

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННО ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ¹

О.В. Фесько

Предложен метод расчета априорной оценки на основе достаточных условий оптимальности Кротова, позволяющей судить о качестве приближенного решения, полученного в ходе работы программы улучшения управления для задач оптимизации динамических систем. Метод реализован в виде параллельного алгоритма, являющегося частью программного комплекса оптимизации динамических систем на множествах кусочно-постоянных и кусочно-линейных управлений. Представленная процедура, кроме того, используется на этапе поиска начального управления при решении задач оптимального управления. Применение алгоритма и анализ эффективности его распараллеливания в рамках системы параллельного программирования с открытой архитектурой OpenTS демонстрируется в вычислительных экспериментах на примерах решения задач об оптимизации бифункциональной каталитической смеси и оптимального производства белка в биореакторе.

Ключевые слова: оптимальное управление, достаточные условия оптимальности Кротова, оценка управления, параллельный алгоритм.

Введение

При использовании различных численных методов решения задач оптимального управления крайне важное значение представляет собой возможность получения количественной оценки найденного приближенного управления, которая позволяет судить о точности, близости к точному оптимуму. Такую возможность открывают достаточные условия оптимальности Кротова [1].

В работе [2] рассматривалась задача оптимального управления вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_I) = x_I, \quad t \in [t_I, t_F], \\ u(t) &\in D_u = \{u(t) \mid \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}\}, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ – кусочно-гладкие. Управление $u = (u_1, \dots, u_p)^T \in \mathbb{R}^p$ принадлежит одному из двух классов: кусочно-линейному

$$u(t) = \frac{((w^{2i+1} - w^{2i})t - (\tau_i w^{2i+1} - \tau_{i+1} w^{2i}))}{(\tau_{i+1} - \tau_i)}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad (2)$$

или кусочно-постоянному $u(t) = w^i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, m}$, где m – число моментов переключений при разбиении $t_I = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m+1} = t_F$. На параметры управления наложены ограничения типа $w^i \in W = \{w^i \mid \underline{u} \leq w^i \leq \bar{u}\}$.

Задача (1) была сведена к задаче условной конечномерной минимизации функции многих переменных $G(w, \tau)$ [3, 4]. Процесс решения полученной задачи состоит в поочередном применении численных алгоритмов: метода Рунге–Кутты для решения задачи Коши и комбинации метода Ньютона с модифицированным методом градиентного спуска для минимизации многоэкстремальной функции $G(w, \tau)$. Требуется количественно оценить полученное при использовании данного подхода приближенное управление.

¹Статья рекомендована к публикации программным комитетом международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2012».

1. Оценки приближенно оптимального решения

В силу рассматриваемых классов управлений непрерывную задачу (1) сведем к дискретной задаче оптимального управления. Введем множество индексов $K = \{0, 1, \dots, m + 1\}$ для моментов переключений $t_I = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{m+1} = t_F$, где m — число моментов переключений. В случае *кусочно-постоянного* управления $u(t) = w(k)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in K$, эквивалентная непрерывной задаче (1) дискретная задача примет вид

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \mu(k, z(k), w(k)), \quad k \in \{0, 1, \dots, m+1\}, \\ z(0) &= z_0 = x_I, \quad w(k) \in W = \{w(k) \mid \underline{u} \leq w(k) \leq \bar{u}\}, \\ F(z(m+1)) &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция $\mu(k, z(k), w(k))$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(\xi) = f(\xi, x(\xi), w(k)), \quad \xi \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad x(\tau_k) = z(k),$$

взятое в точке $\xi = \tau_{k+1}$.

Для случая *кусочно-линейного* управления $u(t) = w^1(k) + w^2(k)t$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, эквивалентная дискретная задача будет выглядеть как

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \eta(k, z(k), w^1(k), w^2(k)), \quad k \in \{0, 1, \dots, m+1\}, \\ z(0) &= z_0 = x_I, \quad w(k) \in W, \quad F(z(m+1)) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4)$$

где функция $\eta(k, z(k), w^1(k), w^2(k))$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(\xi) = f(\xi, x(\xi), w^1(k) + w^2(k)\xi), \quad \xi \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad x(\tau_k) = z(k),$$

взятое в точке $\xi = \tau_{k+1}$.

