УДК 517.948

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.В. Боков

При определении коэффициента гидропроводности нефтяного пласта методом гидродинамического прослушивания скважин возникает необходимость решения обратной задачи фильтрации. При этом важно поставить задачу таким образом, чтобы обеспечить единственность решения. В статье определяются условия, достаточные для единственности решения обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача фильтрации, преобразование Лапласа, задача Штурма – Лиувилля.

Введение

Исследованию обратных коэффициентных задач посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2]). Особое внимание при этом уделяется доказательству сходимости метода решения и формулировке условий, обеспечивающих существование и единственность решения.

В данной работе формулируются такие условия для обратной задачи фильтрации со смешанными граничными условиями для дифференциального оператора более общего вида, чем в [1].

1. Постановка прямой задачи

Процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\,\sigma(\rho)\,\frac{\partial p}{\partial \rho}\right], \tag{1}$$

где $p = p(\rho, t)$ – давление в пласте, $\sigma = \sigma(\rho)$ – коэффициент гидропроводности.

Решение уравнения (1) будем искать в области изменения переменных (ρ, t) : $t \geq 0,\ \ 0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$.

Сделаем следующие предположения:

а) известно начальное давление в пласте

$$p(\rho, 0) = p_0; \tag{2}$$

б) на границе пласта выполняется условие «непротекания»

$$\frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad t \geq 0; \tag{3}$$

в) известно забойное давление

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Предположим, что коэффициент гидропроводности $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\rho) \geq d > 0 \text{ при } \rho \in [r_0, \bar{r}]. \tag{5}$$

Задачу (1) – (4) называют прямой задачей фильтрации. При известной функции $\sigma(\rho)$, удовлетворяющей условию (5), и при дополнительных предположениях о гладкости функций $\sigma(\rho)$, $f_1(t)$ и $p(\rho, t)$ эта задача имеет единственное решение.

2. Постановка обратной задачи

Обратная задача заключается в определении неизвестного коэффициента $\sigma(\rho)$ в уравнении (1) по дополнительной информации о решении задачи (1) – (4).

Предположим, что нам известен дебит скважины

$$\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{6}$$

где $g(t)$ – ограниченная и непрерывная функция, $t \geq 0$.

Так как при неизвестной функции $\sigma(\rho)$ решение $p(\rho, t)$ задачи (1) – (4) также неизвестно, то обратную задачу сформулируем как задачу определения двух функций $\sigma(\rho)$ и $p(\rho, t)$, удовлетворяющих условиям (1) – (6).

Сделав в задаче (1) – (6) замену переменной $u(\rho, t) = p(\rho, t) - p_0$, перейдем к новой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho\, \sigma(\rho)\, \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \tag{7}$$

$$u(\rho, 0) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \tag{9}$$

$$u(r_0, t) = f(t), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{11}$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$, $f(t) = f_1(t) - p_0$.

Будем предполагать, что функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \; f(t) = 0 \text{ при } t \geq t_0, \; f(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \geq 0, \tag{12}$$

а функция $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию (5) и

$$\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]. \tag{13}$$

Определение 1. *Решением обратной задачи (7) – (11) назовем пару функций $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$ таких, что $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условиям (5) и (13), $u(\rho, t)$ имеет непрерывные частные производные* $\big(u(\rho, t), u'_\rho(\rho, t), u''_{\rho\rho}(\rho, t), u'_t(\rho, t) \in C\big[(r_0, \bar{r}) \times (0, \infty)\big]\big)$, *функции* $\sigma(\rho)$ *и* $u(\rho,t)$ *удовлетворяют уравнению (7), а функция* $u(\rho,t)$ *удовлетворяет условиям (8) – (11).*

Лемма 1. *Если выполнены сформулированные выше условия, то при* $t \to \infty$ $u(\rho,t) \to 0$, $u'_\rho(\rho,t) \to 0$, $u'_t(\rho,t) \to 0$ *и* $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\big[\rho\sigma(\rho)\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}\big] \to 0$ *равномерно на отрезке* $[r_0,\bar r]$.

