УДК 681.5

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ, ЗАДАННЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ СХЕМАМИ

В.В. Бодров, Н.В. Плотникова, М.Н. Устюгов, З.А. Фельк

Системы автоматизации построения математических моделей являются важнейшей составной частью систем автоматизированного проектирования, позволяя оперативно оценивать функционирование разрабатываемых устройств и осуществлять параметрическую оптимизацию по заданным критериям.

Для математического моделирования технических систем различной физической природы предлагается использование метода физических аналогий, который позволяет подходить к рассмотрению систем различной физической природы с единых позиций. Согласно этому методу любой технической системе, функционирование которой описывается системой дифференциальных и алгебраических уравнений, можно поставить в соответствие некоторую формальную эквивалентную схему, которая описывается точно такой же системой дифференциальных и алгебраических уравнений.

1. **Блочно-иерархический** подход к моделированию систем

Автоматизированное моделирование технических систем позволяет ускорить и удешевить процесс проектирования, повысить качество и долговечность разрабатываемых устройств, синтезировать управляющие системы и сократить число натурных экспериментов [1,2].

Решение проблемы проектирования и управления сложных технических систем, которые в общем случае представляют собой совокупность физически неоднородных подсистем - механических, гидравлических, управляющих, информационных, требует разработки методов и алгоритмов моделирования физически неоднородных систем.

Наиболее перспективным подходом к проектированию систем является блочно-иерархический, который в качестве своей основы включает иерархию математических моделей (ММ) (рис. 1).

Анализ процесса моделирования технических систем и подробная классификация математических моделей показали, что для моделирования систем различной физической природы наиболее целесообразными являются модели систем, используемые в САПР на макроуровне [2, 3]. Из исследованных методов моделирования на макроуровне наиболее удобными являются: метод узловых потенциалов, табличный метод, метод переменных состояния. Для решения поставленных задач подходит метод аналогий, так как существование аналогий фазовых переменных и уравнений позволяет создать единое математическое и программное обеспечение для САПР технических объектов.

2. Метод аналогий для построения математических моделей систем

Для математического моделирования технических систем различной физической природы используется метод физических аналогий. Применение метода аналогий, основанного на выявлении и анализе существующих аналогий физических систем, значительно упрощает получение математических моделей технических систем. Согласно этому методу любой технической системе, функционирование которой описывается системой дифференциальных и алгебраических уравнений, можно поставить в соответствие некоторую формальную эквивалентную схему, которая описывается точно такой же системой дифференциальных и алгебраических уравнений.

Метод аналогий базируется на следующих постулатах.

1. Моделируемая техническая система заменяется совокупностью физически однородных подсистем.

2. Структура подсистемы представляется множеством элементов и связей их друг с другом - множеством узлов и связывающих их ветвей. Состояние каждого ребра описывается фазовой переменной типа потенциала U_j, где j - номер ребра. Ребра связаны между собой посредством узлов. Состояние каждого узла характеризуется фазовой переменной типа потенциала φ_k, где k - номер узла. При этом для j-го ребра, включенного между узлами *a и b*, $U_j = \varphi_a - \varphi_b$.

3.Свойства элемента задаются *компонентными уравнениями,* выражающими взаимозависимости между фазовыми переменными, относящимися к ребрам и узлам данного элемента. Связи элементов друг с другом задаются *топологическими уравнениями,* связывающими однотипные фазовые переменные, относящиеся к взаимосвязанным элементам.

4.Математическая модель системы - совокупность компонентных и топологических уравнений. Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для большинства систем различной физической природы. Это обстоятельство обуславливает наличие аналогий между разнородными физическими системами.

Компонентные уравнения относятся к простым элементам, но могут использоваться и в моделях сложных элементов, так как последние можно представить в виде совокупности простых элементов [1,2].

В качестве *топологического уравнения равновесия* - аналога первого закона Кирхгофа - выступают уравнения потоков в узлах соединения элементов:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \tag{1}$$

а в качестве *топологического уравнения совместимости* - аналога второго закона Кирхгофа - уравнения совместимости давлений или скоростей в любом замкнутом контуре:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = 0, \tag{2}$$

где I_k и U_k - фазовые переменные, относящиеся к k-й ветви; n - число ветвей, подходящих к рассматриваемому узлу; m - число ветвей в рассматриваемом контуре.

