УДК 517.9

МНОГОТОЧЕЧНАЯ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

С.А. Загребина

Статья посвящена изучению однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа. Доказана обобщенная теорема о расщеплении пространств и действий операторов. Полученные абстрактные результаты реализованы в конкретной ситуации.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, многоточечная начально-конечная задача, относительно p-ограниченные операторы, линейная модель Хоффа.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 + f, \tag{0.1}$$

которое моделирует выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой при высоких температурах. Функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение балки от положения $u = 0$; параметры α, $\beta \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризует нагрузку. Начально-краевые задачи для уравнения (0.1) в области $\Omega \times \mathbb{R}$ впервые были изучены Н.А. Сидоровым [2] и его учениками [3, 4], причем в [3, 4] был отмечен феномен несуществования решений этих задач при произвольных начальных данных. Изучение множества начальных значений, обеспечивающих существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения (0.1), было проведено в [5]. В [6] показано, что это множество, понимаемое как фазовое пространство уравнения (0.1), является простым банаховым C^∞-многообразием, если $\alpha \cdot \beta > 0$. В [7] показано, что если $\alpha \cdot \beta < 0$, то фазовое пространство уравнения (0.1) уже не будет простым – оно лежит на сборке Уитни. Первым уравнения Хоффа на графе начал изучать Г.А. Свиридюк совместно с В.В. Шеметовой [8]. Им удалось дать полное описание фазового пространства на геометрическом графе. В дальнейшем на графах была решена обратная задача для уравнения Хоффа [9]. Кроме того, были проведены исследования устойчивости уравнений Хоффа на графе и получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений уравнений Хоффа в области и на геометрическом графе [10].

В настоящее время внимание многих исследователей привлекает линейная модель Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + f. \tag{0.2}$$

Интерес к линейным уравнениям соболевского типа (к которым безусловно относится уравнение (0.2)) инспирирован новым классом задач, к обсуждению которых мы переходим. Прежде всего в подходящих функциональных пространствах редуцируем (0.2) к абстрактному линейному уравнению соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{0.3}$$

как это делается, например, в [11]. Затем в предположении, что свободный член $f = f(t)$ определен на интервале (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, будем искать (классическое) решение уравнения (0.3), удовлетворяющее следующим условиям

$$P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \ j = \overline{0, n}, \tag{0.4}$$

$a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b$, P_j – *относительно спектральные проекторы* (речь о них пойдет в п.1 настоящей статьи), а u_j – произвольные векторы из банахова пространства $\mathfrak{U}$. Заметим, что если $n = 1$, то (0.4) превратится в более простую задачу

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = P_1(u(\tau_1) - u_1) = 0, \tag{0.5}$$

которая в [12] названа *начально-конечной*. Задача (0.3), (0.5) в последнее время весьма активно изучается в различных аспектах [13 – 16]. Если же в (0.4) положить $n = 0$, то задача (0.4) редуцируется к *обобщенной задаче Шоуолтера – Сидорова*

$$P_0(u(\tau_0) - u_0) = 0, \tag{0.6}$$

которая уже сыграла важную роль в численных исследованиях экономических [17] и технических [18] моделей. Отметим еще, что задача (0.6) является обобщением классической задачи Коши $u(\tau_0) = u_0$. Сказанное выше позволяет задачу (0.4) для уравнения (0.3) назвать *многоточечной начально-конечной задачей* и считать ее последовательным (через (0.5) и (0.6)) обобщением задачи Коши.

Данная статья посвящена изучению разрешимости задачи (0.3), (0.4) при любом $n \in \mathbb{N}$ и приложению полученных абстрактных результатов к многоточечной начально-конечной задаче для линейной модели Хоффа (0.2). Кроме введения и списка литературы статья содержит три части. В первой обсуждаются относительно спектральные проекторы, вторая посвящена задаче (0.3), (0.4), а третья часть содержит приложения к уравнению (0.2). Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия автора.

Наконец, заметим, что все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако, при рассмотрении «спектральных вопросов» вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированны движением против часовой стрелки и ограничивают области, лежащие слева при таком движении. Символами $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ обозначены соответственно «нулевой» и «единичный» операторы, области определения которых ясны из контекста.

1. Относительно спектральные проекторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M ([11], п.2.1). Пусть $\sigma^L(M) = \sigma_0^L(M) \cup \sigma_1^L(M)$, причем

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1^L(M) \neq \emptyset, \ \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \ \text{ограничивающий область } D \supset \sigma_1^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset. \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Построим интегралы *типа Ф. Рисса* (понимаемые в смысле Римана)

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} L_\mu^L(M) d\mu, \tag{1.2}$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ — *правая*, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$— *левая L-резольвенты* оператора M.

