УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова

В работе исследована задача оптимального управления для уравнения соболевского типа второго порядка с относительно полиномиально ограниченным пучком операторов. Доказана теорема существования и единственности сильного решения начально-конечной задачи для данного уравнения. Получены достаточные, а в случае когда бесконечность является устранимой особой точкой A-резольвенты пучка операторов, и необходимые условия существования и единственности оптимального управления такими решениями. Исследована начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява, моделирующего продольные колебания упругого стержня. В работе используются идеи и методы, разработанные Г.А. Свиридюком и его учениками. Доказательство теоремы о существовании и единственности оптимального управления для исследуемой задачи опирается на теорию оптимального управления, развитую в работах Ж.-Л. Лионса.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, относительно полиномиально ограниченный пучок операторов, сильные решения, оптимальное управление.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)x_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')x_t + \beta(\Delta - \lambda'')x + u \tag{1}$$

с граничным условием

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу задачи.

Данную задачу в подходящих гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ удается редуцировать к операторно-дифференциальному уравнению соболевского типа,

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y + Cu, \tag{3}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$.

Рассмотрим начально-конечную задачу [1]

$$\begin{gathered} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0,\ P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0; \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0,\ P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0; \end{gathered} \tag{4}$$

здесь $P_{in(fin)}$ – некоторые проекторы в пространстве $\mathfrak{X}$. Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (3), (4), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(\mathrm{x,u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{\mathrm{ad}}} J(x,u). \tag{5}$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Данная работа выполнена в рамках направления, развиваемого Г.А. Свиридюком [2] и его учениками [3, 4]. Мы рассмотрим начально-конечную задачу, которая является естественным обобщением задачи Шоуолтера – Сидорова [5]. Впервые начально-конечная задача была рассмотрена в работах Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной.

1. Полиномиально A-ограниченные пучки операторов и проекторы

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – некоторые гильбертовы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов B_1, B_0 [6]. Множества $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ и $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\vec{B})$ будем называть соответственно A - *резольвентным множеством* и A - *спектром пучка* $\vec{B}$. Введем в рассмотрение оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$, которую назовем A-*резольвентой пучка* $\vec{B}$.

Определение 1. *Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})).$$

Введем в рассмотрение дополнительное условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Лемма 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено (A). Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\vec{B})d\mu$$

– проекторы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$. Через A^k (B^k_l) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{X}^k$, $k = 0,1$; $l = 0,1$.

Теорема 1. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда*

(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k = 0,1$;
(ii) $B^k_l \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k = 0,1$, $l = 0,1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$;
(iv) существует оператор $(B^0_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$.

Построим операторы $H_0 = (B^0_0)^{-1}A^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^o)$ и $H_1 = (B^0_0)^{-1}B^0_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^o)$.

Определение 2. *Определим семейство операторов $\{K^1_q, K^2_q\}$ следующим образом:*

$$K^1_1 = H_0,\ K^2_1 = -H_1,$$
$$K^1_{q+1} = K^2_q H_0,\ K^2_{q+1} = K^1_q - K^2_q H_1,\ q = 1,2,\ldots.$$

Определение 3. *Точка ∞ называется*

(i) устранимой особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_1^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^1 \not\equiv \mathbb{O}$, $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$, но $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$;

(iii) существенно особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_k^2 \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Определение 4. *Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем называть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограниченным.*

2. Сильные решения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y. \tag{6}$$

Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено условие (A), то существует единственное семейство вырожденных M,N-функций однородного уравнения (6) [7]. Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned}&A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \bigcup \sigma_1^A(\vec{B}),\ \text{причем}\\ &\sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k=0,1;\ \text{и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C},\\ &\text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что}\\ &\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset.\end{aligned} \tag{B}$$

Тогда существует оператор

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B})Ad\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда P_{fin} – проектор, причем $P_{fin}P = PP_{fin} = P_{fin}$.*

Построим оператор $P_{in} = P - P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. В силу леммы 2 оператор P_{in} – проектор, причем $P_{fin}P_{in} = P_{in}P_{fin} = \mathbb{O}$. Возьмем произвольные векторы $x_0^0,\ x_1^0,\ x_0^\tau,\ x_1^\tau \in \mathfrak{X}$. Решение $x = x(t)$ уравнения (6) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (6), если оно удовлетворяет условиям (4).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$N_{fin}^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})Ae^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$M_{fin}^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(B), (A_0)$. Тогда*

(i) $M_{fin}^{\bullet}$ и $N_{fin}^{\bullet}$ – пропагаторы уравнения (6);

(ii)$N_{fin}^0 = \dot{M}_{fin}^0 = \mathbb{O}, \dot{N}_{fin}^0 = M_{fin}^0 = P_{fin}$.