Доказательство. Пусть $\sigma(\rho)$ и $u(\rho,t)$ – решение обратной задачи (7) – (11). Тогда ввиду того, что $f(t)=0$ при $t \ge t_0$, функция $u(\rho,t)$ для $t \ge t_0$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\rho\sigma(\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big], \quad 0 < r_0 \le \rho \le \bar r, \ t \ge t_0,$$

$$u(r_0,t) = u'_\rho(\bar r,t) = 0, \ t \ge t_0,$$

$$u(\rho,t_0) = \psi(\rho), \ r_0 \le \rho \le \bar r,$$

где $\psi(\rho) \in C^1[r_0,\bar r]$, $\psi(r_0) = \psi'(\bar r) = 0$.

Используя для решения этой задачи метод разделения переменных $(u(\rho,t) = y(\rho)v(t))$, получим, что

$$u(\rho,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{r_0}^{\bar r}\psi(\xi)\,y_n(\xi)\,\xi\,d\xi\right) e^{-\lambda_n(t-t_0)}y_n(\rho), \tag{14}$$

где $\lambda_n \ge 0$ и $y_n(\rho)$ – собственные значения и нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{gathered}[\rho\,\sigma(\rho)y'(\rho)]' + \lambda\,\rho\,y(\rho) = 0,\\ y(r_0) = y'(\bar r) = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Покажем, что собственные значения $\lambda_n > 0$ при $n \ge 0$. Так как предполагается, что $\lambda_n \ge 0$ упорядочены по возрастанию, то достаточно показать, что $\lambda_0 > 0$ $(\lambda_0 \ne 0)$.

Предположим противное, $\lambda_0 = 0$. Тогда

$$\big(\rho\,\sigma(\rho)\,y_0'(\rho)\big)' = 0, \tag{16}$$

а

$$y_0(r_0) = 0, \ y_0'(\bar r) = 0. \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$\rho\,\sigma(\rho)\,y_0'(\rho) = C_1,$$

и второе из условий (17) влечет $C_1 = 0$. Поэтому

$$y_0'(\rho) = 0, \tag{18}$$

и значит,

$$y_0(\rho) = C_2.$$

Используя первое из условий (17), получим, что $C_2 = 0$, а $y_0(\rho) \equiv 0$, что противоречит условию нормировки собственных функций $y_n(\rho)$. Таким образом, $\lambda_n > 0$ для $n \geq 0$.

Из положительности собственных значений λ_n и разложения (14) следует утверждение леммы. $\square$

Введем функцию $V(\rho, s)$, являющуюся преобразованием Лапласа от $u(\rho, t)$ по переменной t

$$V(\rho, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(\rho, t)\, dt.$$

На основании леммы 1 из (7) – (10) следует, что для значений комплексного параметра s таких, что $Re\, s \geq s_0 > 0$, функция $V(\rho, s)$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho} \left[\rho\sigma(\rho) V'_\rho\right]'_\rho - sV = 0, \tag{19}$$

$$V'_\rho(\bar{r}, s) = 0, \tag{20}$$

$$V(r_0, s) = \varphi(s), \tag{21}$$

где $\varphi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$. Кроме того функция $V(\rho, s)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$V'_\rho(r_0, s) = \mu(s), \tag{22}$$

где $\mu(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$.

Рассмотрим функцию $W(\rho, s)$, являющуюся решением задачи Коши для уравнения (19) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} W(\bar{r}, s) &= 1, \\ W'_\rho(\bar{r}, s) &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как функции $V(\rho, s)$ и $W(\rho, s)$ являются решениями дифференциального уравнения (19) и $V'_\rho(\bar{r}, s) = W'_\rho(\bar{r}, s)$, то из теоремы [3, с. 179] следует, что они линейно зависимые, то есть

$$V(\rho, s) = C(s)\, W(\rho, s). \tag{24}$$

Тогда из (21) и (24) следует, что

$$\varphi(s) = C(s)\, W(r_0, s), \tag{25}$$

а из (22) и (24) следует, что

$$\mu(s) = C(s)\, W'_\rho(r_0, s). \tag{26}$$

Из последнего равенства можно выразить $C(s)$:

