УДК 517.9

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО СЕКТОРИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

О.А. Рузакова, Е.А. Олейник

В работе исследуется вопрос ε-управляемости линейных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной по времени $L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T$. Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, а оператор M сильно (L,p)-секториален. Данные условия гарантируют существование аналитической в секторе разрешающей полугруппы однородного уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$. С помощью теории вырожденных полугрупп операторов с ядрами исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений: регулярного, т.е. разрешенного относительно производной (на образе разрешающей полугруппы однородного уравнения) и сингулярного (на ядре полугруппы) с нильпотентным оператором при производной. Используя результаты об ε-управляемости регулярного и сингулярного уравнений, получен критерий ε-управляемости исходного уравнения соболевского типа с относительно p-секториальным оператором в терминах операторов, входящих в уравнение. Абстрактные результаты использованы при исследовании ε-управляемости конкретной начально-краевой задачи, которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода.

Ключевые слова: относительно p-секториальные операторы, управляемость.

Введение

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (т. е. линейный непрерывный), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (т. е. линейный замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{X}$), $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{1}$$

для уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T. \tag{2}$$

Основной целью данной работы является исследование ε-управляемости уравнения (2) при условии, что оператор M сильно (L,p)-секториален [1]. Данные условия гарантируют существование аналитической в секторе разрешающей полугруппы однородного уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$.

Уравнения вида (2), называемые уравнениями соболевского типа, все чаще привлекают внимание исследователей [2, 3]. При этом в приложениях часто вместо условия Коши (1) рассматривают обобщенное условие Шоуолтера–Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0, \tag{3}$$

где P – проектор, являющийся единицей полугруппы операторов.

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (2) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = Sx(t) + L^{-1}Bu(t) \tag{4}$$

на пространстве $\mathfrak{X}$. Обзор результатов об ε-управляемости уравнения (4) см. [4].

Отметим, что управляемость уравнения (2) в случае, когда $\ker L \neq \{0\}$, изучалась ранее В.Е. Федоровым и О.А. Рузаковой в предположении (L,σ)-ограниченности оператора M и сильной (L,p)-радиальности оператора M в работах [5 – 7]. Используя данные результаты, мы формулируем критерий ε-управляемости уравнения (2) для случая сильной (L,p)-секториальности оператора M, что позволяет исследовать вопрос об ε-управляемости начально–краевой задачи для системы уравнений фазового поля.

1. Относительно p-секториальные операторы и сильные решения

Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты, доказательства которых можно найти в [1, 2].

Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{X}$, действующих в $\mathfrak{Y}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{X})$ обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что операторы $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Обозначим $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$, $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$, $R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^p R^L_{\mu_k}(M)$, $L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^p L^L_{\mu_k}(M)$, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+=\{a\in\mathbb{R}:a>0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

Определение 1. *Оператор M называется сильно (L,p)-секториальным, $p\in\mathbb{N}_0$, если*

(i) *существуют константы $a\in\mathbb{R}$ и $\Theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ такие, что сектор*

$$S^L_{a,\Theta}(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a)|<\Theta,\mu\neq a\}\subset\rho^L(M);$$

(ii) *существует константа $K\in\mathbb{R}_+$ такая, что*

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})},\|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\right\}\leq\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|}$$

при любых $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p\in S^L_{a,\Theta}(M)$;

(iii) *для всех $\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p\in S^L_{a,\Theta}(M)$*

$$\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\right\|_{\mathfrak{X}}\leq\frac{K}{|\lambda-a|\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|};$$

(iv) *существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что*

$$\left\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)y\right\|_{\mathfrak{Y}}\leq\frac{\mathrm{const}(y)}{|\lambda-a|\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|}\quad\forall y\in\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$$

при любых $\lambda,\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p\in S^L_{a,\Theta}(M)$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*

(i) $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^0\oplus\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}^0\oplus\mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $\mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$;

(iv) *существует аналитическая в секторе полугруппа* $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\,\dot{x}\,(t) = Mx(t)$;

(v) *инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы* $\{X_1^t = X^t\Big|_{\mathfrak{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *является оператор* $S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^1)$;

(vi) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* p.

Через P (Q) обозначим проектор вдоль $\mathfrak{X}^0$ ($\mathfrak{Y}^0$) на $\mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y}^1$).

При заданной функции $f : (0,T) \to \mathfrak{Y}$ рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

и задачу Шоуолтера-Сидорова

$$P(x(0) - x_0) = 0 \tag{6}$$

для уравнения

$$L\,\dot{x}\,(t) = Mx(t) + f(t), \quad 0 < t < T. \tag{7}$$

Определение 2. *Сильным решением задачи* (5), (7), ((6), (7)) *назовем вектор-функцию* $x \in W_q^1(\mathfrak{X})$, *если она удовлетворяет условию* (5), ((6)) *и почти всюду на интервале* $(0,T)$ *удовлетворяет уравнению* (7).

Существование и единственность сильного решения задач доказаны в [8],[9].