Далее, построим семейства операторов $M_{in}^t = M^t - M_{fin}^t$, $N_{in}^t = N^t - N_{fin}^t$.

Лемма 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда*

(i)$M_{in}^{\bullet}$ и $N_{in}^{\bullet}$ – пропагаторы уравнения (6);

(ii)$N_{in}^0 = \dot{M}_{in}^0 = \mathbb{O}, \dot{N}_{in}^0 = M_{in}^0 = P_{in}$.

Теорема 2. *[7] Пусть пучок $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, и выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда для любых $\tau \in \mathbb{R}, x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}$, $k = 0, 1$, вектор-функции $y = y(t)$, $t \in [0,\tau]$, такой, что $y^0 = (I - Q)y \in C^{p+1}([0,\tau];\mathfrak{Y}^0) \cap C^{p+2}((0,\tau];\mathfrak{Y}^0)$, $y^{fin} = Q_{fin}y \in C([0,\tau];\mathfrak{Y}^{fin})$, $y^{in} = Q_{in}y \in C([0,\tau];\mathfrak{Y}^{in})$ существует единственное решение $x = x(t)$ задачи (6), (4), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} y^0(t) + M_{fin}^{t-\tau} x_0^\tau + M_{in}^t x_0^0 + N_{fin}^{t-\tau} x_1^\tau + N_{in}^t x_1^0 +$$

$$+ \int_0^t N_{in}^{t-s} y^{in}(s) ds - \int_t^\tau N_{fin}^{t-s} y^{fin}(s) ds. \qquad (7)$$

Определение 5. *Вектор-функцию $x \in H^2(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \ddot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения (6), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (6) назовем сильным решением задачи (6),(4), если оно удовлетворяет (4).*

В силу непрерывности вложения $H^2(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C^1([0,\tau];\mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин «сильное решение» введен для того, чтобы отличать решение уравнения (6) в данном смысле от решения (7), которое обычно называют «классическим». Заметим, что классическое решение (7) является также и сильным решением задачи (6), (4).

Построим пространства $H^{p+2}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Пространство $H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 y(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \tfrac{d^q}{dt^q} (\mathbb{I} - Q) y(t),$$
$$A_2 y(t) = \int_0^t N_{in}^{t-s} y^{in}(s) ds, \quad A_3 y(t) = \int_t^\tau N_{fin}^{t-s} y^{fin}$$

и функции

$$k_1(t) = M_{fin}^{t-\tau} x_0^\tau, \quad k_2(t) = M_{in}^t x_0^0,$$
$$k_3(t) = N_{fin}^{t-\tau} x_1^\tau, \quad k_4(t) = N_{in}^t x_1^0.$$

Лемма 5. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда*

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+2}(\mathfrak{Y}); H^2(\mathfrak{X}))$*;*
(ii) при любом $x_0^\tau \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_1 \in C^2([0,\tau); \mathfrak{X})$*;*
(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+2}(\mathfrak{Y}); H^2(\mathfrak{X}))$*;*
(iv) при любом $x_0^0 \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_2 \in C^2([0,\tau); \mathfrak{X})$*;*
(v) $A_3 \in \mathcal{L}(H^{p+2}(\mathfrak{Y}); H^2(\mathfrak{X}))$*;*
(vi) при любом $x_1^\tau \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_3 \in C^2([0,\tau); \mathfrak{X})$*;*
(vii) при любом $x_1^0 \in \mathfrak{X}$ *вектор-функция* $k_4 \in C^2([0,\tau); \mathfrak{X})$*.*