Пусть $(\tilde{z}(k), \tilde{w}(k))$ — допустимое решение задачи (3). Любой функции $\varphi(k, z)$ согласно [5, 6] соответствует нижняя граница минимизируемого функционала $F(x(t_F))$ и оценка $\Delta(z, w, \varphi) \geq 0$ его близости к оптимуму. Запишем оценочную функцию Кротова для задачи (3):

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{z}, \tilde{w}, \varphi) &= F(\tilde{z}(m+1)) - \min_{z \in \mathbb{R}^n} (F(z) + \varphi(m+1, z)) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \max_{\substack{w \in W, \\ z \in \mathbb{R}^n}} (\varphi(k+1, \mu(k, z, w)) - \varphi(k, z)) + \max_{w \in W} \varphi(1, \mu(0, z_0, w)). \end{aligned} \quad (5)$$

Оценочная функция Кротова для задачи (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{z}, \tilde{w}^1, \tilde{w}^2, \varphi) &= F(\tilde{z}(m+1)) - \min_{z \in \mathbb{R}^n} (F(z) + \varphi(m+1, z)) + \\ &+ \sum_{k=1}^m \max_{\substack{w^1, w^2 \in W, \\ z \in \mathbb{R}^n}} (\varphi(k+1, \eta(k, z, w^1, w^2)) - \varphi(k, z)) + \\ &+ \max_{w^1, w^2 \in W} \varphi(1, \eta(0, z_0, w^1, w^2)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $(\tilde{z}(k), \tilde{w}^1(k), \tilde{w}^2(k))$ — допустимое решение задачи.

Если функция $\varphi(k, z)$ удовлетворяет условиям (схема Беллмана [1])

$$\begin{aligned} \varphi(k, z) &= \max_{w^1, w^2 \in W} \varphi(k+1, \eta(k, z, w^1, w^2)), \\ \varphi(m+1, z) &= -F(z), \quad k \in \{0, 1, \dots, m+1\}, \end{aligned} \quad (7)$$

то формулы оценок принимают более простой вид:

$$\Delta(\tilde{z}, \tilde{w}, \varphi) = F(\tilde{z}(m+1)) + \varphi(0, z_0), \quad \Delta(\tilde{z}, \tilde{w}^1, \tilde{w}^2, \varphi) = F(\tilde{z}(m+1)) + \varphi(0, z_0) \quad (8)$$

вместо формул (5) и (6) соответственно. Управление, на котором достигается максимум в равенствах (7), может быть выбрано в качестве оптимального решения задач (3) и (4).

2. Описание алгоритма

Параллельный алгоритм поиска начального приближения для решения задачи оптимального управления (1) и вычисления количественной оценки приближенно оптимального управления представлен на рис. 1 и состоит из нескольких блоков.

На начальном этапе формулируется задача оптимального управления: задаются ее параметры, правые части системы дифференциальных уравнений $f(t, x(t), u(t))$ и терминальный функционал качества $F(x(t_F))$ в виде синтаксически правильных выражений языка C++. Далее исполняются следующие блоки:

Блок А: Вычисление начального приближения для ЗОУ.

Шаг 1. Задание параметров: начального состояния системы $z_0 = x_I$; ограничений на управление \underline{u}, \bar{u} ; шага \tilde{h} для построения расчетной сетки по управлению, моментов переключений τ .

Шаг 2. Построение сетки по управлению $\{\underline{u}, \underline{u} + \tilde{h}, \dots, \bar{u} - \tilde{h}, \bar{u}\}$.

Шаг 3. Рекурсивно разрешается цепочка относительно функции Кротова $\varphi(k, z)$ на построенной сетке по управлению.

Шаг 4. Вычисление траекторий \tilde{z} , соответствующих найденному оптимальному управлению \tilde{u} .

Блок В: Улучшение управления [4].

Шаг 1. Задание начального состояния системы x_I ; управления \tilde{u} (найденного в блоке А), области поиска, моментов переключений управления τ .

Шаг 2. При данном управлении численно интегрируется система обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге–Кутты 4-го порядка или метод Рунге–Кутты–Фельберга с адаптивным шагом).

Шаг 3. Вычисляется значение целевого функционала $G(\tilde{u}, \tau)$.

