УДК 515

ЗАДАЧА О ТРАНСВЕРСАЛЯХ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В.А. Короткий, Е.А. Усманова, Л.И. Хмарова

TASK ABOUT TRANSVERSALS IN DESIGN OF SPATIAL ROD DESIGNS

V.A. Korotkiy, E.A. Usmanova, L.I. Khmarova

Изложен точный конструктивный способ построения общей прямолинейной связующей четырех произвольно расположенных в пространстве элементов стержневой конструкции. Для реализации предложенного способа используется программа построения кривой второго порядка, проходящей через пять данных точек.

Ключевые слова: начертательная геометрия, компьютерная графика, геометрическое моделирование, кривая второго порядка, линейчатая поверхность, однополостной гиперболоид, косая плоскость.

The exact constructive way of construction of the general rectilinear binding four elements of a rod design any way located in space is stated. For realization of the offered way the program of creation of a curve of the second order passing through five these points is used.

Keywords: descriptive geometry, computer graphics, geometrical modeling, curve of the second order, lineychaty surface, odnopolostny hyperboloid, slanting plane.

В архитектурном проектировании широко применяются разнообразные пространственные фермы и арки, которые могут служить не только самостоятельными несущими конструкциями, но и входить в состав тонкостенных пространственных покрытий в качестве диафрагм, оболочек и т. п. При проектировании пространственных стержневых конструкций требуется находить прямые линии (трансверсали), пересекающие некоторое множество заранее заданных прямолинейных или криволинейных стержней [1]. Подобные геометрические задачи также возникают в кристаллографии при построении моделей кристаллических решеток [2], в геодезии при расчете траекторий и в других областях техники. В своей простейшей постановке задача о трансверсалях сводится к построению общей секущей двух или трех скрещивающихся прямолинейных направляющих. При этом получают множество прямых, образующих известные линейчатые поверхности второго порядка, применяемые в строительстве и архитектуре (косые плоскости, однополостные гиперболоиды).

Особо следует рассмотреть построение общей секущей четырех произвольно расположенных в пространстве скрещивающихся прямых, так как эта задача не решается методами элементарной геометрии. Для ее точного конструктивного решения требуется использовать теорию кривых второго порядка и специализированное программное средство [3].

В современной начертательной геометрии пространство рассматривают как множество каких-либо объектов, которые называют «точками». Одним из простейших множеств является пространство прямых (линейчатое пространство). В линейчатом пространстве в качестве основного базового, неделимого элемента («точки») принята прямая линия, а все геометрические объекты рассматриваются как множества прямых. Например, плоскость рассматривают как поле прямых, а точку плоскости как пучок прямых линий. Студенты, изучающие теорию перспективы, знают, что перспективное изображение точки строится как место пересечения двух каких-либо характерных вспомогательных прямых (радиальных, перпендикулярных к картине, идущих в общую точку схода и др.). Иначе говоря, точка в перспективе моделируется двумя прямыми линиями.

Напомним, что в обычном точечном пространстве прямая моделируется двумя точками. Поэтому двумерное точечное и линейчатое двумерное пространства взаимно двойственны (оба пространства двупараметричны).

При переходе в трехмерное пространство двойственность нарушается. Если обычное точечное пространство трехпараметрично (содержит ∞^3

точек), то линейчатое пространство состоит из четырехпараметрического множества прямых (содержит ∞^4 прямых), так как каждая прямая трехмерного пространства определяется четырьмя параметрами.

Решение задачи о трансверсали четырех данных прямых *a*, *b*, *c*, *d* сводится, как известно, к построению линейчатой поверхности Θ с тремя прямолинейными направляющими, в качестве которых берут любые три прямые из четырех заданных, и к последующему поиску точек пересечения четвертой прямой с поверхностью Θ.