$$C(s) = \frac{\mu(s)}{W'_\rho(r_0, s)}. \tag{27}$$

Лемма 2. *При сформулированных выше условиях множество нулей функции $W(r_0, s)$ не пересекается с множеством нулей функции $W'_\rho(r_0, s)$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть найдется s_0 такое, что

$$W(r_0, s_0) = W'_\rho(r_0, s_0) = 0. \tag{28}$$

Тогда $W(\rho, s_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (19) и начальными условиями (28). Следовательно, для любого $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ $W(\rho, s_0) = 0$, что противоречит условию $W(\bar{r}, s_0) = 1$. □

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\rho}\,[\rho\sigma(\rho)\,y'(\rho)]' = \lambda\,y(\rho). \tag{29}$$

с краевыми условиями

$$y(r_0) = 0,\ y'(\bar{r}) = 0 \tag{30}$$

или

$$y'(r_0) = 0,\ y'(\bar{r}) = 0. \tag{31}$$

Лемма 3. *При сформулированных выше условиях значения $s = s_0$ и $s = \bar{s_0}$ являются, соответственно, нулями функций $W(r_0, s)$ и $W'_\rho(r_0, s)$ тогда и только тогда, когда числа $\lambda_0 = -s_0$ и $\bar{\lambda_0} = -\bar{s_0}$ являются собственными значениями задач Штурма-Лиувилля (29), (30) и (29), (31).*

Доказательство. Так как функция $W(\rho, s_0)$ является решением уравнения (19) с $s = s_0$, то функция $y_0(\rho) = W(\rho, s_0)$ является решением уравнения (29) с $\lambda_0 = -s_0$. Второе краевое условие в (30) для $y_0(\rho)$ следует из (23), а первое из того, что s_0 является нулем функции $W(r_0, s)$. Таким образом, $y_0(\rho)$ является решением задачи (29), (30). Это решение нетривиальное, так как в силу (23) $y_0(\bar{r}) = W(\bar{r}, s_0) = 1$. Следовательно, λ_0 является собственным значением задачи (29), (30).

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Действительно, если λ_0 является собственным значением, а $y_0(\rho)$ – собственной функцией задачи (29), (30), то на основании первого из условий (30) значение $s_0 = -\lambda_0$ является нулем функции $W(r_0, s)$.

Теперь предположим, что $s = \bar{s_0}$ является нулем функции $W'_\rho(r_0, s)$. Тогда из того, что функция $W(\rho, \bar{s_0})$ является решением уравнения (19) с $s = \bar{s_0}$, следует, что функция $\bar{y_0}(\rho) = W(\rho, \bar{s_0})$ является решением уравнения (29) с $\bar{\lambda_0} = -\bar{s_0}$. Второе краевое условие в (31) следует из (23), а первое – из того, что $\bar{s_0}$ является нулем функции $W'_\rho(r_0, s)$.

Таким образом, $\bar{y_0}(\rho)$ является решением задачи (29), (31). Это решение нетривиальное, так как в силу (23) $\bar{y_0}(\bar{r}) = W(\bar{r}, \bar{s_0}) = 1$. Следовательно, $\bar{\lambda_0}$ является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (29), (31).

Обратно, если $\bar{\lambda_0}$ является собственным значением, а $\bar{y_0}(\rho)$ – собственной функцией задачи (29), (31), то $\bar{s_0} = -\bar{\lambda_0}$ на основании первого из условий (31) есть ноль функции $W'_\rho(r_0, s)$. □

Предположим теперь, что функция $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]$ удовлетворяет условию (5), и $\sigma'(\bar{r}) = 0$. Вернемся к решению $W(\rho, s)$ задачи Коши (23) для уравнения (19).