3. Технология получения математической модели с использованием метода аналогий

Технологию получения математической модели системы на примере электрической системы с помощью метода аналогий и теории графов представим следующим образом: на первом этапе электрическая система заменяется эквивалентной схемой (рис. 2), содержащей в общем случае пять типов элементов: *R, L, C, E, J.* Следующим этапом является формирование с помощью теории графов фундаментального дерева (рис. 3), по которому определяются контуры, сечения, хорды и ветви дерева. В данном случае: E_1, C_1, R_1 - ветви; R_2, L_1, J_1 - хорды.

Далее записываются топологические уравнения для напряжений выбранных контуров:

$$\begin{cases} U_{R2} - E_1 + U_{R1} = 0; \\ U_{L1} + U_{C1} - E_1 + U_{R1} = 0; \\ U_{J1} + U_{C1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_{R2} = E_1 - U_{R1}; \\ U_{L1} = E_1 - U_{C1} - U_{R1}; \\ U_{J1} = -U_{C1} \end{cases}$$

или

$$\begin{bmatrix} U_{R2} \\ U_{L1} \\ U_{J1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ U_{C1} \\ U_{R1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Соотношения между напряжениями в ветвях и хордах графа представляются с помощью матрицы M контуров и сечений: $U_X = -MU_B$, а токи в ветвях: $I_B = M^{\mathrm{T}} I_X$, где

$$M = \begin{array}{c} \\ R_2 \\ L_1 \\ J_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & C_1 & R_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$U_X = \begin{bmatrix} U_{R2} & U_{L1} & U_{J1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $U_B = \begin{bmatrix} E_1 & U_{C1} & U_{R1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

В общем случае матрица *M,* матрица контуров и сечений, блочная, содержащая 16 подблочных матриц, для которых введены строгие индексы.

$$M = \begin{array}{c} \\ S \\ R \\ L \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & C & r & \varGamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} M_{SE} & M_{SC} & M_{Sr} & M_{S\varGamma} \\ M_{RE} & M_{RC} & M_{Rr} & M_{R\varGamma} \\ M_{LE} & M_{LC} & M_{Lr} & M_{L\varGamma} \\ M_{JE} & M_{JC} & M_{Jr} & M_{J\varGamma} \end{bmatrix} \end{array},$$

где S - емкости в хордах; r - сопротивление в ветвях; $\varGamma$ - индуктивности в ветвях. Матрицы $M_{Sr}, M_{S\varGamma}, M_{R\varGamma}$ всегда нулевые, наличие ненулевых подблочных $M_{SE}, M_{SC}, M_{L\varGamma}, M_{J\varGamma}, M_{Rr}$ свидетельствует о существовании в схеме топологических вырождений. *Топологические вырождения* представляют собой емкостные контура, индуктивные звезды, резистивные включения (контура и звезды). Наличие топологических вырождений усложняет процедуру получения математической модели системы в нормальной форме - требуется либо решение систем линейных алгебраических уравнений на каждом шаге численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, либо предварительное устранение топологических вырождений с помощью изменений схемы.

4. Формирование математической модели на основе блочной матрицы *M*

С помощью полученной матрицы *M* компонентных уравнений для заданной схемы, описывающих свойства элементов в эквивалентной схеме и топологических уравнений, отражающих структуру схемы, записывается математическая модель системы в виде совокупности дифференциальных и алгебраических уравнений, матричная форма записи которых представлена соответственно в выражениях (4), (5).

5. Автоматизация построения математической модели системы по эквивалентной схеме

Одним из способов моделирования систем в современных программных средствах, таких как VisSim, RL, MATLAB, является моделирование по заданной структурной схеме, которая формируется по полученным уравнениям (4), (5).

Одним из преимуществ методики моделирования систем и реализованного на ее основе программного комплекса «Matrix_M», используемого на кафедре «Системы управления» ЮУрГУ является исследование систем только по эквивалентным схемам.

