

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНСТРУКЦИЙ С РАЗРУШАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ

А.Н. Потапов, В.И. Соломин, А.В. Гербенский, Е.В. Лемберг

DYNAMIC ANALYSIS OF CONSTRUCTIONS WITH COLLAPSE RELATIONS

A.N. Potapov, V.I. Solomin, A.V. Gerbensky, E.V. Lemberg

Предложен подход к динамическому расчету поврежденных конструкций. Проведен анализ колебаний железобетонной балки и жестко защемленной прямоугольной плиты. В балке колебания вызваны разрушением промежуточной опоры, в плите – внезапным преобразованием граничных условий на коротких сторонах.

Ключевые слова: метод, временной анализ, уравнение, матрица, динамическая реакция, несущая связь, разрушение, колебание, балка, плита.

The approach to the dynamic calculation of damaged structures is given. The analysis of vibration of reinforced concrete beam and rigidly clamped rectangular plane is made. In the beam vibrations are caused by the destruction of interior support, in the plate they are caused by the sudden transformation of the bounding on the short sides.

Keywords: method, time analysis, equation, matrix, dynamic reaction, carrier, destruction, vibration, beam, plate.

В связи с ростом аварийных ситуаций, происходящих в строительном комплексе, проблема расчета несущих конструкций с выходящими связями в последнее время приобретает все большее значение. Внезапные отказы конструктивных элементов нередко приводят к изменению расчетной схемы сооружения и тем самым создают угрозу возникновения прогрессирующего обрушения [1, 2]. В нормативной документации по проектированию несущих конструкций практически отсутствуют рекомендации по расчету зданий и сооружений на живучесть при внезапном запроектном воздействии [3]. Поэтому разработка методов анализа систем с выходящими связями является актуальной задачей.

Для оценки учета эффекта разрушения связей предлагается использовать метод временного анализа дискретных диссипативных систем (ДДС), основанный на исследовании матричного квадратного уравнения (МКУ) [4].

Основные уравнения. Матричное обыкновенное дифференциальное уравнение движения упругой ДДС и векторы начальных условий имеют вид:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t); \quad (1)$$

$$Y(t_0) = Y_0; \quad \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0. \quad (2)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $C = C^T$, $K = K^T$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости; $Y(t)$, $P(t)$ – векторы перемещений и заданных внешних воздействий.

При построении решения ОДУ (1) необходимо, чтобы при t_0 удовлетворялись заданные на-

чальные условия (2). Интегрирование однородного ОДУ, вытекающего из (1), связано с нахождением решения $S \in M_n(C)$ характеристического МКУ (уравнения движения собственных форм)

$$MS^2 + CS + K = 0 \quad (3)$$

посредством фундаментальной матрицы $\Phi(t) = e^{St}$.

Полная реакция ДДС выражается через характеристики решения МКУ и имеет замкнутый вид интеграла Дюамеля [4]

$$Y(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0] + U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau \}; \quad (4)$$

$$\dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S[\Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0] + U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau] \}, \quad (5)$$

где $U = MS + S^T M + C \in M_n$; \bar{S} – комплексно-сопряженная матрица.

Реакция статически нагруженной конструкции при внезапном и поэтапном выключении связей. До разрушения несущего элемента реакция системы определяется статическим воздействием

$$Y_{st} = K^{-1}Q, \quad (6)$$

где Y_{st} , Q – векторы узловых статических перемещений и нагрузок.

Внезапное разрушение связи при t_0 приводит к снижению общей жесткости конструкции. Новая

матрица жесткости $K(t_0)$ уже не обеспечивает статическое равновесие системы. Внезапно появившиеся инерционные и диссипативные силы вызывают динамическую реакцию при свободных колебаниях ($t \geq t_0$) [5]

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re} \{ -\Phi(t-t_0)U^{-1}M\bar{S} Y_{st} + \\ &+ [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}Q \} = \\ &= 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_0)(US)^{-1} \Delta K(t_0)Y_{st} + Y_{st}(t_0) \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta K(t_0) = K - K(t_0)$ – матрица-невязка, представляющая разность матриц жесткости конструкции до и после разрушения связи; $Y_{st}(t_0) = -2\text{Re} \{ (US)^{-1}Q \} = K(t_0)^{-1}Q$ – вектор статических перемещений системы с выключенной связью; E – единичная матрица.