Теорема 2. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален,* $f \in W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$

$$x_0 \in \mathcal{P}_x = \left\{ x \in \mathrm{dom}M : (I-P)x = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)f^{(k)}(0) \right\}.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (5), (7), *имеющее вид*

$$x(t) = X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t). \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-секториален,* $y \in W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0 \in \mathrm{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1}L_1$. *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (6), (7), *имеющее вид* (8).

2. ε-управляемость

Будем следовать результатам, изложенным в [6]. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \mathbb{N}_0$, а функции управления $u(t)$ принадлежат $V(T) = W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $x_0 \in \mathcal{P}_x$ теоремы 2 о разрешимости задачи Коши (в случае задачи Шоуолтера–Сидорова $x_0 \in \mathrm{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1}L_1$). Множество функций управления из $V(T)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим $V_{x_0}(T)$. Рассмотрим сначала задачу Коши (1), (2).

В силу теоремы 1 задача (1), (2) редуцируется к системе двух задач:

$$\dot{x}^1\,(t) = S_1x^1(t) + L_1^{-1}QBu(t), \quad x^1(0) = Px_0 = x_0^1 \tag{9}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^1$,

$$H\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)Bu(t), \quad x^0(0) = (I-P)x_0 = x_0^0 \tag{10}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^0$. При этом первые два слагаемых в формуле (8) дают решение задачи (9), а выражение

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)Bu^{(k)}(t)$$

задает решение задачи (10) при выполнении условия согласования.

Говоря об управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T;x_0;u(t))$ обозначать значение в момент времени T решения задачи (1), (2) с начальным значением x_0 и функцией управления $u(t)$.

Определение 3. *Система* (2) *называется ε-управляемой за время T, если для любых точек $x_0 \in \mathrm{domM}$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u(t) \in V_{x_0}(T) \neq \emptyset$ такое, что $\|x(T;x_0;u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.*

Аналогично результатам [6] справедлива

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Система* (2) *ε-управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{imX^sL_1^{-1}QB}, 0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{T}\} = \mathfrak{X}^1 \quad (\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{imX^TL_1^{-1}QB}, \mathrm{T} \geq 0\} = \mathfrak{X}^1),$$

$$\mathrm{span}\{\mathrm{imH^kM_0^{-1}(I-Q)B}, \mathrm{k} = \overline{0,\mathrm{p}}\} = \mathrm{domM_0}.$$

3. Начально-краевая задача для системы уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\theta(x,0) + \varphi_1(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \tag{13}$$

для системы уравнений

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x,t) = \Delta\theta(x,t) + u_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{14}$$

$$\Delta\varphi_1(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\varphi_j(x,t) + \theta(x,t) + u_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{15}$$

$$\Delta\varphi_i(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\varphi_j(x,t) + u_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad i = \overline{2,m}, \tag{16}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [10, 11]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,m}$. Искомыми функциями являются $\theta(x,t)$, $\varphi_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$.

Редуцируем задачу (11) – (16) к задаче (1), (2). Сначала сделаем замены $\theta(x,t) + \varphi_1(x,t) = v(x,t)$, $\varphi_i(x,t) = w_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$. Тогда задача примет вид

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + \lambda v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{18}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial n}(x,t) + \lambda w_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \tag{19}$$

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w_1(x,t) + u_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{20}$$

$$\Delta w_1(x,t) + (\alpha_{11} - 1)w_1(x,t) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} w_j(x,t) + v(x,t) + u_1(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{21}$$

$$\Delta w_i(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j(x,t) + u_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad i = \overline{2,m}. \tag{22}$$

Возьмем $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{U} = (L_2(\Omega))^{m+1}$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{11} - 1 + \Delta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} + \Delta & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} + \Delta \end{pmatrix},$$

$\mathrm{dom} M = \{(v, w_1, \dots, w_m) \in (H^2(\Omega))^{m+1} : \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right)v(x) = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right)w_i(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, i = \overline{1,m}\}$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X})$, причем $\ker L = \{0\} \times (L_2(\Omega))^m$.

Обозначим

$$\tilde{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} \lambda_k & -\lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{11} - 1 + \lambda_k & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} + \lambda_k & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} + \lambda_k \end{pmatrix},$$

$Az = \Delta z$, $\mathrm{dom} A = H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : \frac{\partial z}{\partial n}(x) + \lambda z(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\}$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Кроме того, введем в рассмотрение оператор $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, задаваемый матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Согласно результатам [12] справедлива

Теорема 5. *Пусть $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-секториален.*

Теорема 6. *Если $\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$, то задача (17)–(22) ε-управляема.*

Доказательство. Действительно,

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} \end{pmatrix},$$

где Λ^k – матрица $\tilde{\Lambda}^k$ с вычеркнутыми первой строкой и первым столбцом, $\Lambda^k_{i,j}$ – матрица Λ^k с вычеркнутыми первой и i-й строками и первым и j-м столбцом, $i, j = \overline{2, m+1}$. Условие из теоремы 4