Для решения полученной системы дифференциальных (4) уравнений в программном комплексе «Matrix_M» используются метод Рунге-Кутта-Мерсона, метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, метод Рунге-Кутта [5]. Для решения системы алгебраических уравнений (5) в программном комплексе «Matrix_M» используются следующие методы: метод Гаусса, метод Гаусса-Жордана, метод Крамера, метод *L U*-разложения, матричный метод, для

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{U}_C} \\ \underline{\dot{I}_L} \\ \underline{\dot{U}_S} \\ \underline{\dot{I}_\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1}M_{LC}^{\mathrm{T}} & 0 & C^{-1}M_{RC}^{\mathrm{T}} & 0 & C^{-1}M_{SC}^{\mathrm{T}} & 0 & C^{-1}M_{JC}^{\mathrm{T}} \\ -L^{-1}M_{LC} & 0 & -L^{-1}M_{Lr} & 0 & -L^{-1}M_{L\Gamma} & 0 & -L^{-1}M_{LE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} \underline{U_C} & \underline{I_L} & U_r & \underline{I_R} & \underline{U_\Gamma} & \underline{I_S} & \underline{E} & I_J \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}; \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -M_{Rr}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ M_{Rr} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ M_{L\Gamma}^{\mathrm{T}}L^{-1}M_{L\Gamma} & 0 & 0 & 0 & r^{-1}+M_{L\Gamma}^{\mathrm{T}}L^{-1}M_{L\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{SC}C^{-1}M_{RC}^{\mathrm{T}} & 0 & S^{-1}+M_{SC}C^{-1}M_{SC}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U_r} \\ \underline{I_r} \\ \underline{U_R} \\ \underline{I_R} \\ \underline{U_\Gamma} \\ \underline{I_S} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Lr}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & M_{Jr}^{\mathrm{T}} & 0 \\ -M_{RC} & 0 & -M_{RE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_{L\Gamma}^{\mathrm{T}}L^{-1}M_{LC} & 0 & -M_{L\Gamma}^{\mathrm{T}}L^{-1}M_{LE} & 0 & 0 & M_{Jr}^{\mathrm{T}} \\ 0 & -M_{SC}C^{-1}M_{LC}^{\mathrm{T}} & 0 & -M_{SE} & -M_{SC}C^{-1}M_{JC}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U_C} \\ \underline{I_L} \\ \underline{E} \\ \underline{\dot{E}} \\ \underline{I_J} \\ \underline{\dot{I}_J} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

решения системы нелинейных уравнений - метод Ньютона-Рафсона, метод Хука-Дживса, наискорейшего спуска, итерация неподвижной точки.

Реализация предложенной методики моделирования в рамках традиционных систем программирования может быть неэффективной, так как подобные системы не позволяют выразить в программном комплексе требуемую функциональность. Более целесообразным представляется использование объектно-ориентированных систем программирования (инструментальная среда Borland Delphi), поддерживающих также визуальное и событийное программирование, обладающих более выразительным языком программирования, удобством составления программных компонент, их отладки и сопровождения.

Программный комплекс состоит из следующих модулей: модуль формирования матрицы *M,* модуль исследования систем, содержащих линейные элементы; модуль исследования нелинейных систем и сложных систем. Погрешность метода интегрирования в «Matrix_M» оценивается с использованием принципа двойного просчета. Учет нулевых элементов в модели: в случае отсутствия элемента в системе его размерность принимается равной 1, значение - 1, так как в программе используется обращение матриц, которые в данном случае являются разряженными.

Нестационарные элементы в программном комплексе задаются следующим образом:

Выражение 1: граница 1 для t;

Выражение 2: граница 2 для t;

Выражение *N*: граница *N* для *t*,

где для значения данной величины вычисляется

(Выражение 1, если время $t <$ граница 1);

(Выражение 2, если время $t <$ граница 2);

...

(Выражение *N* – для остальных *t*).

Последняя граница не пишется и принимается равной бесконечности. Программа поддерживает: знаки операций: +, –, *, /, ^; параметр *t*; скобки; разные форматы записи чисел, например, 1, –1, 10.0124, .235, 10.34e10; функции: exp (е в степени), sin, cos, tg, ctg.

Пример задания в программном комплексе выражения для нестационарного элемента:

E: 2*t:0.5:exp(0.5–t):1:exp(–0.5)

означает что $E = 2t$ при t от 0 до 0,5; $E = \exp(0{,}5-t)$, при t от 0,5 до 1, $E = \exp(-0{,}5)$ при t от 1 до бесконечности.