Шаг 4. Вызывается функция поиска очередного приближения к решению.

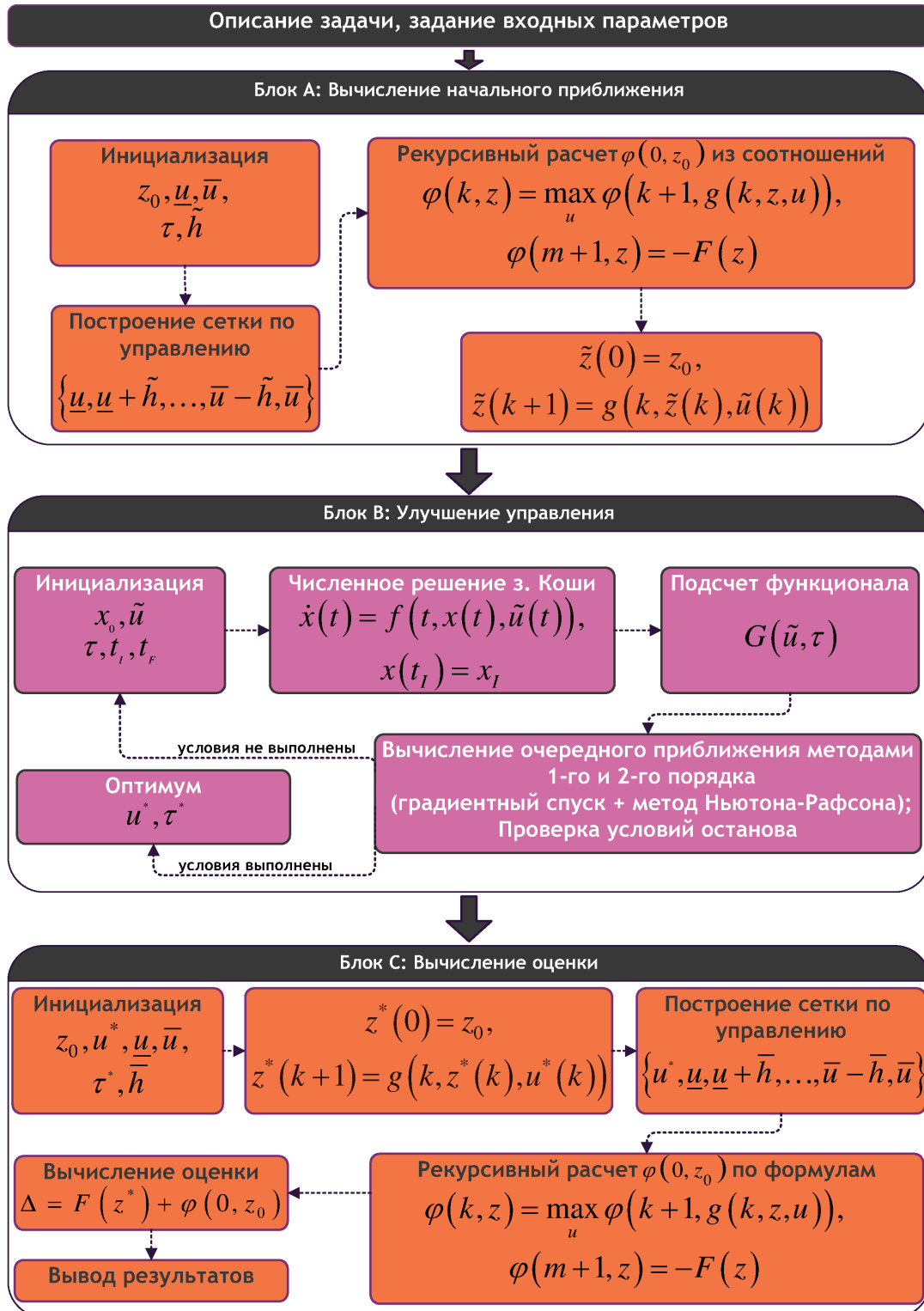


Рис. 1. Вычислительная схема решения поставленной задачи

Шаг 5. Проверка условий останова. Если условия останова не выполняются, переходим к шагу 2, иначе блок **B** завершает свою работу.

Блок C: Вычисление оценки приближенно оптимального решения.