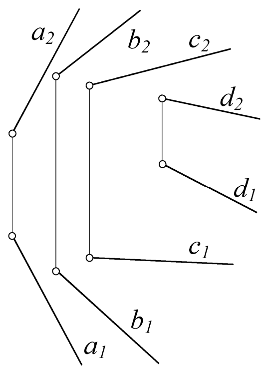
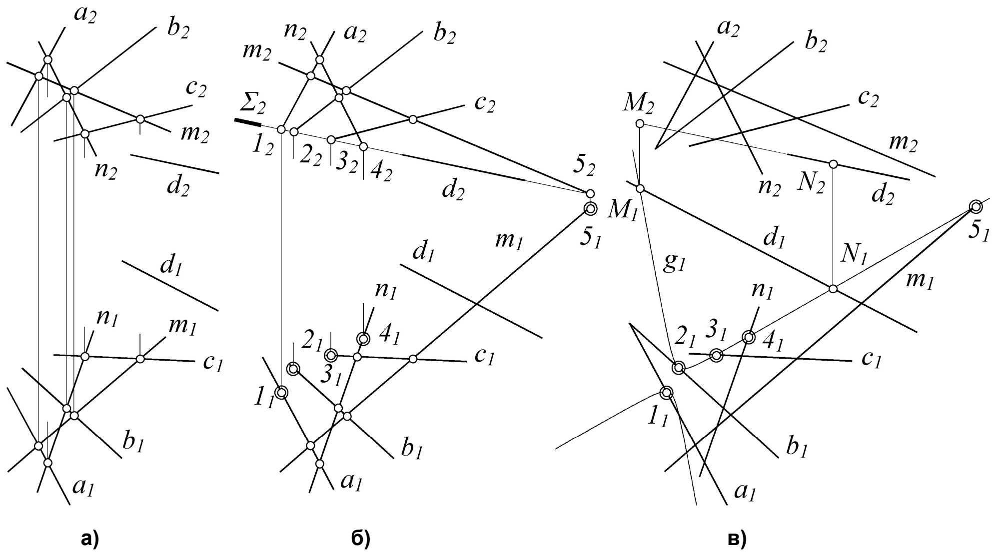


Рис. 1. Пространственная стержневая конструкция (чертеж)

Пусть дан двухпроекционный чертеж пространственной стержневой конструкции, состоящей из четырех непересекающихся стержней *a*, *b*, *c*, *d* (рис. 1). Требуется найти положение стержней, пересекающих данные, то есть построить трансверсали четырех скрещивающихся прямых. Алгоритм построения трансверсалей остается неизменным при использовании любой геометрической модели, изоморфной трехмерному евклидову пространству. В частности, задача совершенно одинаково решается как на двухпроекционном чертеже (см. рис. 1), так и на 3D-макете, выстраиваемом на экране компьютера. Изоморфизм модели является обязательным условием не только геометрического, но любого другого моделирования (математического, физического, технического и др.). Рассмотрим алгоритм решения задачи о трансверсалях (общих секущих) четырех непересекающихся прямых *a*, *b*, *c*, *d*, произвольно расположенных в пространстве.

Действие первое. Принимая любые три из четырех данных прямых (например, прямые *a*, *b*, *c*) за направляющие линейчатой поверхности Θ, строим сетку прямых, пересекающих направляющие *a*, *b*, *c*. Как известно, Θ – поверхность второго порядка (однополостный эллиптический гиперболоид), поэтому любое плоское сечение поверхности Θ – кривая второго порядка, которая вполне определена пятью своими точками. Поэтому достаточно «дополнить» сетку гиперболоида Θ всего двумя прямыми *m, n*, пересекающими данные прямые *a*, *b*, *c* (рис. 2, а). Поскольку эта задача решается известным способом, то на чертеже не показаны вспомогательные построения. После выполнения вспомогательных построений получаем сетку, содержащую пять прямых *a*, *b*, *c*, *m*, *n*, лежащих на поверхности гиперболоида Θ. Каждая из скрещивающихся прямых *a*, *b*, *c* пересекается с прямыми *m*, *n*, образуя шесть точек пересечения (см. рис. 2, а).