Лемма 1. *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma^L_0(M) \cup \sigma^L_1(M)$, причем выполнено (1.1). Тогда операторы $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ – проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \mathrm{im}P(\mathrm{im}Q)$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда*
(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$;
(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Как известно, оба этих утверждения первым сформулировал и доказал Г.А. Свиридюк, правда, при более ограничительном условии, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^L(M) \neq \emptyset, \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область } D \supset \sigma^L(M). \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Однако внимательный анализ его доказательств (см. [11], лемма 4.1.1 и теорема 4.1.1) показывает, что они годятся и в нашем случае.

$$\left.\begin{array}{c} \text{Пусть } \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma^L_j(M),\ n \in \mathbb{N}, \text{ причем } \sigma^L_j(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \Gamma_j \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma^L_j(M), \text{ такой, что} \\ \overline{D_j} \cap \sigma^L_0(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Аналогично (1.2) построим интегралы

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} L^L_\mu(M)d\mu, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (1.4). Тогда операторы*
(i) $P_j : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ и $Q_j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ – проекторы, $j = \overline{1,n}$;
(ii) $P_kP_l = \mathbb{O}$, $Q_kQ_l = \mathbb{O}$, $k,\ l = \overline{1,n}$, $k \neq l$.

Доказательство. Утверждение (i) справедливо в силу леммы 1. Докажем (ii).

$$P_kP_l = (2\pi i)^{-2}\int\limits_{\Gamma_k}\int\limits_{\Gamma_l} R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M)d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2}\left(\int\limits_{\Gamma_k}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\Gamma_l} R^L_\mu(M)d\mu + \int\limits_{\Gamma_k} R^L_\lambda(M)d\lambda\int\limits_{\Gamma_l}\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right) = \mathbb{O}$$

в силу теоремы о вычетах и *правого L-резольвентного тождества*

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M) \tag{1.6}$$

(тождество (2.1.4) [11]). □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (1.3) и (1.4). Тогда операторы* $P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$ *и* $Q_0 = Q - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$ *– проекторы.*

(Заметим, что здесь ради экономии места проекторы P_j и Q_j, $j = \overline{1,n}$, из (1.5), а проекторы P и Q из (1.2), но с заменой условия (1.1) на условие (1.3)).

Доказательство. Достаточно показать, что $P_jP = PP_j = P_j$ и $Q_jQ = QQ_j = Q_j$ при всех $j = \overline{1,n}$. Действительно, в силу (1.6)

$$P_jP = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_j} \int\limits_{\Gamma} R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2} \left(\int\limits_{\Gamma_j} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\Gamma} R_\mu^L(M) d\mu + \int\limits_{\Gamma_j} R_\lambda^L(M) d\lambda \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right).$$

Отсюда, в силу теоремы о вычетах, $P_jP = P_j$. Остальные равенства доказываются аналогично. □

Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}_j^1(\mathfrak{F}_j^1) = \mathrm{im} P_j(\mathrm{im} Q_j)$, $j = \overline{0,n}$, через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^0)$, а через L_{1j} (M_{1j}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}_j^1$ $(\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.4). Тогда*
(i) $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;
(ii) $M_0 \in Cl(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;
(iii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_j^1; \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$, *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Доказательство ввиду теоремы 1 и лемм 2, 3 очевидно.

2. Многоточечная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.1}$$

Решением $u = u(t)$ уравнения (2.1) назовем вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 1. Отображение $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назовем *группой разрешающих операторов уравнения (2.1)*, если
(i) $U^tU^s = U^{t+s}$ при всех s, $t \in \mathbb{R}$;
(ii) при всех $v \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u = U^tv$ есть решение уравнения (2.1).

В дальнейшем, следуя традиции, будем отождествлять группу разрешающих операторов уравнения (2.1) с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и в дальнейшем называть просто *группой уравнения (2.1)*. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ уравнения (2.1) будем называть *аналитической*, если она аналитически продолжима во всю комплексную плоскость с сохранением свойства (i).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.4). Тогда существуют аналитические группы уравнения (2.1).*

Доказательство. Построим интегралы *типа Данфорда – Тейлора* (понимаемые в смысле Римана)

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad U^t_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, j=\overline{1,n}.$$

Затем, рассуждая аналогично теореме 4.4.1 [11], получим требуемое. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда*
(i) $U^tU^s_j = U^s_jU^t = U^{t+s}_j$ *при всех* $s,\ t\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$;
(ii) $U^t_kU^s_l = U^s_lU^t_k = \mathbb{O}$ *при всех* $s,\ t\in\mathbb{R}$, $k,\ l=\overline{1,n}$, $k\neq l$.