Шаг 1. Задание параметров: начального состояния системы $z_0 = x_I$; допустимого управления u^* (найденного в блоке **B**), которое требуется оценить; ограничений на управление \underline{u}, \bar{u} ; шага $\bar{h} \leq \tilde{h}$ для построения расчетной сетки по управлению, моментов переключений τ .

Шаг 2. Вычисление траекторий z^* и функционала качества $F(z^*)$, соответствующих заданному допустимому управлению.

Шаг 3. Построение сетки по управлению $\{u^*, \underline{u}, \underline{u} + \bar{h}, \dots, \bar{u} - \bar{h}, \bar{u}\}$.

Шаг 4. Рекурсивно разрешается цепочка относительно функции Кротова $\varphi(k, z)$ на построенной сетке по управлению.

Шаг 5. Вычисление оценки согласно формулам (8).

Шаг 6. Вывод результатов в виде текстовых файлов и графиков. Завершение работы программы.

Шаги 3 и 4 рекурсивного вычисления функции Кротова $\varphi(k, z)$ блоков **A** и **C** соответственно могут выполняться независимо для различных наборов управлений, сгенерированных при построении сетки, за счет чего алгоритм допускает параллельное исполнение.

Распараллеливание вычислительного процесса осуществляется по схеме процессорной фермы. Главный процессор считывает входные данные и формирует сетку по управлению, после чего распределяет наборы управлений между процессорами-подчиненными, на которых производится рекурсивный расчет функции Кротова; после этого главный процессор собирает результаты.

Параллельный алгоритм для решения задачи оптимального управления (1), в основе которого лежит геометрическая декомпозиция расчетной области, описан в работах [3, 4].

3. Вычислительные эксперименты

Программа решения задачи оптимального управления была реализована на языке C++, а в параллельной версии исполнена в среде OpenTS на языке T++ [7]. Преимущество данного подхода заключается в том, что данная система позволяет в динамике выполнять распараллеливание кусков кода программы, планировку вычислений, распределение данных по узлам и пр. без участия пользователя.

Расчеты проводились на высокопроизводительном вычислительном кластере «BLADE» Института Программных Систем РАН, оснащенный 8 вычислительными узлами с двумя процессорами Intel Xeon E5472 (4 ядра по 3,0 ГГц) и 16 ГБ оперативной памяти на каждом узле. Используя предложенный выше подход, решим следующие задачи.

3.1. Задача об оптимизации бифункциональной каталитической смеси

Рассматривается трубчатый реактор, в котором протекает процесс получения бензола из метилциклопентана. Процедура состоит из смешения двух монофункциональных каталитических компонентов, приводящих к реакциям гидрирования и изомеризации. Роль управления u играет массовая доля гидрирующего катализатора (отношение массы компонента гидрогенизации к общей массе катализатора). Характерное время t определяется отношением массы катализатора в конкретном разделе реактора к входному молярному расходу метилциклопентана. На выходе из реактора, финальный момент времени t_F определяется из отношения общей массы катализатора в реакторе к молярному расходу метилциклопентана в реакторе.

Задача оптимизации состоит в отыскании оптимальной каталитической смеси по всей длине реактора с целью максимизации концентрации бензола. То есть необходимо максимизировать функционал

$$F(x(t_F)) = x_7(t_F) \rightarrow \max,$$

где $t_F = 2000 \text{ г}\cdot\text{ч}\cdot\text{моль}^{-1}$.

Имеющие место химические реакции описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -k_1x_1, & \dot{x}_2(t) &= k_1x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_4x_5, \\ \dot{x}_3(t) &= k_2x_2, & \dot{x}_4(t) &= -k_6x_4 + k_5x_5, \\ \dot{x}_5(t) &= k_3x_2 + k_6x_4 - (k_4 + k_5 + k_8 + k_9)x_5 + k_7x_6 + k_{10}x_7, \\ \dot{x}_6(t) &= k_8x_5 - k_7x_6, & \dot{x}_7(t) &= k_9x_5 - k_{10}x_7, \end{aligned} \tag{9}$$