Действие второе. Находим точки пересечения заданной прямой *d* с поверхностью Θ. Это построение выполняется по схеме решения первой позиционной задачи. В соответствии со схемой через прямую *d* проводим вспомогательную секущую плоскость Σ, которая пересекает сетку *a*, *b*, *c*, *n*, *m* в точках *1*, *2*, *3*, *4*, *5*. Горизонтальные проекции этих точек отмечены на чертеже (рис. 2, б) двойными кружками. Через найденные точки *1…5* проходит коническое сечение *g* поверхности Θ се-



а) б) в)

Рис. 2. Построение кривой второго порядка по пяти точкам

кущей плоскостью Σ. В пересечении прямой d с коническим сечением g отмечаем точки M, N (рис. 2, в).

Отметим, что посредством обычных инструментов (циркуля, линейки) невозможно вычертить кривую второго порядка, проходящую через заданные точки *1…5*. Такая опция (вычерчивание кривой второго порядка, проходящей через пять заданных точек) для общего случая не предусмотрена ни в одной из современных графических программ. Поэтому для решения задач геометрического моделирования составлено программное средство [3], с помощью которого вычерчивается кривая второго порядка g (в данном примере – гипербола), инцидентная пяти точкам *1…5* (см. рис. 2, в). В точках M, N прямая d пересекается с поверхностью гиперболоида $\Theta(a, b, c\ldots)$.

Действие третье. Искомая трансверсаль t в соответствии с условием задачи должна пересечься с прямыми a, b, c, следовательно, прямая t должна находиться на поверхности гиперболоида $\Theta(a, b, c\ldots)$. С другой стороны, прямая t должна пересекать данную прямую d, которая имеет с гиперболоидом Θ всего две общие точки M, N. Поэтому искомая прямая должна быть образующей гиперболоида и проходить через точку N (или M). Через точку N на поверхности гиперболоида проходит единственная прямолинейная образующая, пересекающая направляющие a, b, c, которая и является искомой трансверсалью t. Для окончательного решения задачи достаточно провести через точку N (или точку M) прямую, пересекающую любые две из трех заданных прямых a, b, c.

Пусть, например, построена прямая t, проходящая через N и пересекающая прямые a, b в точках A, B (рис. 3). Построение такой прямой выполняется обычными средствами начертательной геометрии, поэтому на чертеже условно не показаны соответствующие вспомогательные построения. Найденная прямая t имеет три общие точки A, B, N с поверхностью гиперболоида Θ, следовательно, прямая t принадлежит поверхности гиперболоида и в некоторой точке C пересекает направляющую c (см. рис. 3). Прямая t является искомой трансверсалью, пересекающей данные прямые a, b, c, d в точках A, B, C, N.

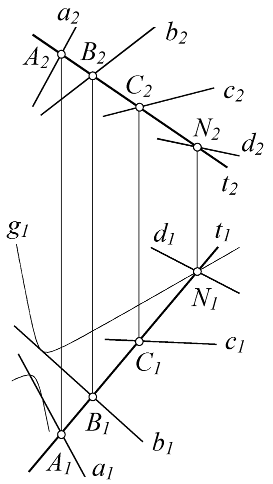


Рис. 3. Построение трансверсали

Повторяя указанное рассуждение для точки M, находим еще одно решение задачи. Очевидно, если точки пересечения M, N с гиперболоидом Θ мнимые, то задача не имеет решения. Если точки M, N совпали (прямая d касается гиперболоида Θ) – получаем одно решение. Таким образом, задача о трансверсалях четырех данных прямых может иметь два, одно или вовсе не иметь решений.

Вывод

Алгоритм решения задачи о трансверсалях может быть реализован в практике конструирования пространственных стержневых конструкций с помощью специализированных средств компьютерной графики в сочетании с классическими методами начертательной геометрии.

Литература

1. Лебедева, Н.В. Фермы, арки, тонкостенные пространственные конструкции / Н.В. Лебедева. – М.: Архитектура-С, 2006. – 120 с.

2. Гильберт, Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. – М.: Наука,1981. – 344 с.

3. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий, правообладатель ГОУ ВПО «ЮУрГУ», свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011.

Поступила в редакцию 4 июля 2012 г.