Теорема 3. *Пусть пучок операторов* $\vec{B}$ (A,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, выполнены условия* $(A), (B), (A_0)$*. Тогда для любых* $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0, 1$ *и* $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ *существует единственное сильное решение задачи (4) для уравнения (6).*

Доказательство. Подстановка классического решения (7) в уравнение (6) обеспечивает существования сильного решения. Покажем единственность решения задачи (6), (4). Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, и выполняется условие (A), тогда в силу теоремы 1. задача (6), (4) распадается на три независимые задачи

$$H_0 \ddot{x}^0 = H_1 \dot{x}^0 + x^0 + (B_0^0)^{-1} y^0, \tag{8}$$

$$\ddot{x}^{fin} = S_1^{fin} \dot{x}^{fin} + S_0^{fin} x^{fin} + (A^{fin})^{-1} y^{fin}, \quad x^{fin}(\tau) = x_0^\tau, \dot{x}^{fin}(\tau) = x_1^\tau, \tag{9}$$

$$\ddot{x}^{in} = S_1^{in} \dot{x}^{in} + S_0^{in} x^{in} + (A^{in})^{-1} y^{in}, \quad x^{in}(0) = x_0^0, \dot{x}^{in}(0) = x_1^0, \tag{10}$$

где операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0$, $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^\circ)$, $S_0^{fin} = (A^{fin})^{-1} B_0^{fin}$, $S_1^{fin} = (A^{fin})^{-1} B_1^{fin}$, $S_0^{in} = (A^{in})^{-1} B_0^{in}, S_1^{in} = (A^{in})^{-1} B_1^{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$; вектор-функции $x^0 = (I - P)x$, $y^0 = (I - Q)y$, $x^{fin(in)} = P_{fin(in)} x$, $y^{fin(in)} = Q_{fin(in)} y$; векторы $x_k^{fin(in)} = P_{fin(in)} x_k \in \mathfrak{X}^k$, $\quad k = 0, 1$.

Пусть x и $\tilde{x}$ – два решения задачи (8)–(10). Тогда $\hat{x} = x - \tilde{x}$ удовлетворяет

$$\begin{gathered} A\ddot{\hat{x}} = B_1 \dot{\hat{x}} + B_0 \hat{x}, \\ P_{in}(\dot{\hat{x}}(0)) = 0, \ P_{in}(\hat{x}(0)) = 0; \\ P_{fin}(\dot{\hat{x}}(\tau)) = 0, \ P_{fin}(\hat{x}(\tau)) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Действуя на уравнение (11) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{fin(in)}$ и пользуясь леммой 1, сведем его к эквивалентной системе из двух независимых уравнений

$$H_0 \ddot{\hat{x}}^0 = H_1 \dot{\hat{x}}^0 + \hat{x}^0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \ddot{x}^{fin} = S_1^{fin} \dot{x}^{fin} + S_0^{fin} x^{fin} \quad \hat{x}^{fin}(\tau) = 0, \dot{\hat{x}}^{fin}(\tau) = 0, \\ \ddot{x}^{in} = S_1^{in} \dot{x}^{in} + S_0^{in} x^{in}, \quad \hat{x}^{in}(0) = 0, \dot{\hat{x}}^{in}(0) = 0. \end{gathered}$$

Докажем, что $x^0 = x^0(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Из (12) следует, что

$$\hat{x}^0 = K_1^1 \ddot{\hat{x}}^0 + K_1^2 \dot{x}^0.$$

Покажем, что

$$x^0 = K_k^1 (x^0)^{(k+1)} + K_k^2 (x^0)^{(k)} \tag{13}$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что при $k = q$ это верно, и докажем при $k = q + 1$. В силу (12) $(x)^{(q)} = H_0 (x^0)^{(q+2)} - H_1 (x^0)^{(q+1)}$, поэтому

$$x^0 = K_q^1 (x^0)^{(q+1)} + K_q^2 (H_0 (x^0)^{(q+2)} - H_1 (x^0)^{(q+1)}) = K_{q+1}^1 (x^0)^{(q+2)} + K_{q+1}^2 (x^0)^{(q+1)}.$$

Так как ∞ – полюс порядка p A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то в силу определения 3 из (13) при $k = p + 1$ получаем, что $x^0(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. □

3. Оптимальное управление

Рассмотрим начально-конечную задачу (4) для линейного неоднородного уравнения соболевского типа (3), где функции x, y, u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)–ограничен.