где константы скорости протекания реакций выражаются кубическими функциями от управления u каталитической смеси $k_i = c_{i0} + c_{i1}u + c_{i2}u^2 + c_{i3}u^3$, $i = \overline{1, 10}$. Коэффициенты c_{ij} , $j = \overline{0, 3}$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты для констант k_i , определяющих скорость реакций

i	c_{i0}	c_{i1}	c_{i2}	c_{i3}
1	0,2918487e-002	-0,8045787e-002	0,6749947e-002	-0,1416647e-002
2	0,9509977e+001	-0,3500994e+002	0,4283329e+002	-0,1733333e+002
3	0,2682093e+002	-0,9556079e+002	0,1130398e+003	-0,4429997e+002
4	0,2087241e+003	-0,7198052e+003	0,8277466e+003	-0,3166655e+003
5	0,1350005e+001	-0,6850027e+001	0,1216671e+002	-0,6666689e+001
6	0,1921995e-001	-0,7945320e-001	0,1105666e+000	-0,5033333e-001
7	0,1323596e+000	-0,4696255e+000	0,5539323e+000	-0,2166664e+000
8	0,7339981e+001	-0,2527328e+002	0,2993329e+002	-0,1199999e+002
9	-0,3950534e+000	0,1679353e+001	-0,1777829e+001	0,4974987e+000
10	-0,2504665e-004	0,1005854e-001	-0,1986696e-001	0,9833470e-002

Переменные состояния представляют собой массовые доли химических соединений: при $i = \overline{1, 6}$ для метилциклопентана, при $i = 7$ — бензола. Начальное состоя-

ние системы задано: $x(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. На управление наложено ограничение: $0,6 \leq u \leq 0,9$.

Задача имеет множество локальных максимумов [8]. Необходимо найти глобальный. Управление ищется в классе кусочно-линейных функций с двумя моментами переключений.

При поиске начального кусочно-линейного управления (**блок А** схемы 1) с шагом по управлению $\tilde{h} = 0,1$ были найдены следующие параметры $(w^0; w^1; w^2; w^3; w^4; w^5) = (0,6; 0,7; 0,7; 0,7; 0,9; 0,9)$. Значение функционала составило $F = 0,0099729$. На этапе улучшения управления (**блок В**) найдено $(w^0; w^1; w^2; w^3; w^4; w^5) = (0,648; 0,683; 0,674; 0,675; 0,9; 0,9)$. При этом значение функционала $F = 0,0100956$ против $F = 0,0100942$ (см. [8]). При вычислении оценки приближенно оптимального управления (**блок С** схемы) с шагом по управлению $\bar{h} = 0,05$ получено $\Delta = 0$. На рис. 2(а) и 2(б) изображены оптимальное кусочно-линейное управление и соответствующие ему траектории (на логарифмической шкале). В табл. 2 приведены результаты времени счета задачи оптимизации бифункциональной каталитической смеси на суперЭВМ.