Доказательство. (i)

$$U^tU^s_j = (2\pi i)^{-2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma_j} R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M)e^{\mu t+\lambda s}d\mu d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2}\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\mu t}d\mu}{\mu-\lambda}\int\limits_{\Gamma_j}R^L_\lambda(M)e^{\lambda s}d\lambda + \int\limits_{\Gamma}R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu\int\limits_{\Gamma_j}\frac{e^{\lambda s}d\lambda}{\mu-\lambda}\right) = U^{s+t}_j$$

в силу теоремы о вычетах и тождества (1.6). Второе равенство в (i) и равенства (ii) доказываются аналогично. □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда* $U^t_0 = U^t - \sum\limits_{j=1}^{n} U^t_j$ *– аналитическая группа уравнения (2.1).*

Доказательство вытекает из следствия 1.

Далее возьмем вектор-функцию $f\in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{2.2}$$

Вектор-функцию $u\in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.2), назовем *решением уравнения* (2.2). Решение $u=u(t)$, $t\in(a,b)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям

$$P_j(u(\tau_j)-u_j) = 0, \quad j=\overline{0,n}, \tag{2.3}$$

назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения* (2.2) (см. (0.4)).

Определение 2. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора* L (короче, (L,p)*-ограниченным*), если выполнено условие (1.3), и точка ∞ является либо устранимой особой точкой ($p=0$), либо полюсом порядка p ($p\in\mathbb{N}$) L-резольвенты $(\mu L-M)^{-1}$ оператора M.

Теорема 4. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен, причем выполнено условие (1.4). Тогда для любых* $f\in C^\infty((a,b);\mathfrak{F}))$, $u_j\in\mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$ *существует единственное решение задачи (2.2), (2.3), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^qM_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^{n}U^{t-\tau_j}_ju_j + \sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t}U^{t-s}_jL^{-1}_{1j}Q_jf(s)ds.$$

Доказательство. Уравнение (2.2) посредством теоремы 2 сведем к системе

$$\begin{aligned} &M_0^{-1}L_0\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f, \\ &\dot{u}^{1j} = L_{1j}^{-1}M_{1j}u^{1j} + L_{1j}^{-1}Q_jf, \quad j=\overline{0,n}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где каждое уравнение определено на «своем» подпространстве. Из первого уравнения (2.4) получим

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^qM_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(q)}(t).$$

Заметив, что проекторы P_j являются единичными операторами на $\mathfrak{U}_j^1$, $j=\overline{0,n}$, в силу (2.3) поставим задачи Коши для остальных уравнений (2.4)

$$\dot{u}^{1j} = L_{1j}^{-1}M_{1j}u^{1j} + L_{1j}^{-1}Q_jf, \quad u^{1j}(\tau_j) = P_ju_j, \quad j=\overline{0,n}. \tag{2.5}$$

Последовательно решая задачи (2.5), получим утверждение теоремы. □

Замечание 1. Из доказательства теоремы 4 видно, что требование гладкости на функцию f можно понизить. Однако при этом понизится гладкость решения (2.2), (2.3).

3. Линейная модель Хоффа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Через $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ обозначим функциональные пространства, определенные на Ω, в которых оператор Лапласа Δ фредгольмов. Например, это могут быть пространства Соболева

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_p^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \text{ и } \mathfrak{F} = W_p^k(\Omega),$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$; или пространства Гельдера

$$\mathfrak{U} = \{u \in C^{k+2+\delta}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x}(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \text{ и } \mathfrak{F} = C^{k+\delta}(\Omega),$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$; или еще какие-нибудь пространства, скажем, с третьим краевым условием. Выбор краевого условия здесь не важен, важно требование его однородности. Другими словами, пусть на границе $\partial\Omega$ будет задано краевое условие

$$Au(x) = 0, \ x \in \partial\Omega. \tag{3.1}$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений задачи (3.1) для оператора Лапласа Δ в области Ω, занумерованную по невозрастанию и с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, причем пространство $\mathfrak{U}$ с условием (3.1), и формулами

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \alpha\mathbb{I} \tag{3.2}$$

зададим операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Как известно (см. например [6]), L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = -\lambda\}\right\}.$$

Выполнение условия (1.3) очевидно, выберем $\sigma_j^L(M)$, $j=\overline{0,n}$, так, чтобы выполнялось условие (1.4) (понятно, что это можно сделать не одним способом). Построим проекторы

$$P_j = \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ j=\overline{0,n}. \tag{3.3}$$

Возьмем $-\infty \le a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b \le +\infty$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$, $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ и рассмотрим задачу (2.2), (2.3), где $\mathfrak{U}$ – функциональное банахово пространство с краевым условием (3.1), операторы L и M из (3.2), а проекторы P_j, $j=\overline{0,n}$, из (3.3).