Матрицы $\Phi(t) = e^{St}$, U , \bar{S} в (7) строятся на основе матричного корня S , вытекающего из решения МКУ (3) при $K(t_0)$.

При поэтапном снижении жесткости разрушающейся связи этот процесс можно моделировать как работу нелинейно упругой пружины. Весь интервал времени разрушения $t \in [t_0, t_a]$ разбивается на ряд i -х промежуточных интервалов $[t_i, t_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots$), на границах которых жесткость r_i пружины изменяется внезапно ($r_i < r_{i-1}$), а внутри этих интервалов она остается постоянной. Это позволяет на каждом этапе сформировать матрицу жесткости $K(t_i)$ и создать схему анализа, при которой нелинейная работа конструкции аппроксимируется квазилинейными системами, последовательно переходящими из одного промежуточного состояния расчетной модели в другое. Каждое промежуточное состояние системы представляет собой процесс свободных колебаний. Реакция системы на квазилинейном интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]$ принимает вид

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_i)U_i^{-1}M(-\bar{S}_i Y_0 + \dot{Y}_0) + \\ &+ [\Phi(t-t_i) - E](U_i S_i)^{-1}Q \} = \\ &= 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_i)U_i^{-1}M[-\bar{S}_i (Y_0 - Y_{st}(t_i)) + \dot{Y}_0] \} + \\ &+ Y_{st}(t_i) \quad (i = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

где $Y_{st}(t_i) = -2\text{Re} \{ (U_i S_i)^{-1}Q \} = K(t_i)^{-1}Q$ – вектор статических перемещений в i -м промежуточном состоянии расчетной модели с жесткостью связи r_i .

Все параметры реакции в (8), зависящие от корня S_i : $\Phi(t-t_i) = e^{S_i(t-t_i)}$, U_i , \bar{S}_i , строятся на основе решения МКУ (3) при $K(t_i)$, оставаясь постоянными на интервале $[t_i, t_{i+1}]$. Векторы начальных условий формируются при жесткости связи r_{i-1} в конце предыдущего интервала $[t_{i-1}, t_i]$. При переходе к следующему промежуточному состоянию модели процесс построения реакции реализуется по рекуррентной схеме (8) при новой жесткости связи $r_{i+1} < r_i$ с соответствующей корректировкой формируемых матриц, включая векторы начальных условий.

Реакция поврежденной конструкции при действии импульсных сил. Рассмотрим действие синусоидальных импульсов $P(t) = P_0 \sin(\vartheta t)$, где

$\vartheta = \pi / (t_a - t_0)$, $(t_a - t_0)$ – длина импульса; P_0 – вектор амплитуд. Пусть выключение несущей связи происходит на активном этапе действия нагрузки ($t_0 < t_1 < t_a$). Тогда на интервале времени $t \in [t_0, t_1]$ реакция ДДС выражается уравнениями, в которых все необходимые параметры системы определяются для неповрежденного состояния конструкции, характеризуемого матрицей жесткости K в МКУ (3). С учетом статической реакции системы от действия постоянных нагрузок (вектор Q) реакция ДДС принимает вид

$$\begin{cases} Y(t) = 2\text{Re} \{ -\Phi(t-t_0)U^{-1}M\bar{S} Y_{st} + \\ + [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}Q + Z_p(t-t_0) \} = \\ = Y_{st} + 2\text{Re} \{ Z_p(t-t_0) \}; \\ \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S Z_p(t-t_0) \}, \end{cases} \quad (9)$$

где вектор $Z_p(t-t_0)$ матричная функция $H(t-t_0)$ определяются выражениями

$$\begin{cases} Z_p(t-t_0) = 2\text{Re} \{ [U(S^2 + E\vartheta^2)]^{-1}H(t-t_0) \} P_0; \\ H(t-t_0) = S^T [\Phi(t-t_0)^T \sin \vartheta t_0 - E \sin \vartheta t] + \\ + [\Phi(t-t_0)^T \cos \vartheta t_0 - E \cos \vartheta t] \vartheta. \end{cases} \quad (10)$$

При выключении связи реакция системы на интервале $t \in [t_1, t_a]$ будет содержать комбинацию реакций при свободных и вынужденных колебаниях:

$$\begin{cases} Y(t) = 2\text{Re} \{ Z_0(t-t_1) + Z_p(t-t_1) \} + Y_{st}(t_1); \\ \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S [Z_0(t-t_1) + Z_p(t-t_1)] \}; \\ Z_0(t-t_1) = \Phi(t-t_1)U^{-1}M[-\bar{S} (Y_0 - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0], \end{cases} \quad (11)$$

где $Y_{st}(t_1) = K(t_1)^{-1}Q$ – вектор статических перемещений поврежденной системы. Смена начальных условий проводится при $t = t_1$ с помощью систем (9), (10).