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$, со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_{ad} = H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$– *множество допустимых управлений.*

Определение 6. *Вектор-функцию $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (3), (4), если выполнено соотношение (5).*

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $\hat{u} \in H^{p+2}_\partial(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал качества

$$J(x,u) = \sum_{q=0}^{2} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{14}$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0,\ 1,\ \ldots,\ p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Теорема 4. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, выполнены условия $(A), (B), (A_0)$. Тогда для любых $x^0_k, x^\tau_k \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (4) для уравнения (3).*

Доказательство. По теореме 3 при любых $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$, $x^0_k, x^\tau_k \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$, $u \in H^{p+2}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^2(\mathfrak{X})$ задачи (3), (4), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2 + A_3)(y + Cu)(t) + k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + k_4(t), \tag{15}$$

где операторы A_1, A_2, A_3 и вектор-функции k_1, k_2, k_3, k_4 заданы в лемме 5.

Зафиксируем $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$, $x^0_k, x^\tau_k \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$ и рассмотрим (15) как отображение $D : u \to x(u)$. Тогда отображение $D : H^{p+2}(\mathfrak{U}) \to H^2(\mathfrak{X})$ непрерывно. Поэтому функционал качества зависит только от u, т.е. $J(x,u) = J(u)$.

Перепишем функционал качества (14) в виде

$$J(u) = \|x(t,u) - \tilde{x}\|^2_{H^2(\mathfrak{X})} + [v,u],$$

где $v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t),\ q = 0,\ldots,p+2$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \|\tilde{x} - x(t,0)\|^2_{H^2(\mathfrak{X})},$$

где

$$\pi(u,u) = \|x(t,u) - x(t,0)\|^2_{H^2(\mathfrak{X})} + [v,u] \quad -$$

билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+2}(\mathfrak{U})$, а

$$\lambda(u) = \langle \tilde{x} - x(t,0), x(t,u) - x(t,0) \rangle_{H^2(\mathfrak{X})} \quad -$$

линейная непрерывная на $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ форма. Значит, условия теоремы [8, гл. 1] выполнены. □

4. Необходимое условие оптимального управления

Управление $u_0 \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ оптимально тогда и только тогда, когда

$$J'(u_0)(u - u_0) \geq 0 \quad \forall u \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U}), \tag{16}$$

то есть, для функционала (14), выполняется соотношение

$$\langle x(t,u_0) - \tilde{x}, x(t,u) - x(t,u_0) \rangle_{H^2(\mathfrak{X})} + [u_0, u - u_0] \geq 0 \forall u \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U}), \tag{17}$$

где

$$[u_0, u - u_0] = \sum_{q=0}^{p+2} \int_0^\tau \left\langle N_q u_0^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - u_0^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt \tag{18}$$

билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+2}(\mathfrak{U})$.

Пусть $\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}^*, \mathfrak{U}^*$ – сопряженные пространства к $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$ соответственно. Введем в рассмотрение изоморфизм

$$\Lambda_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*. \tag{19}$$

Зафиксируем некоторые векторы $(x_k^0)^*$, $(x_k^\tau)^* \in \mathfrak{X}^*$. Операторы $A^*, B_0^*, B_1^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^*; \mathfrak{X}^*)$. Введем в рассмотрение A^*-резольвентное множество

$$\rho^{A^*}(\vec{B}^*) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A^* - \mu B_1^* - B_0^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*; \mathfrak{Y}^*)\}$$

и A^*-спектр $\sigma^{A^*}(\vec{B}^*) = \mathbb{C} \setminus \rho^{A^*}(\vec{B}^*)$ пучка операторов $\vec{B}^*$.