Лемма 4. *При сформулированных выше условиях на функцию $\sigma(\rho)$ функции $W(\rho, s)$ и $W'_\rho(\rho, s)$ для каждого фиксированного $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ являются целыми функциями комплексного параметра s.*

Доказательство. Применяя преобразование Лиувилля ([4], с.35) к уравнению (19), заменим функцию $W(\rho, s)$ на функцию $z(x, s)$, определяемую параметрически следующим образом:

$$x = \frac{1}{c} \int_{r_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \tag{32}$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \tag{33}$$

а x – новая независимая переменная, и

$$z(\rho, s) = \sqrt{\rho}\, \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho)\, W(\rho, s). \tag{34}$$

Подставляя выражения (32) – (34) в уравнение (19), приведем его к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x)\, z - c^2 s z = 0,\ 0 \le x \le \pi, \tag{35}$$

где c задается формулой (33), а

$$a(x) = -\frac{1}{\theta(x)} \frac{d^2\theta(x)}{dx^2}, \tag{36}$$

где $\theta = \theta(x)$ определена параметрически формулой (32) и равенством

$$\theta(\rho) = \sqrt{\rho}\, \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho). \tag{37}$$

Теперь сделаем замену в краевых условиях (23):

$$z(\pi, s) = \sqrt{\bar{r}}\, \sigma^{\frac{1}{4}}(\bar{r}) \tag{38}$$

и

$$z'_x(\pi, s) = \frac{c}{2\sqrt{\bar{r}}}\, \sigma^{\frac{3}{4}}(\bar{r}). \tag{39}$$

Далее введем новую переменную $\tau = \pi - x$ и перейдем от функции $z(x, s)$ к функции $w(\tau, s)$, которую определим формулой

$$w(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}\sqrt{\sigma(\bar{r})} + \frac{c^2 \sigma^{\frac{3}{2}}(\bar{r})}{4\bar{r}}}}\, z(\pi - \tau, s). \tag{40}$$

Используя формулу (40), легко проверить, что функция $w(\tau, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + a(\pi - \tau)\, w - c^2 s w = 0,\ 0 \le \tau \le \pi. \tag{41}$$

При этом условия (38) и (39) для функции $w(\tau, s)$ будут выглядеть следующим образом:

$$w(0, s) = \sin\alpha, \tag{42}$$

а

$$w'_\tau(0, s) = -\cos\alpha, \tag{43}$$

где

$$\alpha = \arcsin\left[\frac{\sqrt{\bar r}\,\sigma^{\frac{1}{4}}(\bar r)}{\sqrt{\bar r\sqrt{\sigma(\bar r)}+\frac{c^2\sigma^{\frac{3}{2}}(\bar r)}{4\bar r}}}\right]. \tag{44}$$

Из теоремы [5, с. 14–15] следует, что для каждого фиксированного $\tau \in [0,\pi]$ функции $w(\tau,s)$ и $w'_\tau(\tau,s)$ являются целыми функциями s, а из формул (34) и (40) будет следовать утверждение леммы. □

Так как функция $W(\rho,s)$ представляет собой решение уравнения (19) с условиями (23), то из леммы 4 следует, что $W(\rho,s)$ и $W'_\rho(\rho,s)$ при фиксированном ρ являются аналитическими функциями комплексного переменного s во всей комплексной плоскости.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что $\sigma(\rho) \in C^2[r_0,\bar r]$, $\sigma'(\bar r) = 0$ и выполняется условие (5).

Пусть $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho,t)$ $(i = 1,2)$ – решения обратной задачи (7) – (11). Обозначим через $V_i(\rho,s)$ преобразование Лапласа от $u_i(\rho,t)$, а через $W_i(\rho,s)$ – решения задачи Коши для уравнения (19) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$ и начальными условиями (23). Для краткости $(W_i(\rho,s))'_\rho|_{\rho=r_0}$ будем обозначать $W'_i(r_0,s)$.

