \quad (16)$$

Далее, в силу неравенства Соболева [20, гл.9] полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\text{dom } B_2; W_2^1(\Omega))} dt < \infty. \quad (17)$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (16) и (17) вытекает

Лемма 3. В условиях леммы 1 выполняется соотношение (9).

И наконец, выполняя требование (13), найдем оператор H и вектор-функцию h . Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} — сужение оператора A_1 на \mathcal{U}_1^1). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, показывается аналогично тому, как было показано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$. Вектор-функцию $h(t)$ определим как $h = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)f$. Определение операторов Q_0 и Q_1 см. в [23]. В силу бесконечной гладкости f $h \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathcal{U}_\alpha^1)$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда при любом $u_0 \in \mathcal{A}^0$ и некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u(t) \in \mathcal{C}^\infty((0, T); \mathcal{U}_M)$ задачи (1), (2), являющееся квазистационарной полутраекторией

Работа выполнена при поддержке АВЦП Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы), проект № 2.1.1/2301.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.А.Свиридюку за постоянное внимание и интерес к данным исследованиям.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П.Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.
2. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л.Соболева / А.П.Осколков // Записки научн. семина. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31 – 48.

3. Каразеева, Н.А. Об аттракторах и динамических системах, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей / Н.А.Каразеева, А.А.Котсиолис, А.П.Осколков. – Ленинград, 1988. – 58 с. – (Препринт ЛОМИ им. В.А.Стеклова. – Р. 10 – 88).
4. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А.Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47 – 74.
5. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П.Осколков // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1976. – Т. 59. – С. 133 – 177.
6. Осколков, А.П. К теории жидкостей Фойгта / А.П.Осколков // Зап. науч. семинара ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233 – 236.
7. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А.Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1990. – № 12. – С. 65 – 70.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г.А.Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, №5. – С. 216 – 237.
9. Сукачева, Т.Г. Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Т.Г. Сукачева; НовГУ. – Новгород, 2004. – 249 с.
10. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т. Г. Сукачева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №20 (158), вып. 11. – С. 77 – 83.
11. Сукачева, Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вязкоупругой жидкости высокого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестн. ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – № 17 (150), вып. 3. – С. 86 – 93.
12. Sviridyuk, G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 179 p.
13. Сукачева, Т.Г. Задача термоконвекции для линеаризованной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости / Т.Г.Сукачева // Вестн. ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование». – Челябинск, 2010. – №16 (192), вып. 5. – С. 83 – 93.
14. Сукачева, Т.Г. Задача термоконвекции для линеаризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка / Т.Г.Сукачева // Вестн. ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование». – Челябинск, 2011. – №37 (254), вып. 10. – С. 40 – 53.
15. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192 – 207.
16. Levine, H.A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V.51, №5. – Р. 371 – 386.
17. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т.31, №5. – С. 109 – 119.
18. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26, №2. – С. 250 – 258.

19. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т.32, №4. – С. 3 – 54.
20. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
21. Бокарева, Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Бокарева Т.А.; РГПУ им. А.И.Герцена. – СПб., 1993. – 107 с.
22. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А.Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1994, №1. – С.62 – 70.
23. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Изв. вузов. Матем. – 1998. – №3(430). – С. 47 – 54.
24. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1991. – Т. 18, № 4. – С. 828 – 831.
25. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами / Г.А. Свиридюк // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329, №3. – С. 274 – 277.
26. Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36, №5. – С. 1130 – 1145.
27. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Тамара Геннадьевна Сукачева, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и геометрии, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Российская Федерация), tamara.sukacheva@novsu.ru.

The Generalized Linearized Model of Incompressible Viscoelastic Fluid of Nonzero Order

T.G. Sukacheva, Novgorod State University (Velikiy Novgorod, Russian Federation)

In the frames of the non-autonomous sobolev type equations The Cauchy – Dirichlet problem for the generalized linearized Oskolkov’s system modeling thermoconvection of the incompressible viscoelastic fluid of the nonzero order is considered. The theorem of the existence of the unique solution of this problem is proved and the description of its extended phase space is received.

Keywords: Sobolev type equation, an incompressible viscoelastic fluid, Oskolkov models, extended phase space.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-boundary Value Problems for Equations of Motion Kelvin-Voight and Oldroyd Fluids [Nachal’no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniya zhidkostey Kel’vina-Foygta i zhidkostey Oldroyta]. *Trudy Mat. In-ta AN SSSR*, 1988, no. 179, pp. 126 – 164.
2. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for One Class of Nonlinear Operator Equations That Arise in the Theory of Sobolev Type Equations. *J. of Mathematical Sciences*, 1993, vol. 64, no.1, pp. 724 – 735.