Лемма 6. *Пусть пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ гильбертовы. Пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, выполнены условия (A), (B),(A_0) тогда и только тогда, когда пучок операторов $\vec{B}^*$ (A^*,p)-ограничен, и выполнены условия*

$$\int_{\gamma^*} R_\mu^{A^*}(\vec{B}^*) d\mu \equiv \mathbb{O}; \tag{A^*}$$

$$\begin{array}{l} A^*\text{-спектр пучка } \vec{B}^* \ \sigma^{A^*}(\vec{B}^*) = \sigma_0^{A^*}(\vec{B}^*) \bigcup \sigma_1^{A^*}(\vec{B}^*), \text{ причем} \\ \sigma_k^{A^*}(\vec{B}^*) \neq \emptyset, \ k = 0,1; \text{ и существует контур } \gamma_0^* \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0^* \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0^* \bigcap \sigma^{A_0^*}(\vec{B}^*) = \sigma^{A_0^*}(\vec{B}^*), \ \overline{\Gamma}_0^* \bigcap \sigma^{A_1^*}(\vec{B}^*) = \emptyset; \end{array} \tag{B^*}$$

$$\int_{\gamma_0^*} R_\mu^{A^*}(\vec{B}^*) d\mu = \mathbb{O}, \tag{A_0^*}$$

где $\gamma^* \subset \mathbb{C}$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^{A^*}(\vec{B}^*)$, $R_\mu^{A^*}(\vec{B}^*) = (\mu^2 A^* - \mu B_1^* - B_0^*)^{-1}$– A^*-резольвента пучка операторов $\vec{B}^*$.

Операторы

$$P^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} R_\mu^{A^*}(\vec{B}^*) \mu A^* d\mu, \quad Q^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} \mu A^* R_\mu^{A^*}(\vec{B}^*) d\mu -$$

проекторы, $P^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^*)$, $Q^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*)$. Положим $\mathfrak{X}^{*0} = \ker Q^*$, $\mathfrak{Y}^{*0} = \ker P^*$, $\mathfrak{X}^{*1} = \mathrm{Im}\ Q^*$, $\mathfrak{Y}^{*1} = \mathrm{Im}\ P^*$.

Теперь определим *сопряженное состояние* задачи (3), (4) $\xi(t,u) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$ как решение уравнения

$$A^*\ddot{\xi} = -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi + (x(t,u) - \tilde{x}) \tag{20}$$

на интервале $(0;\tau)$, снабженного условиями

$$\begin{array}{c} P^*_{fin}(\xi(0)) = 0,\ P^*_{fin}(\dot{\xi}(0)) = 0, \\ P^*_{in}(\xi(\tau)) = 0,\ P^*_{in}(\dot{\xi}(\tau)) = 0. \end{array} \tag{21}$$

Аналогично п. 2 показывается справедливость следующей теоремы

Теорема 5. *Пусть пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ гильбертовы и пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, выполнены условия (A), (B),(A_0). Тогда существует единственное решение $\xi(t,u) \in H^2(\mathfrak{Y}^*)$ задачи (20), (21).*

Теорема 6. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен. Тогда при любых $y \in H^2(\mathfrak{Y})$ и $x \in H^2(\mathfrak{X})$ оптимальное управление $u_0 \in H^2_\partial(\mathfrak{U})$ для задачи (3), (4) харатеризуется соотношениями (20), (21), и выполняется неравенство*

$$\left\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1} C^*\xi(t,u_0), u(t) - u_0(t)\right\rangle_{H^2(\mathfrak{U})} + \sum_{q=0}^{2}\int_0^\tau \left\langle N_q u_0^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - u_0^{(q)}(t)\right\rangle_{\mathfrak{U}} \geq 0\ \forall u \in H^2_\partial(\mathfrak{U}),$$

где

$$x(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{X}),\ \xi(t,u_0) \in H^2(\mathfrak{Y}^*).$$

Доказательство. Вектор-функция $\hat{x}(t,u) = x(t,u) - x(t,u_0)$ является решением начально-конечной задачи

$$\begin{array}{c} P_{in}(\hat{x}(0)) = 0, \quad P_{in}(\dot{\hat{x}}(0)) = 0, \\ P_{fin}(\hat{x}(\tau)) = 0, \quad P_{fin}(\dot{\hat{x}}(\tau)) = 0 \end{array} \tag{22}$$