Лемма 4. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Как и в [5, 6] доказательство основано на теореме 4.6.1 [11].

Отсюда и из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$, $f \in C^\infty((a,b);\mathfrak{F})$ многоточечная начально-конечная задача для уравнения (0.2) с краевым условием (3.1) имеет единственное решение $u \in C^\infty((a,b);\mathfrak{U})$, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = (Q-\mathbb{I})f(t) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau_j)} \langle u_j, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{j=0}^{n} \sum_{\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \int_{\tau_j}^{t} e^{\mu_k(t-s)} \langle f(s), \varphi_k \rangle \varphi_k ds.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе и поздравить его с шестидесятилетием.

Литература

1. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // The Aeronautical Quarterly. – 1956. – V. 7, № 1. – P. 1 – 20.
2. Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982.
3. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, №9.— С. 1516 – 1526.
4. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, № 4.– С. 726 – 728.
5. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН, сер. математическая. – 1993.– Т. 57, № 3.– С. 192 – 207.
6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки.– 2002. – Т. 71, № 2.– С. 292 – 297.
7. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Изв. вузов. Математика.— 2005.— №10.— С. 54 – 60.
8. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравнения.— 2006.— Т. 42, № 1.— С. 126 – 131.

9. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – Самара, 2009. – №1 (18). – С. 6 – 17.
10. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – Самара, 2010.– №1 (15). – С. 6 – 15.
11. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.
12. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, №1. – С. 51 – 72.
13. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – № 15 (115), вып. 1. – С. 23 – 26.
14. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 35 – 39.
15. Манакова Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 113 – 114.
16. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 37 (254), вып. 10. – С. 22 – 29.
17. Келлер, А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А.В. Келлер // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2011. – № 4 (241), вып. 7. – С. 40 – 46.
18. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Вып. 12. – С. 181 – 190.

Софья Александровна Загребина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

The Multipoint Initial-finish Problem for Hoff Linear Model

S.A. Zagrebina, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Article is devoted to the single-digit solvability of multipoint initial-finish value problem for a linear Sobolev-type equations. We prove a generalized theorem of the splitting of the space and operators actions. The obtained abstract results are implemented in a specific situation.

Keywords: Sobolev type equation, multipoint initial-finish problem, relatively p-bounded operators, Hoff linear model.

References

1. Hoff N.J. Creep Buckling. *The Aeronautical Quarterly*, 1956, vol. 7, no.1, pp. 1 – 20.
2. Sidorov N.A. *Common Questions of Regularity in Problems of Ramification Theory.* Irkutsk, Publisher Irkutsk Gos. Univ., 1982.
3. Sidorov N.A., Romanova O.A. Application of Certain Results of Branching Theory in the Solution of Degenerate Differential Equations. *Differential Equations,* 1983, vol. 19, no. 9, pp. 1516 – 1526.
4. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Generalized Solutions of Differential Equations with a Fredholm Operator at the Derivative. *Differential Equations,* 1987, vol. 23, no. 4, pp. 726 – 728.
5. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics,* 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601 – 614.
6. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes,* 2002, vol. 71, no. 2, pp. 262 – 266.
7. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics,* 2005, vol. 49, no. 10, pp. 49 – 55.
8. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139 – 145.
9. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. On Direct and Inverse Problems for the Hoff Equations on Graph. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* 2009, no. 1 (18), pp. 6 – 17.
10. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. Hoff Equation Stability on a Graph. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* 2010, no. 1 (15), pp. 6 – 15.
11. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, VSP, 2003. 228 p.
12. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-type Equations. *J. News of Irkutsk State University. Series ≪Mathematics≫*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51 – 72.
13. Zagrebina S.A., Soloveva N.P. The Initial-Finish Problem for Evolution Sobolev Type Equations on a Graph. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2008, no. 15 (115), issue 1, pp. 23 – 26.
14. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problem for the Navier – Stokes Linear System. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 35 – 39.
15. Manakova N.A., Dylkov A.G. Optimal Control of Solutions of Initial-Finish Problem for the Linear Sobolev Type Equations. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 113 – 114.
16. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-Finish Value Problem for Nonhomogenious Boussinesque – Löve Equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 22 – 29.
17. Keller A.V. The Algorithm for Solution of the Showalter – Sidorov Problem for Leontief Type Models. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seria ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫*, 2011, no. 4 (241), issue 7, pp. 40 – 46.
18. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. The Numerical Solution of the Optimal Demension Problem. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 12, pp. 2524 – 2533.

Поступила в редакцию 27 ноября 2011 г.