3. Karazeeva N.A., Kotsiolis A.A., Oskolkov A.P. *Ob attraktorakh i dinamicheskikh sistemakh, porozhdaemykh nachal'no-kraevymi zadachami dlya uravneniy dvizheniya lineynykh vyazkoprugikh zhidkostey* [On Attractors and Dynamical Systems Generated by the Initial-boundary Value Problems for Equations of Motion Linear Viscoelastic Fluids]. Sankt-Peterburg, 1988. 58 p.
4. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russ. Math. Surv.*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45 – 74.
5. Oskolkov A.P. Some Quasilinear Systems Occurring in the Study of the Motion of Viscous Fluids. *J. of Mathematical Sciences*, 1978, vol. 9, no. 5, pp. 765 – 790.
6. Oskolkov A.P. Theory of Voight Fluids. *J. of Mathematical Sciences*, 1983, vol. 21, no. 5, pp. 818 – 821.
7. Sviridyuk G.A. Solubility of the Thermal Convection of Viscoelastic Incompressible Fluid [Razreshimost' zadachi termokonveksii vyazkoprugoy neszhimaemoy zhidkosti]. *Russian Mathematics*, 1990, no. 12, pp. 65 – 70.
8. Sviridyuk G.A. Phase Spaces of Semilinear Sobolev Type Equations with Relatively Strong Sectorial Operator [Fazovye prostranstva polulineynykh uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sil'no sektorial'nym operatorom]. *St. Petersburg Mathematical J.*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 216 – 237.
9. Sukacheva T.G. The Study of Mathematical Models of Incompressible Viscoelastic Fluids: dis. Dr. Science [Issledovanie matematicheskikh modeley neszhimaemykh vyazkoprugikh zhidkostey: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk]. Velikiy Novgorod, 2004. 249 p.
10. Sukacheva T.G. Unsteady Linearized Model of the Motion of an Incompressible Viscoelastic Fluid [Nestatsionarnaya linearizovannaya model' dvizheniya neszhimaemoy vyazkoprugoy zhidkosti]. *Vestn. Chelyab. gos. un-ta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2009, no. 20 (158), issue 11, pp. 77 – 83.
11. Sukacheva T.G. Unsteady Linearized Model of the Motion of an Incompressible Viscoelastic Fluid of the High Order [Nestatsionarnaya linearizovannaya model' dvizheniya neszhimaemoy vyazkoprugoy zhidkosti vysokogo poryadka]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2009, no. 17 (150), issue 3, pp. 86 – 93.
12. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003. 179 p.
13. Sukacheva T.G. The Problem of Thermal Convection for a Linearized Model of the Motion of an Incompressible Viscoelastic Fluid [Zadacha termokonveksii dlya linearizovannoy modeli dvizheniya neszhimaemoy vyazkoprugoy zhidkosti]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 83 – 93.
14. Sukacheva T.G. The Problem of Thermal Convection for the Linearized Model of the Motion of an Incompressible Viscoelastic Fluid [Zadacha termokonveksii dlya linearizovannoy modeli neszhimaemoy vyazkoprugoy zhidkosti nenulevogo poryadka]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 40 – 53.
15. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Izvestiya: Mathematics*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601 – 614.
16. Levine H.A. Some Nonexistence and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of the Form $Du_t = -Au + F(u)$. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1973, vol. 51, no. 5, pp. 371 – 386.

17. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy Problem for a Class of Semilinear Equations of Sobolev Type. *Siberian Mathematical J.*, 1990, vol. 31, no. 5, pp. 794 – 802.
18. Sviridyuk G.A. The Phase Space of a Class of Operator Equations [Fazovye prostranstva odnogo klassa operatornykh uravneniy]. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250 – 258.
19. Borisovich Yu.G., Zvyagin V.G., Saponov Yu.I. Non-linear Fredholm Maps and Leray-Schauder Theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 1 – 55.
20. Marsden Dzh., Mak-Kraken M. *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [Hopf Bifurcation and Its Applications]. Moscow, Mir, 1980. 368 p.
21. Bokareva T.A. Investigation of Phase Space of Sobolev Type Equations with Relatively Sectorial Operators: Dis. cand. Science [Issledovanie fazovykh prostranstv uravneniy tipa Soboleva s otnositel'no sektorial'nymi operatorami: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk]. Sankt-Peterburg, 1993. 107 p.
22. Sviridyuk G.A. A Model of Weakly Viscoelastic Fluid [Ob odnoy modeli slaboszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti]. *Russian Mathematics*, 1994, no. 1, pp. 62 – 70.
23. Sukacheva T.G. On the Solvability of a Nonstationary Problem of the Dynamics of Incompressible Viscoelastic Kelvin – Voight Fluid of Nonzero Order [O razreshimosti nestatsionarnoy zadachi dinamiki neszhimaemoy vyazkouprugoy zhidkosti Kel'vina – Foygta nenulevogo poryadka]. *Russian Mathematics*, 1998, no. 3 (430), pp. 47 – 54.
24. Sviridyuk G.A. Semilinear Sobolev Type Equation with Relatively Bounded Operator [Polulineynye uravneniya tipa Soboleva s otnositel'no ogranichennym operatorom]. *DAN SSSR*, 1991, vol. 18, no. 4, pp. 828 – 831.
25. Sviridyuk G.A. Semilinear Sobolev Type Equations with Relatively Sectorial Operators [Polulineynye uravneniya tipa Soboleva s otnositel'no sektorial'nymi operatorami]. *Dokl. RAN*, 1993, vol. 329, no. 3, pp. 274 – 277.
26. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. On the Identities of Analytic Semigroups of Operators with Kernels. *Siberian Mathematical J.*, 1998, vol. 39, no. 3, pp. 522 – 533.
27. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Math.* Berlin; Heidelberg; N.Y., Springer Verlag, 1981. 840 p.

Поступила в редакцию 17 ноября 2011 г.