Из (10) следует, что $V_1(r_0,s) = V_2(r_0,s)$. Тогда, используя формулы (24) и (27), получим, что при $Re\, s \geq s_0 > 0$

$$\frac{W_1(r_0,s)}{W'_1(r_0,s)} = \frac{W_2(r_0,s)}{W'_2(r_0,s)}. \tag{45}$$

Из леммы 4 следует, что функции $W_i(r_0,s)/W'_i(r_0,s)$ при $i = 1,2$ являются аналитическими функциями комплексного переменного s во всей комплексной плоскости за исключением нулей $W'_i(r_0,s)$, являющихся особыми точками.

Из (45) следует, что нули и особые точки функций $W_1(r_0,s)/W'_1(r_0,s)$ и $W_2(r_0,s)/W'_2(r_0,s)$ совпадают.

Используя лемму 2, окончательно получим, что все нули функций $W_1(r_0,s)$ и $W_2(r_0,s)$ совпадают, и все нули функций $W'_1(r_0,s)$ и $W'_2(r_0,s)$ также совпадают.

Таким образом, на основании леммы 3 для любого n выполняются соотношения

$$\lambda_n^1 = \lambda_n^2 \tag{46}$$

и

$$\bar\lambda_n^1 = \bar\lambda_n^2, \tag{47}$$

где $\{\lambda_n^i\}$ при $i = 1,2$ – все собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (29) – (30) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, упорядоченные по возрастанию, а $\{\bar\lambda_n^i\}$ – все собственные значения задачи (29), (31) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, также упорядоченные по возрастанию.

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям (12). Тогда, если $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho,t)$, $i = 1,2$ – решения обратной задачи (7)-(11) такие, что $\sigma'_1(\bar r) = \sigma'_2(\bar r) = \sigma'_1(r_0) = \sigma'_2(r_0) = 0$, $\int_{r_0}^{\bar r}\frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_1(\xi)}} = \int_{r_0}^{\bar r}\frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_2(\xi)}}$, а также $\sigma_1(r_0) = \sigma_2(r_0) = \sigma_1(\bar r) = \sigma_2(\bar r)$, и значение $\sigma(r_0)$ нам известно, то $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ для $\rho \in [r_0,\bar r]$ и $u_1(\rho,t) = u_2(\rho,t)$ для $\rho \in [r_0,\bar r], t \geq 0$*

Доказательство. Сделав в уравнении (29) замену переменных Лиувилля (32), (33) и

$$z(\rho) = \sqrt{\rho}\, \sigma^{\frac{1}{4}}(\rho)\, y(\rho), \tag{48}$$

перейдем от функции $y_i(\rho, \lambda)$ к функции $z_i(x, \lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + q_i(x)\, z_i = c^2 \lambda\, z_i,\ 0 \le x \le \pi,\ i = 1, 2, \tag{49}$$

где функции $q_i(x) = -a_i(x)$ определяются формулами (32), (33), (36), (37) и являются непрерывными на отрезке $[0, \pi]$. Сделав еще одну замену

$$w_i(\tau, \lambda) = z_i(\pi - \tau, \lambda),\ \tau = \pi - x,\ 0 \le \tau \le \pi,\ i = 1, 2,$$

получим уравнение для функции $w_i(\tau, \lambda)$

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} + q_i(\pi - \tau)\, w_i = c^2 \lambda\, w_i,\ 0 \le \tau \le \pi,\ i = 1, 2. \tag{50}$$

Теперь преобразуем граничные условия (30) и (31). Получим, что условиям (30) соответствует пара граничных условий

$$w_i(\pi, \lambda) = 0,\ i = 1, 2, \tag{51}$$

$$w_i(0, \lambda) \cos(\beta) - w_i'(0, \lambda) \sin \beta = 0,\ i = 1, 2, \tag{52}$$

где $\beta = \arcsin\left(1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2\bar{r}}\right)^2 \sigma(\bar{r})}\right)$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Условиям (31) соответствуют граничные условия (52) и

$$w_i(\pi, \lambda) \cos(\gamma) - w_i'(\pi, \lambda) \sin \gamma = 0,\ i = 1, 2, \tag{53}$$