Нелинейные зависимости задаются в виде:

Condition 1: expression 1;

Condition 2: expression 2;

...

otherwiseExpr,

где при выполнении условия condition 1 будет считаться expression 1, при выполнении условия condition 2 – expression 2 и т.д. Если ни одно из условий не выполняется, то будет считаться выражение otherwiseExpr. Выражения задаются так же, как и для нестационарных элементов. Условия задаются в виде

$I_r < 0$ & $I_r > -4$

и т.п. Примеры задания нелинейных зависимостей в программном комплексе «Matrix_M»:

r1 = 4 + 0.1*Ir1;
S1 = 1 + 0.3*sin(IS1);
Г1 = 0.1+ 0.01 + cos(UГ1);
R1 = 5 + 0.1*UR1.

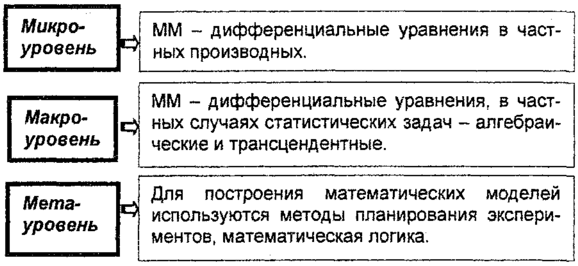


Рис. 1. Классификация математических моделей в САПР

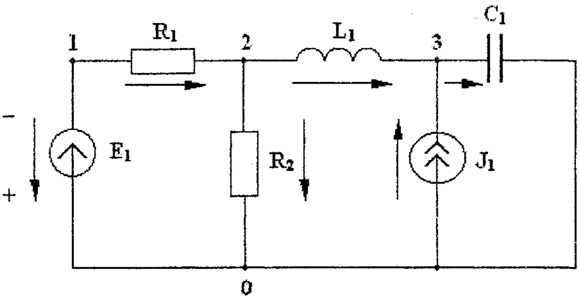


Рис. 2. Эквивалентная схема электрической системы

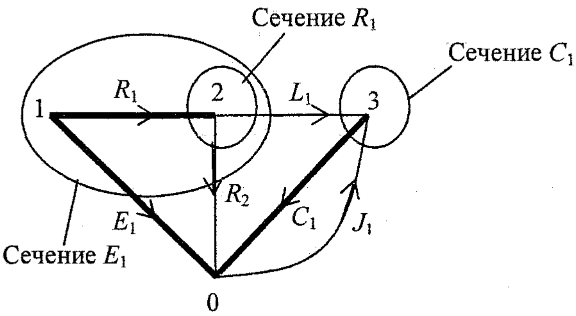


Рис. 3. Фундаментальное дерево, его хорды и ветви

6. Математическая модель электромеханической системы

Эквивалентная схема электромеханической системы приведена на рис. 4. Пусть имеется некоторый источник питания и нагрузка, примем в качестве источника питания якорную обмотку генератора постоянного тока, считая ЭДС источника генератора постоянной, учитывая у генератора индуктивность и сопротивление. Нагрузка - якорная обмотка двигателя, обмоткой возбуждения пренебрегаем. Взаимодействие электрической и механической подсистем моделируется трансформаторной связью и задается аналитически:

$E_2 = K_E U_{C1}$;

$I_{J1} = K_M I_{L2}$.

Для моделирования по эквивалентной схеме используются обозначения, принятые для электрических систем, а для формирования фундаментального дерева и блочной матрицы M применяется теория графов. Фундаментальное дерево представлено на рис. 5.