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im}\mathrm{H}^{\mathrm{k}}\mathrm{M}_0^{-1}(\mathrm{I}-\mathrm{Q})\mathrm{B},\ \mathrm{k}=\overline{0,\mathrm{p}}\} = \mathrm{dom}\mathrm{M}_0$$

имеет вид

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{3,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{m+1,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} \end{pmatrix}\right\} = (\mathrm{H}^2(\Omega))^{\mathrm{m}}.$$

Оператор $L_1^{-1} = I : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, тогда условие

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}\mathrm{X}^{\mathrm{s}}\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{Q}\mathrm{B},\ 0 \le \mathrm{s} \le \mathrm{T}\} = \mathfrak{X}^1$$

при $s = 0$ принимает вид $\overline{\mathrm{im}\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{Q}\mathrm{B}} = L_2(\Omega)$, следовательно, так же выполняется.

По теореме 4 получаем требуемое. □

Авторы выражают искреннюю благодарность и признательность Георгию Анатольевичу Свиридюку за проявленный интерес к работе.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Deriative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Шолохович, Ф.А. Об управляемости линейных динамических систем / Ф.А. Шолохович // Изв. УрГУ. – 1998. – № 10, вып. 1. – С. 103 – 126.
5. Федоров, В.Е. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1137 – 1139.

6. Федоров, В.Е. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74, № 4. – С. 618 – 628.
7. Федоров, В.Е. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 7. – С. 54 – 57.
8. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912 – 1919.
9. Федоров, В.Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Мат. сб. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131 – 160.
10. Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 651 – 669.
11. Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 3. – С. 461 – 471.
12. Федоров, В.Е. Ограниченные решения линеаризованной системы уравнений фазового поля / В.Е. Федоров, М.А. Сагадеева // Неклассические уравнения математической физики: тр. семинара, посвящ. 60-летию проф. В.Н.Врагова / отв. ред. А.И. Кожанов; Рос. Акад. наук, Сиб. отд-ние, ин-т математики им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2005. – С. 275 – 284.

Ольга Александровна Рузакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), oruzakova@gmail.com.

Екатерина Андреевна Олейник, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), oleynik.katerina@mail.ru.

On the Controllability of Linear Sobolev Type Equations with Relatively Sectorial Operator

O.A. Ruzakova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
E.A. Oleynik, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

ε-controllability of linear first order differential equations not resolved with respect to the time derivative $L\,\dot{x}\,(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T$ are studied. It is assumed that $\ker L \neq \{0\}$ and the operator M is strongly (L,p)-sectorial. These conditions guarantee the existence of an analytic semigroup in the sector of the resolution of the homogeneous equation $L\,\dot{x}\,(t) = Mx(t)$. Using the theory of degenerate semigroups of operators with kernels the original equation is reduced to a system of two equations: regular, i.e. solved for the derivative (on the image of the semigroup of the homogeneous equation) and the singular (on the kernel of the semigroup) with a nilpotent operator at the derivative. Using the results of ε-controllability of the regular and singular equations, necessary and sufficient conditions of ε-controllability of the original equation of Sobolev type with respect to p-sectorial operator in terms of the operators are obtained. Abstract results are applied to the study of ε-controllability of a particular boundary-value problem, which is the linearization at zero phase–field equations describing the theory in the framework of mesoscopic phase transition.

Keywords: relatively p-sectorial operators, controllability.

References

1. Sviridyuk, G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45 – 74.
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003.
3. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest – Order Deriative.* N. Y.; Basel; Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Sholohovich F.A. On the Controllability of Linear Dynamical Systems [Ob upravlyaemosti lineynykh dinamicheskikh sistem]. *Izvestie UrGU*, 1998, no. 10, issue 1, pp. 103 – 126.
5. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. One-dimensional Controllability of Sobolev Linear Equations in Hilbert Spaces. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1216 – 1218.
6. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. Controllability in Dimensions of One and Two of Sobolev-type Equations in Banach Spaces. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 583 – 592.
7. Fedorov V.E., Ruzakova O.A. Controllability of Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-radial Operators. *Russian Mathematics*, 2002, no. 7, pp. 52 – 55.
8. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1882 – 1890.
9. Fedorov V.E. Holomorphic Solution Semigroups for Sobolev Type Equations in Locally Convex Spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 8, pp. 1205 – 1234.
10. Plotnikov P.I., Klepacheva A.V. Phase-field Equations and Gradient Flows of Marginal Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 3, pp. 551 – 567.
11. Plotnikov P.I., Starovoytov V.N. Stefan Problem with Surface Tension as the Limit of the Phase-field Model. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 3, pp. 395 – 404.
12. Fedorov V.E., Sagadeeva M.A. Bounded Solutions of the Linearized System of Phase Field [Ogranichennye resheniya linearizovannoy sistemy uravneniy fazovogo polya]. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki: tr. seminara, posvyashch. 60-letiyu prof. V.N. Vragova, Ros. Akad. nauk, Sib. otd-nie, in-t matematiki im. S.L. Soboleva.* Novosibirsk, 2005, pp. 275 – 284.

Поступила в редакцию 15 ноября 2011 г.