При $t \geq t_a$ ДДС совершает свободные колебания:

$$\begin{cases} Y(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_a)U^{-1}M[-\bar{S} (Y_0 - \\ - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0] \} + Y_{st}(t_1); \\ \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S \Phi(t-t_a)U^{-1}M[-\bar{S} (Y_0 - \\ - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0] \}, \end{cases} \quad (12)$$

где векторы $Y_0 = Y(t_a)$, $\dot{Y}_0 = \dot{Y}(t_a)$ определяются из системы уравнений (11).

Состояние конструкции с выключенной несущей связью моделируется с помощью матрицы жесткости $K(t_1)$, оказывающей свое влияние на параметры реакции при вынужденных и свободных колебаниях системы в (11) и (12).

Колебания железобетонной балки при разрушении промежуточной опоры. Расчетная схема балки показана на рис. 1, а. Жесткость балки $B = 162 \text{ МН}\cdot\text{м}^2$, жесткость средней опоры $r_0 = 10^5 B/l^3$. При разбивке пролета $l = 15 \text{ м}$ на 10 участков ($a = 1,5 \text{ м}$) число степеней свободы равно $n = 9$ (рис. 1, б). Элементы вектора статической узловой нагрузки Q_0 , включающей собственный вес балки, составляют $Q_{0k} = 9,622 \text{ кН}$.

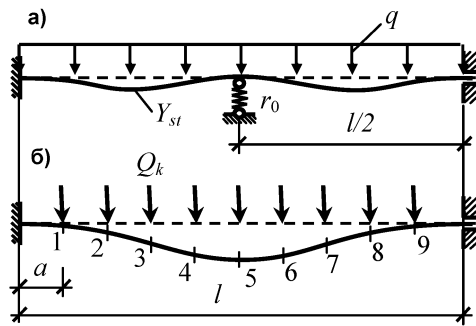


Рис. 1. Расчетная схема железобетонной балки до (а) и после (б) обрушения опоры

Учет затухания проводится по модели неоднородного демпфирования:

$$C = \alpha(KT + TK)/2 + \beta MV,$$

где $T = \gamma \omega_0^{-1}$; $V = \gamma \omega_0$; $\omega_0 = \text{diag}(\omega_{01}, \dots, \omega_{0n})$; $\gamma = 0,064$ – коэффициент потерь. Коэффициент $\alpha = 0,905$; коэффициент $\beta = 0,095$. Здесь $\omega_{0k} = \sqrt{r_{kk}/m_k}$ – частота одномассового осциллятора, полученного на основе расчетной модели (см. рис. 1, б) путем введения дополнительных жестких опор во все узлы, кроме k -го.

При поэтапном разрушении опоры реализация уравнений (8) проводилась с шагом интегрирова-

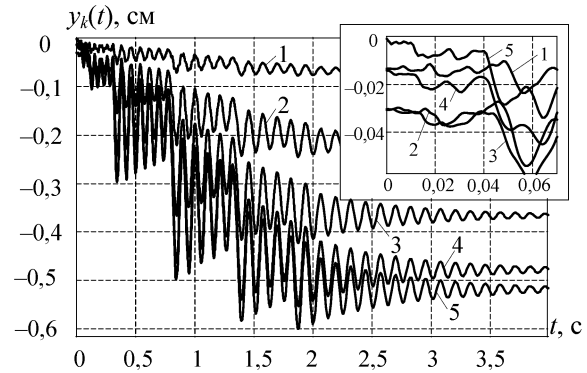
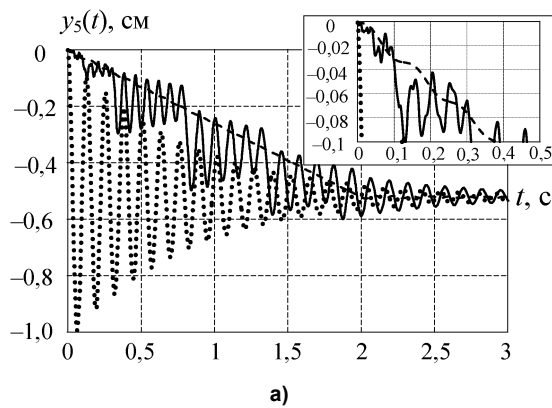