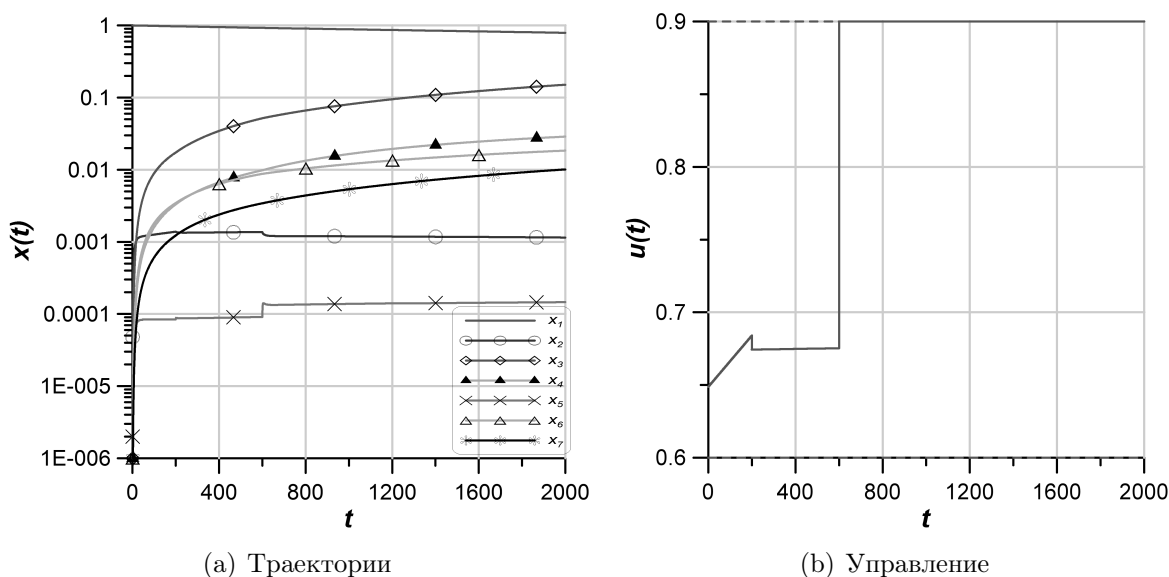


Рис. 2. Оптимальные процессы и управление

Таблица 2

Анализ эффективности параллельной версии программы

Число узлов, p	1	2	3	4	5	6	7
Время, t_p (с)	15473,371	7998,311	5555,059	4284,082	3469,615	3081,801	2609,322
Ускорение, t_1/t_p	1	1,93	2,78	3,61	4,45	5,02	5,93
Эфф-ть, $t_1/t_p/p$	1	0,97	0,92	0,9	0,89	0,84	0,85

3.2. Оптимальное производство белка в биореакторе

Рассмотрим модель по производству секретируемого белка в реакторе периодического действия с подпиткой, представленную в работе [9]. Эта модель использовалась некоторыми исследователями при разработке робастных методов решения задач такого характера. Трудности нахождения оптимального управления здесь частично связаны с низкой чувствительностью функционала к управлению. Биореактор описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= g_1(x_2 - x_1) - \frac{u}{x_5}x_1, & \dot{x}_2(t) &= g_2x_3 - \frac{u}{x_5}x_2, \\ \dot{x}_3(t) &= g_3x_3 - \frac{u}{x_5}x_3, & \dot{x}_4(t) &= -7,3g_3x_3 + \frac{u}{x_5}(20 - x_4), \\ \dot{x}_5(t) &= u, \end{aligned} \tag{10}$$

где $g_1 = \frac{4,75g_3}{0,12 + g_3}$, $g_2 = \frac{x_4e^{-5x_4}}{0,1 + x_4}$, $g_3 = \frac{21,87x_4}{(x_4 + 0,4)(x_4 + 62,5)}$, с начальным состоянием $x(0) = (0, 0, 1, 5, 1)^T$. Здесь x_1 — концентрация секретируемого белка SUC-s2 в культуре (л^{-1}), x_2 — общая концентрация белка SUC-s2 в культуре (л^{-1}), x_3 — плотность клеток культуры ($\text{г} \cdot \text{л}^{-1}$), x_4 — уровень глюкозы в культуре ($\text{г} \cdot \text{л}^{-1}$), x_5 — объем культуры (л). Роль управления u играет скорость потока подпитки ($\text{л} \cdot \text{ч}^{-1}$), $0 \leq u \leq 2$. Определение оптимальной скорости подпитки в реакторе для получения максимального количества желаемого продукта является очень сложной задачей оптимального управления.

Функционал составлен с целью максимизации количества секретируемого белка SUC-s2:

$$F(x(t_F)) = x_1(t_F)x_5(t_F) \rightarrow \max,$$

где $t_F = 15$ ч.

Управление ищется в виде (2) с двумя точками переключений. При поиске начального кусочно-линейного управления (**блок А**) с шагом по управлению $\tilde{h} = 0,25$ были найдены следующие параметры $(w^0; w^1; w^2; w^3; w^4; w^5) = (0; 0,75; 0,5; 2; 0,5; 1,25)$. Значение терминального функционала — $F = 31,62$. На этапе улучшения управления (**блок В**) найдено $(w^0; w^1; w^2; w^3; w^4; w^5) = (0,117; 0,526; 0,8; 1,74; 0,54; 1,14)$. При этом значение функционала составило $F = 31,82$ против $F = 32,67$ (см. [10], где функция управления искалась в кусочно-постоянном виде с 15 точками переключений). При вычислении оценки приближенно оптимального управления (**блок С**) с шагом по управлению $\bar{h} = 0,2$ получено $\Delta = 0$. На рис. 3(а) и 3(б) изображены оптимальное кусочно-линейное управление и соответствующие ему траектории. В табл. 3 приведены результаты времени счета оптимального производства белка в биореакторе на кластерной установке.