где $\gamma = \arcsin\left(1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 \sigma(r_0)}\right)$ и $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, задача Штурма – Лиувилля (50) – (52) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\mu_n^i\}$. При этом из формулы (46) и условий теоремы следует, что для любого n

$$\mu_n^1 = \mu_n^2. \tag{54}$$

Аналогично, задача Штурма – Лиувилля (50), (52) и (53) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\bar{\mu}_n^i\}$ такую, что на основании (47) и условий теоремы следует, что для любого n

$$\bar{\mu}_n^1 = \bar{\mu}_n^2. \tag{55}$$

Из теоремы, приведенной в [6], и равенств (54) и (55) следует, что для любого $x \in [0, \pi]$

$$a_1(x) = a_2(x). \tag{56}$$

Таким образом, обозначив $a_i(x)$ через $a(x)$ и воспользовавшись формулами (36) и (37), получим, что

$$\frac{d^2\theta_i(x)}{d\,x^2} + a(x)\,\theta_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \tag{57}$$

где

$$\theta_i(0) = \sqrt{r_0}\,\sigma^{\frac{1}{4}}(r_0) \tag{58}$$

и

$$\theta_i'(0) = \frac{c}{2\sqrt{r_0}}\,\sigma^{\frac{3}{4}}(r_0). \tag{59}$$

Задача Коши (57) – (59) для линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет единственное решение, и, следовательно,

$$\theta_1(x) = \theta_2(x).$$

Используя формулу (37), получаем, что

$$\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho) \text{ при } \rho \in [r_0, \bar{r}].$$

Но тогда и решения прямой задачи (7) – (10) при соответствующих ограничениях на функции $u_i(\rho, t)$ и $f(t)$ будут при любых значениях $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ и $t \geq 0$ удовлетворять условиям

$$u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t),$$

что и доказывает теорему.

□

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант р_урал_а №10-01-96000).

Литература

1. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
3. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Редакция технико-теоретической литературы, 1938. – 376 с.
4. Мартыненко, Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами / Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
5. Левитан, Б.М. Введение в спектральную теорию / Б.М. Левитан, И.С. Саргосян. – М.: Наука, 1970. – 672 с.
6. Levinson, N. The inverse Sturm–Liouville problem / N. Levinson // Math. Tidsskr. Ser. B. – 1949. – P. 25–30.

Александр Викторович Боков, старший преподаватель, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), bokov@susu.ac.ru.

ON THE UNIQUENESS OF THE INVERSE PROBLEM OF UNSTEADY FILTRATION

A.V. Bokov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

When determining the coefficient of the hydraulic conductivity of oil layer by the method of the hydrodynamic listening of mining holes well is necessary to solve the inverse task of filtration. Thus it is important to set the task so that to provide the uniqueness of the decision. In this article sufficiency conditions for the uniqueness of the inverse problem are defined.

Keywords: inverse problem of filtration, Laplace transform, Sturm-Liouville problem.

References

1. Denisov A.M. Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the Theory of Inverse Problems]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1994. 208 P.
2. Kabanikhin S.I. Obratnye i hekorrektnye zadachi [Inverse and Ill-posed Problems]. Novosibirsk, Science Press, 2009. 457 P.
3. Stepanov V.V. Kurs differentsialnykh uravnenij [Course on Differential Equations]. Moscow, Publishing house of technical and theoretical literature, 1938. 376 P.
4. Martynenko N.A., Pustyl'nikov L.M. Konechnye integralnye preobrazovaniya i ikh primenenie k issledovaniyu sistem s raspredelyonnymi parametrami [Finite Integral Transformations and their Application to the Study of Systems with Distributed Parameter]. Moscow, Publishing House "Nauka", 1986. 304 P.
5. Levitan B.M., Sargosyan I.S. Vvedenie v spektralnuyu teoriyu [Introduction to Spectral Theory]. Moscow, Publishing House "Nauka", 1970. 672 P.
6. Levinson, N. The Inverse Sturm–Liouville Problem. // Math. Tidsskr. Ser. B., 1949. P. 25–30.

Поступила в редакцию 8 ноября 2012 г.