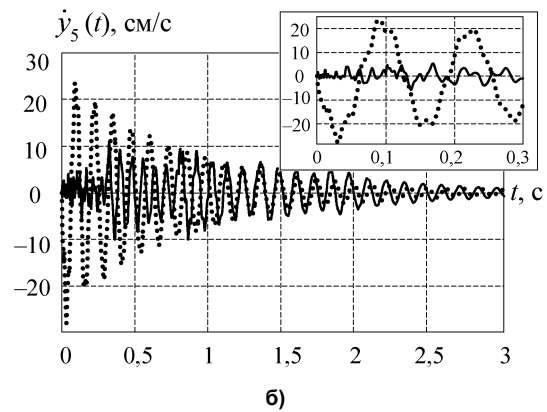
Рис. 2. Осциллограмма перемещений узлов расчетной модели балки

ния $\Delta t = 0,0005$ с на интервале $[0, 2]$ с, который разбивался на 16 частей: $t \in [0; 0,01; 0,04; 0,1; 0,3; 0,8; 1,35; 1,8; 1,86; 1,9; 1,93; 1,95; 1,96; 1,97; 1,98; 1,99; 2]$ с. На i -м промежуточном интервале $[t_i, t_{i+1}]$ жесткость r_i средней опоры вычислялась по формуле $r_i = k_i r_0$, где коэффициент, снижающий жесткость, имеет вид $k_i = (2 + \sqrt{i}/2)^{-i}$.

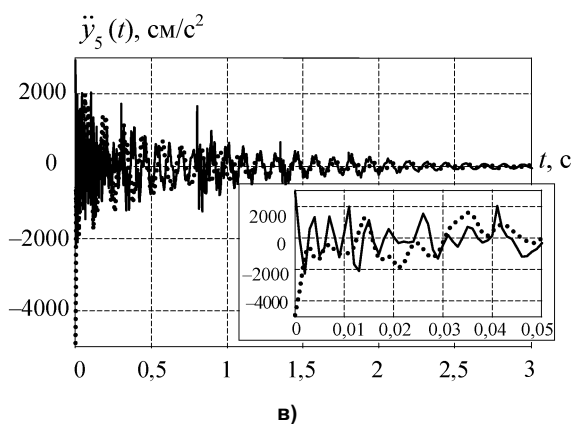
На рис. 2 приведены кривые узловых перемещений в промежуточных состояниях ДДС. Более детальный анализ параметров реакции представлен для среднего сечения модели балки (рис. 3). На рис. 3, а дано сравнение перемещений, полу-



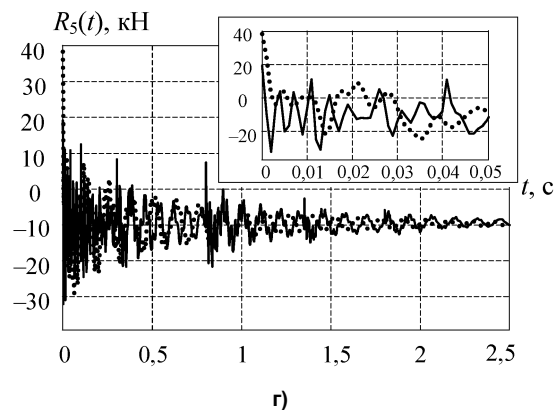
а)



б)



в)



г)

Рис. 3. Параметры реакции в 5-м узле расчетной модели: а – перемещения; б – скорости; в – ускорения; г – восстанавливающие силы (сплошная линия – реакция при поэтапном обрушении, пунктирная линия – при моделировании реакции в виде треугольного импульса, точечная линия – при внезапном обрушении)

ченных при поэтапном снижении жесткости и внезапном разрушении опоры (точечная кривая). Пунктирной линией показаны перемещения узла 5 в балке без опоры ($r_0 = 0$, см. рис.1, б) от эквивалентной нагрузки, моделирующей реакцию в средней опоре на интервале $[0, 2]$ с по линейному закону. При этом максимальная величина эквивалентной нагрузки соответствует реакции в средней опоре на схеме (см. рис. 1, а). Все кривые асимптотически стремятся к статическому перемещению расчетной модели балки без промежуточной опоры (см. рис. 1, б), но при этом переходные процессы резко отличаются друг от друга.