Таблица 3

Анализ эффективности параллельной версии программы

Число узлов, p	1	2	3	4	5	6	7
Время, t_p (с)	2281,76	1170,653	803,972	617,148	510,432	440,973	399,476
Ускорение, t_1/t_p	1	1,95	2,84	3,7	4,47	5,17	5,71
Эфф-ть, $t_1/t_p/p$	1	0,98	0,95	0,93	0,89	0,86	0,82

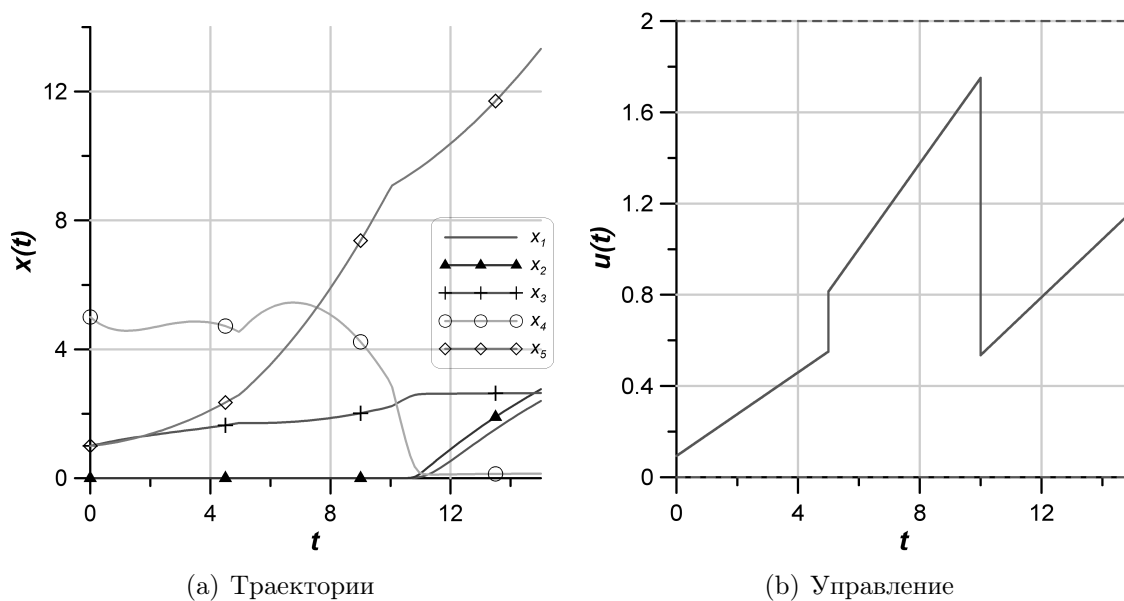


Рис. 3. Оптимальные процессы и управление

Заключение

В работе предложен параллельный алгоритм вычисления начального приближения для решения задач оптимального управления, а также расчета качества полученного решения в виде количественной оценки на основе достаточных условий оптимальности Кротова. Проведено исследование масштабируемости параллельной программы. Описанный алгоритм — неотъемлемая часть программного комплекса оптимизации динамических систем на множествах управлений простой структуры [3], в котором задействованы возможности современных суперЭВМ, что позволяет, в свою очередь, существенно сократить время вычислений.

Литература

1. Кротов, В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 216 с.
2. Фесько, О.В. Алгоритм поиска кусочно-линейного управления с нефиксированными моментами переключений / О.В. Фесько // Вестник Бурятского государственного университета, сер. Математика и информатика. – 2011. – №9. – С. 52–56.