для уравнения

$$A\ddot{\hat{x}} = B_1\dot{\hat{x}} + B_0\hat{x} + C(u - u_0).$$

Действуя на данное уравнение последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{fin(in)}$, сведем данную задачу к эквивалентной системе

$$H_0\ddot{\hat{x}}^0 = H_1\dot{\hat{x}}^0 + \hat{x}^0 + (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q)C(u - u_0), \tag{23}$$

$$A^{fin}\ddot{\hat{x}}^{fin} = B_1^{fin}\dot{\hat{x}}^1 + B_0^{fin}\hat{x}^1 + Q_{fin}C(u - u_0), \quad \hat{x}^{fin}(\tau) = 0, \dot{\hat{x}}^{fin}(\tau) = 0, \tag{24}$$

$$A^{in}\ddot{\hat{x}}^{in} = B_1^{in}\dot{\hat{x}}^1 + B_0^{in}\hat{x}^1 + Q_{in}C(u - u_0), \quad \hat{x}^{in}(0) = 0, \dot{\hat{x}}^{in}(0) = 0. \tag{25}$$

Здесь $H_0 = (B_0^0)^{-1}A_0$, $H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0$.

Умножим (24) скалярно на $\xi^{fin}(t,u_0)$ и проинтегрируем по интервалу $(0,\tau)$. Получим

$$\int_0^\tau \left\langle A^{fin}\ddot{x}^{fin}(t,u) - A^{fin}\ddot{x}^{fin}(t,u_0), \xi^{fin}\right\rangle dt = \int_0^\tau \Big[\left\langle B_1^{fin}\dot{x}^{fin}(t,u) - B_1^{fin}\dot{x}^{fin}(t,u_0), \xi^{fin}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle B_0^{fin}x^{fin}(t,u) - B_0^{fin}x^{fin}(t,u_0), \xi^{fin}\right\rangle + \left\langle Q_{fin}C(u - u_0), \xi^{fin}\right\rangle\Big]\, dt.$$

Интегрируя по частям левую часть последнего равенства, получим

$$\int_0^\tau \left\langle A^{fin}\ddot{x}^{fin}(t,u) - A^{fin}\ddot{x}^{fin}(t,u_0), \xi^{fin}\right\rangle dt = -\langle A^{fin}x^{fin}(\tau,u) - A^{fin}x^{fin}(\tau,u_0), \dot{\xi}^{fin}(\tau)\rangle +$$
$$+\langle A^{fin}x^{fin}(0,u) - A^{fin}x^{fin}(0,u_0), \dot{\xi}^{fin}(0)\rangle + \int_0^\tau \langle A^{fin}x^{fin}(t,u) - A^{fin}x^{fin}(t,u_0), \ddot{\xi}^{fin})\rangle dt =$$
$$= \int_0^\tau \langle (A^{fin})^*\ddot{\xi}^{fin}, x^{fin}(t,u) - x^{fin}(t,u_0)\rangle dt,$$

аналогично проинтегрируем по частям выражение

$$\int\limits_0^\tau \left\langle B_1^{fin}\dot{x}^{fin}(t,u) - B_1^{fin}\dot{x}^{fin}(t,u_0), \xi^{fin} \right\rangle dt = \langle B_1^{fin}(x^{fin}(\tau,u) - x^{fin}(\tau,u_0)), \xi^{fin}(\tau)\rangle -$$
$$-\langle B_1^{fin}(x^{fin}(0,u) - x^{fin}(0,u_0)), \xi^{fin}(0)\rangle - \int\limits_0^\tau \langle B_1^{fin}x^{fin}(t,u) - B_1^{fin}x^{fin}(t,u_0), \dot{\xi}^{fin}(t)\rangle dt =$$
$$= -\int\limits_0^\tau \langle \hat{x}^{fin}, (B_1^{fin})^*\dot{\xi}^{fin}(t)\rangle dt,$$

откуда, применяя условия (21), (22),

$$\int\limits_0^\tau \langle (A^{fin})^*\ddot{\xi}^{fin}, \hat{x}^{fin}\rangle dt = -\int\limits_0^\tau \langle (B_1^{fin})^*\dot{\xi}^{fin}, \hat{x}^{fin}\rangle dt + \int\limits_0^\tau \langle (B_0^{fin})^*\xi^{fin}, \hat{x}^{fin}\rangle dt +$$
$$+\int\limits_0^\tau \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1}C^*Q_{fin}^*\xi^{fin}, (u-u_0)\rangle dt. \tag{26}$$