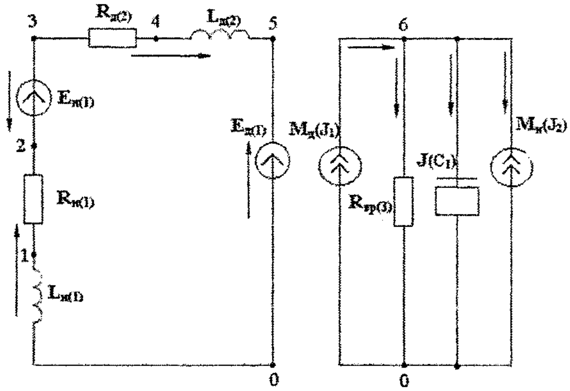


Рис. 4. Эквивалентная схема электромеханической системы

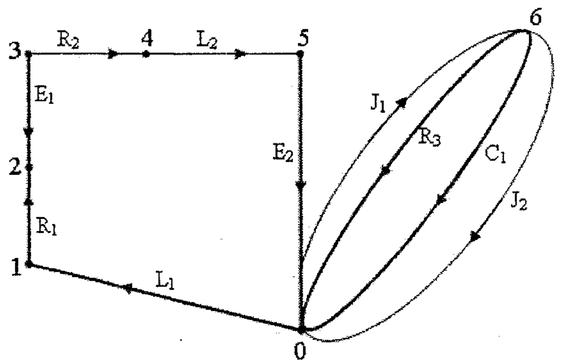


Рис. 5. Фундаментальное дерево, его хорды и ветви

В данном случае: R_3, L_2, J_1, J_2 – хорды, E_1, E_2, C_1, R_1, R_2, L_1 – ветви. Топологические уравнения для напряжений, из которых выделяются напряжения для получения хорд, имеют вид:

$U_{R3} = -U_{C1}$;

$U_{L2} = -(-E_1 + E_2 + U_{L1} + U_{R1} + U_{R2})$;

$U_{J1} = U_{C1}$;

$U_{J2} = -U_{C1}$.

Матрица M в данном случае имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для проверки достоверности полученных в программном комплексе результатов моделирования данная электромеханическая система была исследована в программе RL, разработанной на кафедре «Системы управления», в ЮУрГУ. Для моделирования системы с помощью RL строится структурная схема (рис. 6).

Графики переходных процессов в системе, полученные в программе RL, отражены на рис. 7.

Моделирование в программном комплексе «Matrix_M» осуществляется по эквивалентной схеме, в данном случае фундаментальное дерево (см. рис. 5) не строится, матрица M формируется автоматически и структурная схема (см. рис. 6) не используется как основная для моделирования электромеханической системы.

Полученная матрица M приведена на рис. 8, наличие ненулевой матрицы $M_{L\Gamma}$ свидетельствует о наличии топологических вырождений.

Пример задания параметров переходного процесса в виде аналитических зависимостей приведен на рис. 9. Переходные процессы в системе отражены на рис. 10.

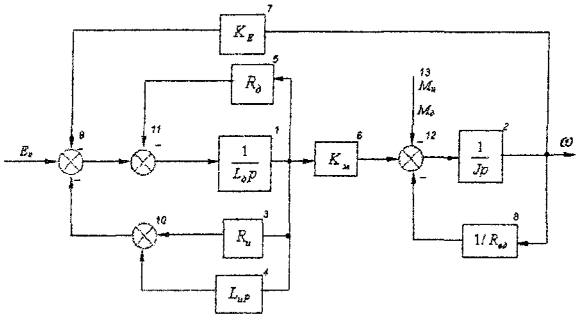


Рис. 6. Структурная схема электромеханической системы

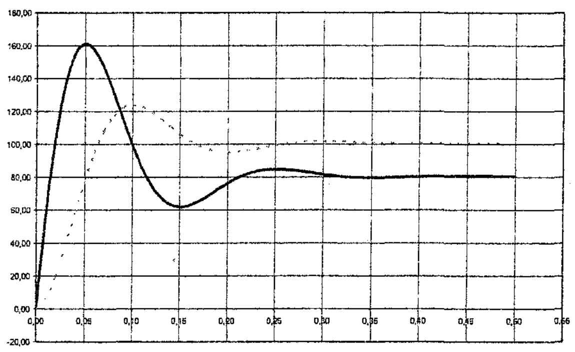
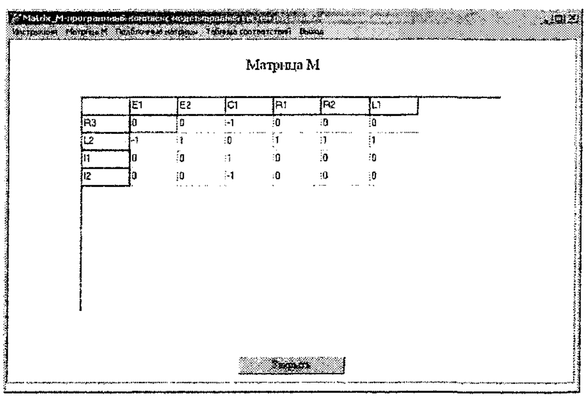