Колебания жестко защемленной по контуру плиты при внезапном изменении граничных условий. Прямоугольная железобетонная плита находится под действием распределенной нагрузки $q = 2 \text{ кН/м}^2$. Размеры плиты: $l = 24 \text{ м}$, $b = 12 \text{ м}$, $h = 0,16 \text{ м}$. Дискретная модель плиты построена на сетке с размерами ячейки $4 \times 2 \text{ м}$ (рис. 4), что соответствует числу степеней свободы $n = 25$.

Рассмотрены варианты внезапного преобразования жестких заделок в шарнирное опирание на коротких сторонах плиты в условиях статического нагружения и импульсного воздействия. Матрицы жесткости в исходном и поврежденных состояниях расчетной модели строились в комплексе «ЛИРА». Матрица демпфирования принималась по той же модели, что и в предыдущей задаче.

Для плиты, находящейся в положении стати-

ческого равновесия, рассматривалось последовательное разрушение угловых связей сначала на левой короткой стороне при $t_0 = 0$, затем через промежуток времени $t_1 = 0,2 \text{ с}$ на противоположной стороне. Осциллограммы перемещений (а) и скоростей (б) центрального 13-го узла дискретной модели показаны на рис. 5 сплошной линией. Пунктиром изображены те же параметры реакции, полученные при изменении граничных условий только на левой стороне модели.

Рассматривалось действие синусоидального импульса длиной $t_a = 0,03 \text{ с}$ и амплитудным значением $P_0 = 200 \text{ кН}$. Удар наносился в 11-м узле, после чего разрушение угловой связи на левой стороне плиты происходило при $t_1 = 0,02 \text{ с} < t_a$. На рис. 6 приведены осциллограммы перемещений (а), скоростей (б) и ускорений (в) 11-го узла модели плиты, из которых отчетливо видно, что перемещения и скорости в момент изменения граничных условий сохраняют свою непрерывность (при этом кривая скоростей имеет перелом), а ускорения терпят разрыв.

Выводы. В рамках теории временного анализа показана возможность динамического расчета поврежденных конструкций при сложном характере демпфирования. Рассмотрены системы, в которых разрушение связи вызвано действием как статической, так и динамической нагрузки. Реализация задач, проводимых в математической системе «MATLAB», свидетельствует о высокой эффективности подхода.

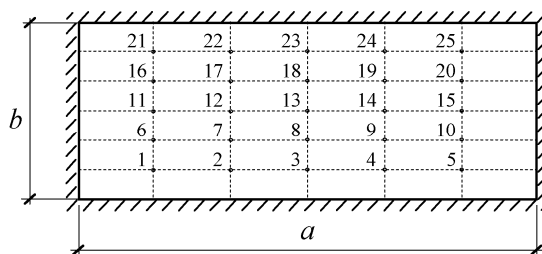


Рис. 4. Расчетная схема плиты

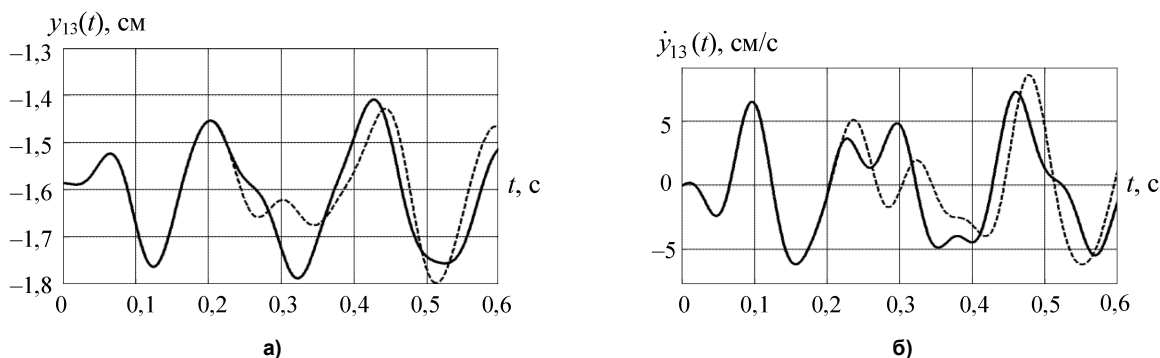


Рис. 5. Перемещения (а) и скорости (б) 13-го узла расчетной модели при разрушении угловых связей (заделок) на обеих коротких сторонах плиты (левая заделка выключается при $t = 0$, правая – при $t = 0,2 \text{ с}$; пунктиром показаны параметры реакции при выключении только левой заделки)