Аналогично найдем

$$\int\limits_0^\tau \langle (A^{in})^*\ddot{\xi}^{in}, \hat{x}^{in}\rangle dt = -\int\limits_0^\tau \langle (B_1^{in})^*\dot{\xi}^{in}, \hat{x}^{in}\rangle dt + \int\limits_0^\tau \langle (B_0^{in})^*\xi^{in}, \hat{x}^{in}\rangle dt + \int\limits_0^\tau \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1}C^*Q_{in}^*\xi^{in}, (u-u_0)\rangle dt. \tag{27}$$

В силу (A,p)-ограниченности пучка операторов $\vec{B}$ в случае $p=0$ из (23) следует, что

$$0 = \hat{x}^0 + (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I}-Q)C(u-u_0).$$

$$0 = \int\limits_0^\tau \left[\left\langle (B_0^0)^*\xi^0, x^0(t,u) - x^0(t,u_0) \right\rangle + \left\langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1}C^*(\mathbb{I}-Q)^*\xi^0, (u-u_0) \right\rangle \right] dt. \tag{28}$$

Суммируя (26) – (28), будем иметь

$$\int\limits_0^\tau \langle A^*\ddot{\xi}, x(t,u) - x(t,u_0)\rangle dt = \int\limits_0^\tau \langle -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi, x(t,u) - x(t,u_0)\rangle + \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1}C^*\xi, (u-u_0)\rangle dt.$$

Умножим (20) скалярно на $x(t,u) - x(t,u_0)$ и проинтегрируем по интервалу $(0;\tau)$

$$\int\limits_0^\tau \langle A^*\ddot{\xi}, x(t,u) - x(t,u_0)\rangle dt = \int\limits_0^\tau \langle -(B_1)^*\dot{\xi} + (B_0)^*\xi + (x(t,u) - \tilde{x}), x(t,u) - x(t,u_0)\rangle dt,$$

тогда неравенство вида (17) можно при произвольном $p \in \mathbb{N}$ записать в виде

$$\int\limits_0^\tau \langle \Lambda_{\mathfrak{U}}^{-1}C^*\xi, (u-u_0)\rangle dt + \sum_{q=0}^{p+2}\int\limits_0^\tau \left\langle N_q u_0^{(q)}(t), u^{(q)}(t) - u_0^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt \geq 0 \ \forall u \in H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U}).$$

□

5. Уравнение Буссинеска – Лява

Рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява (1) с граничными условиями (2). Редуцируя задачу (1), (2) к уравнению (3), положим

$$\mathfrak{X} = \{x \in W_2^{l+2}(\Omega) : x(s) = 0, s \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{Y} = W_2^l(\Omega),$$

где $W_2^l(\Omega)$ – пространства Соболева. Операторы А, B_1 и B_0 зададим формулами $A = \lambda - \Delta$, $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$, $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$, $C = \mathbb{I}$. При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}(=\sigma(\Delta))$ собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_k\}$ обозначим соответствующие ортонормированные (в смысле $L^2(\Omega)$) собственные функции. Поскольку $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, то

$$\mu^2 A - \mu B_1 - B_0 = \sum_{k=1}^{\infty}[(\lambda-\lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda'-\lambda_k)\mu + \beta(\lambda''-\lambda_k)] < \varphi_k, \cdot > \varphi_k,$$

где $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Лемма 7. *[9] Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$*;*
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$*;*
(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$*.*
Тогда пучок $\vec{B}$ *полиномиально* A*-ограничен.*

Если выполнены условия (i) или (iii) леммы 7, то имеет место и условие (A). Если $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$, т.е. выполнено условие (ii) леммы 7, условие (A) не выполняется, и мы исключим его из дальнейших рассмотрений.