Рис. 7. Переходные процессы, результат моделирования в программе RL



	E1	E2	C1	R1	R2	L1
R3	0	0	-1	0	0	0
L2	-1	1	0	1	1	1
I1	0	0	1	0	0	0
I2	0	0	-1	0	0	0

Рис. 8. Матрица контуров и сечений, матрица *M*

Максимальные относительные погрешности результатов:

$$\delta_{IL2} = 0{,}3093236\ \%;$$

$$\delta_{UC1} = 1{,}0172819\ \%,$$

что свидетельствует о достоверности результатов моделирования в программном комплексе «Matrix_M» и о возможности применения представленной методики моделирования для исследования сложных технических систем.

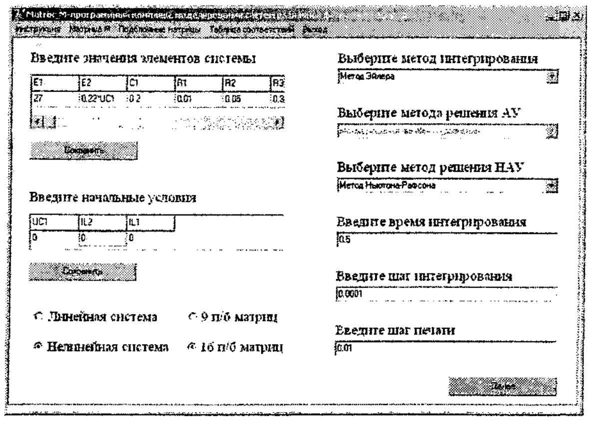


Рис. 9. Окно ввода параметров переходного процесса, задания трансформаторной связи между подсистемами

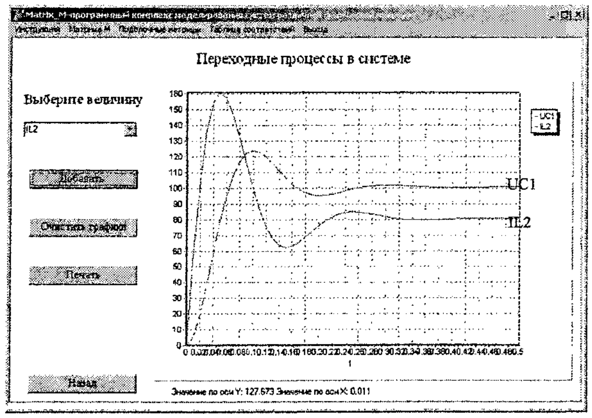


Рис. 10. Переходные процессы в электромеханической системе

Заключение

Предложенный алгоритм получения математической модели системы включает этапы:

- представление исследуемой системы совокупностью физически однородных подсистем;
- построение эквивалентной схемы подсистемы;
- формирование фундаментального покрывающего дерева графа полученной схемы, определение хорд и ветвей дерева с использованием метода переменных состояния;
- формирование матрицы *M;*
- выбор компонентных и топологических уравнений на основе метода аналогий;
- запись математической модели в виде системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

Методика построения математических моделей систем на основе метода аналогий и теории графов применяется не только для технических систем, но и для информационных цепей, что подтверждено результатами моделирования в программного комплексе «Matrix_M».

Литература

1. Корячко В.П., Курейчик В.М., Норенков ИЛ. Теоретические основы САПР: Учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 400 с.

2. Норенков И.П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. - М.: Высшая школа, 1986. — 304 с.

3. Устюгов М.Н., Надточий 3. А. Применение метода аналогий и теории графов для построения математических моделей систем различной физической природы// Системы автоматического управления: Тематический сборник научных трудов. - Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. - С. 48-53.

4. Устюгов М.Н. Автоматизированное исследование нелинейных систем управления: /Учебное пособие. - Челябинск: ЧГТУ, 2000. - 76 с.

5. Садов В.Б., Устюгов М.Н. Численные методы при решении технических задач: Учебное пособие. - Челябинск: ЧГТУ, 1995. - 69 с.