3. Фесько, О.В. Программный комплекс поиска оптимальных управлений на множествах простой структуры / О.В. Фесько // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ2011): Труды международной научной конференции. – 2011. С. 712.
4. Фесько, О.В. Параллельный алгоритм оптимизации динамических систем на множестве кусочно-линейных управлений / О.В. Фесько // Вестник Бурятского государственного университета, сер. Математика и информатика. – 2010. – №9. – С. 79–87.
5. Гурман, В.И. Принцип расширения в задачах управления / В.И. Гурман. – М.:Наука-Физматлит, 1985.
6. Трушкова, Е.А. Оценка приближенно оптимальных решений на основе преобразований модели объекта / Е.А. Трушкова. // Вестник Бурятского государственного университета, сер. Математика и информатика. – 2011. – №9. – С. 47–51.
7. Moskovsky, A. Parallelism Granules Aggregation with the T-system / A. Moskovsky, V. Roganov, S. Abramov // 9th International Conference on Parallel Computing Technologies. LNCS 4671. – 2007. – P. 293–302.
8. Luus, R. Multiplicity of Solutions in the Optimization of a Bifunctional Catalyst Blend in a Tubular Reactor / R. Luus, J. Dittrich, F.J. Keil // Can. J. Chem. Eng. 70. – 1992. – P. 780–785.
9. Park, S. Optimal Production of Secreted Protein in Fed-batch Reactors / S. Park, W.F. Ramirez // AIChE J. 34. – 1988. – P. 1550–1558.
10. Luus, R. Iterative Dynamic Programming / R. Luus. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.

Фесько Олесь Владимирович, аспирант, Исследовательский центр системного анализа ИПС им. А.К. Айламазяна РАН (г. Переславль-Залесский, Российская Федерация), fov@pereslavl.ru.

A PARALLEL APPROACH TO ESTIMATION OF THE APPROXIMATE OPTIMAL CONTROL

O. V. Fesko, Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (Pereslavl-Zaleskii, Russian Federation)

In this paper the method for computing a priori estimates of the approximate optimal control based on the Krotov sufficient conditions for optimality is considered. These estimates provide us with information about the quality of the approximate optimal solution obtained by applying the improvement control procedure. The method is implemented in the form of a parallel algorithm and may be used at the stage of finding out initial control. This algorithm is an essential part of the developed software package intended for optimization of controllable dynamical systems with piecewise constant and piecewise linear control. We also consider the scalability of the parallel algorithm in the OpenTS parallel programming system for bifunctional catalyst blend optimization problem and production of secreted protein in a fed-batch reactor problem.

Keywords: optimal control, Krotov's sufficient conditions of optimality, estimation of control, parallel algorithm.

References

1. Krotov V.F., Gurman V.I. Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973.
2. Fesko O.V. Algoritm poiska kusochno-lineynogo upravleniya s nefiksirovannymi momentami pereklyucheniy [Algorithm for Piecewise Linear Control Searching with Movable Switching Points]. Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta [Buryat State University Bulletin]. 2011. No 9, P. 52–56.
3. Fesko O.V. Programmnyy kompleks poiska optimal'nykh upravleniy na mnozhestvakh prostoy struktury [Software Package for Optimal Control Searching on the Simple Control Set]. Trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii [Proceedings of the 2011 International Scientific Conference on Parallel Computational Technologies]. Moscow, 2011. P. 712.
4. Fesko O.V. Parallel'nyy algoritm optimizatsii dinamicheskikh sistem na mnozhestve kusochno-lineynykh upravleniy [Parallel Algorithm for Optimization Dynamical Systems on Piecewise Linear Control Set]. Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta [Buryat State University Bulletin]. 2010. No 9, P. 79–87.
5. Gurman V.I. Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya [The Extension Principle in Control Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1997.
6. Trushkova E.A. Otsenka priblizhenno optimal'nykh resheniy na osnove preobrazovaniy modeli ob"ekta [The Estimate of Approximate Solutions on the Base of Model Transformation]. Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta [Buryat State University Bulletin]. 2011, no.9, pp. 47 – 51.
7. Moskovsky A., Roganov V., Abramov S. Parallelism Granules Aggregation with the T-system. 9th International Conference on Parallel Computing Technologies. LNCS, 2007. No 4671. P. 293–302.
8. Luus R., Dittrich J., Keil F.J. Multiplicity of Solutions in the Optimization of a Bifunctional Catalyst Blend in a Tubular Reactor. Can. J. Chem. Eng. 1992. No 70. P. 780–785.
9. Park S., Ramirez W.F. Optimal Production of Secreted Protein in Fed-batch Reactors. AIChE J. 1988. No 34. P. 1550–1558.
10. Luus R. Iterative Dynamic Programming. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2000.

Поступила в редакцию 3 марта 2012 г.