A-спектр пучка $\vec{B}$ составляют решения $\mu_k^{1,2}$ уравнения

$$(\lambda-\lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda'-\lambda_k)\mu + \beta(\lambda''-\lambda_k) = 0, \ k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Построим проектор P:

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \text{ если выполнено (iii).} \end{cases}$$

Для построения проектора P_{fin} выберем область $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек $\mu_{k_s}^{1,2}$ A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ – контур. Таким образом выполнены условия (B) и (A_0).

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{array}{l} \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} \neq \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x(s,0) - x_1^0(s) > \varphi_k = 0, \ \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} \neq \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x_t(s,0) - x_0^0(s) > \varphi_k = 0, \\ \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} = \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x(s,\tau) - x_1^\tau(s) > \varphi_k = 0, \ \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} = \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x_t(s,\tau) - x_0^\tau(s) > \varphi_k = 0. \end{array} \tag{30}$$

для уравнения (1) с граничными условиями (2). В силу теоремы 4 имеет место

Теорема 7. *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *таком, что выполнено условие либо (i), либо (iii) леммы 7, и любых* $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0, \ x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0,1$*, существует единственное решение задачи оптимального управления* $(\hat{x}, \hat{y})$ *для уравнения Буссинеска–Лява (1) с условиями (2), (30), минимизирующее функционал (14).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

Литература

1. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 4 (221), вып. 7. – С. 35 – 39.

2. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345 – 346.
4. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
5. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. «Математика». – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104 – 125.
6. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А. А.Замышляева // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 252 – 260.
7. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 37 (254), вып. 10. – С. 22 – 29.
8. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
9. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А.А. Замышляева // Вычислит. технол. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45 – 54.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет, (Челябинск, Российская Федерация), alzama@mail.ru.

Ольга Николаевна Цыпленкова, аспирант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), Tsyplenkova_Olga@mail.ru.

The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque – Löve Equation

A.A. Zamyshlyaeva, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
O.N. Tsyplenkova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Of concern is the optimal control problem for the Sobolev type equation of second order with relatively polynomially bounded operator pencil. The theorem of existence and uniqueness of strong solutions of initial-finish problem for abstract equation is proved. The sufficient and, in the case when infinity is a removable singularity of the A-resolvent operator pencil, the necessary conditions for optimal control existence and uniqueness of such solutions are found. The initial-finish problem for the Boussinesque – Löve equation, which describes the longitudinal vibrations of an elastic rod, is investigated. We use the ideas and methods developed by G.A. Sviridyuk and his disciples. The proof of the existence and uniqueness of optimal control theorem is based on the theory of optimal control developed by J.-L. Lions.

Keywords: Sobolev-type equations, relatively polynomially bounded operator pencil, strong solutions, optimal control.

References

1. Zagrebina S.A. The Initial-Finish Problem for the Navier – Stokes Linear System [Nachal'no-konechnaya zadacha dlya lineynoy sistemy Nav'e – Stoksa]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫,* 2011, no. 4 (221), issue 7, pp. 35 – 39.
2. Sviridyuk, G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003.
3. Keller A.V. Numerical Solution of the Start Control for a System of Equations of Leontief Type [Chislennoe reshenie zadachi startovogo upravleniya dlya sistemy uravneniy leont'evskogo tipa]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki,* 2009, vol. 16, issue 2, pp. 345 – 346.
4. Manakova N.A. The Optimal Control Problem for the Oskolkov Nonlinear Filtration Equation. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 9, pp. 1213 – 1221.
5. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter-Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-type Equations. *J. News of Irkutsk State University. Series ≪Mathematics≫*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51 – 72.
6. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Space of a Class of Linear Higher-Order Sobolev Type Equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 269 – 278.
7. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-Finish Value Problem for the Boussinesque – Löve Equation [Nachal'no-konechnaya zadacha dlya uravneniya Bussineska-Lyava]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫,* 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 22 – 29.
8. Lions Zh.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi* [Optimal Control of Systems Described by Equations with Partial Derivatives]. Moscow, Mir, 1972.
9. Zamyshlyaeva, A.A. The Phase Space of a Class of Linear Sobolev Type Equations of the Second Order [Fazovye prostranstva odnogo klassa lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa vtorogo poryadka]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 45 – 54.

Поступила в редакцию 8 ноября 2011 г.