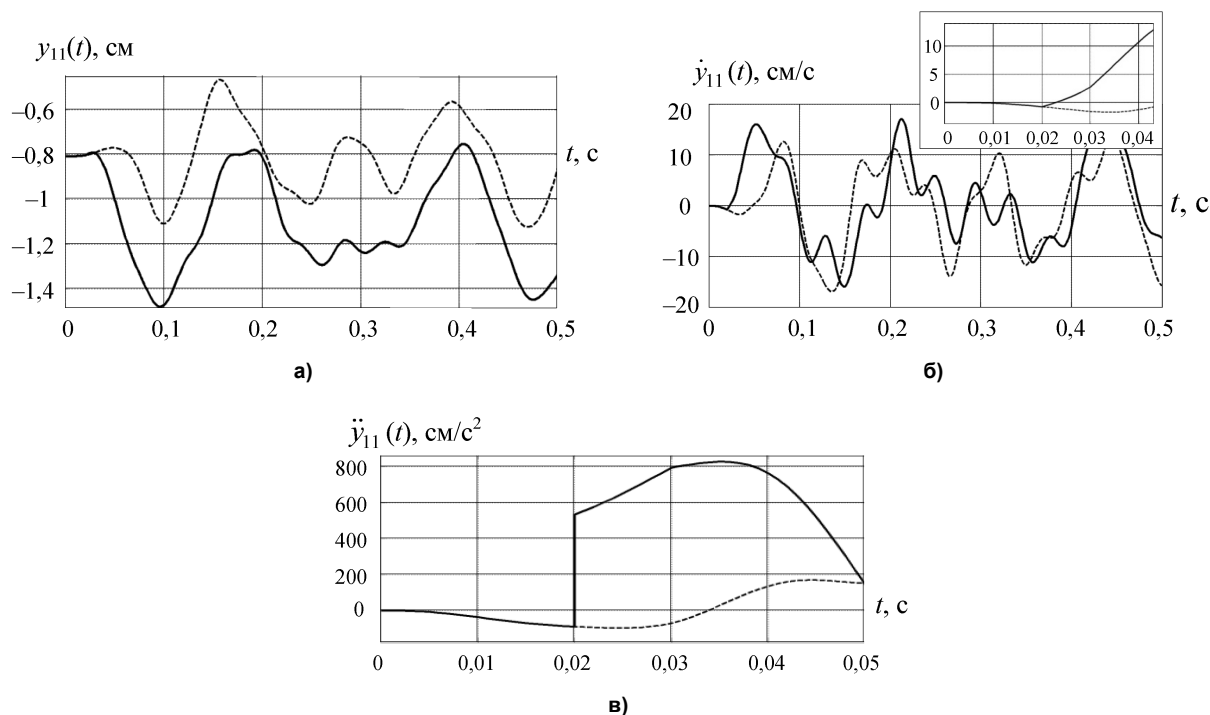


Рис. 6. Перемещения (а), скорости (б) и ускорения (в) 11-го узла модели при выключении заделки на левой стороне (при $t = 0,02$ с) вследствие действия импульса (пунктир – реакция неповрежденной системы)

Литература

1. Еремеев, П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // *Строительная механика и расчет сооружений*. – М., 2006. – № 2. – С. 65–72.
2. Чернов, Ю.Т. К расчету систем с выключающимися связями / Ю.Т. Чернов // *Строительная механика и расчет сооружений*. – М., 2010. – № 4. – С. 53–57.
3. Андросова, Н.Б. Некоторые предложения к нормированию параметров живучести сооружений / Н.Б. Андросова, Н.В. Клюева, В.И. Кол-

чунов // *Вестник отделения строительных наук*. – М.; Орел; Курск: РААСН. – 2011. – Вып. 15. – С. 17–25.

4. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: моногр. / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

5. Потапов, А.Н. Динамический анализ поврежденных конструкций / А.Н. Потапов, А.В. Гербенский, Е.В. Лемберг // *Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Методы граничных и конечных элементов: тез. докл. XXIV Междунар. конф., 28–30 сент. 2011 г.* – СПб., 2011. – Т. 1. – С. 89–91.

Поступила в редакцию 15 февраля 2012 г.