

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МИКРОПРОЦЕССОРНОЙ САР ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ЗАДАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Г.В. Зырянов

MICROPROCESSOR AUTOMATIC CONTROL SYSTEM ACCURACY ESTIMATION AT VELOCITY CONSTRAINT AND MASTER CONTROL ACCELERATION

G.V. Zyryanov

Рассмотрены вопросы оценки точности следящих систем при медленно меняющемся задающем воздействии. Проведены исследования для непрерывного и микропроцессорного варианта системы при наличии и отсутствии компенсирующей связи.

Ключевые слова: микропроцессорная система, точность следящей системы.

Issues on accuracy estimation of servo systems at slowly changing master control are considered in the article. Research for continuous and microprocessor variants of the system at the existence or absence of compensating feedback is given.

Keywords: microprocessor system, accuracy of servo system.

1. Вводные замечания. Точность САР следящего типа (СС) является одним из главных показателей качества их функционирования. На этапе динамического синтеза для сравнения вариантов СС точность оценивают некоторым функционалом от *вынужденной* составляющей ошибки $\epsilon_n(t)$ при типовом законе изменения задающего воздействия $X(t) = X_T(t)$. В частности, это может быть функционал вида $\epsilon_m = \max |\epsilon_n(t)|$, называемый максимальной *динамической* ошибкой [1]. При этом переходная составляющая ошибки $\epsilon_n(t)$ не учитывается, поскольку рассматривается *стационарный* режим работы *устойчивой* СС в предположении того, что *типовой* закон для $X_T(t)$ назначен *правильно*. Соответственно этому далее выбирается метод анализа точности СС и способ ее обеспечения.

Однако в большинстве случаев *априорной* информации о реальном сигнале $X(t)$ недостаточно для назначения конкретного вида $X_T(t)$, но достоверно известны (например, из физического смысла) ограничения на максимальные значения скорости и ускорения задающего сигнала:

$$|\dot{x}(t)| \leq \dot{X}_m^* \text{ и } |\ddot{x}(t)| \leq \ddot{X}_m^*. \quad (1)$$

Это соответствует тому, что все возможные *фазовые диаграммы* (траектории) сигнала $X(t)$, т. е. графики на плоскости «скорость – ускорение»,

принадлежат прямоугольной области Π с центром в начале координат. Такой сигнал обычно называют «медленно меняющимся сигналом» (ММС) [1].

Ориентируясь на частотные методы анализа и синтеза СС, в подобных случаях удобно принять за динамический эквивалент ММС $X(t)$ не один, а множество сигналов вида $V_s(t) = A_s(\omega) \cdot \sin \omega t$, где $A_s(\omega)$ задается формулой

$$A_s(\omega) = \min \left(\frac{\dot{X}_m^*}{\omega}, \frac{\ddot{X}_m^*}{\omega^2} \right). \quad (2)$$

Для краткости назовем такое множество сигналов *виртуальным спектром* (V -спектром) ММС $X(t)$. Зависимость амплитуд A_s этого спектра от частоты ω показана на рис. 1.

Один из сигналов такого спектра с амплитудой A_s^* и частотой ω_s^* , где

$$A_s^* = \frac{(\dot{X}_m^*)^2}{\ddot{X}_m^*}; \omega_s^* = \frac{\ddot{X}_m^*}{\dot{X}_m^*}, \quad (3)$$

называют «эквивалентным гармоническим сигналом» (ЭГС).

Геометрический смысл V -спектра ММС состоит в том, что *фазовая диаграмма* ЭГС – это эллипс S , вписанный в прямоугольник Π (рис. 2), а диаграммы остальных составляющих V -спектра – «горизонтальные» (s_r) и «вертикальные» (s_b) эл-

липсы, которые *полностью* заполняют площадь эллипса S и имеют с ним общую горизонтальную либо вертикальную ось.

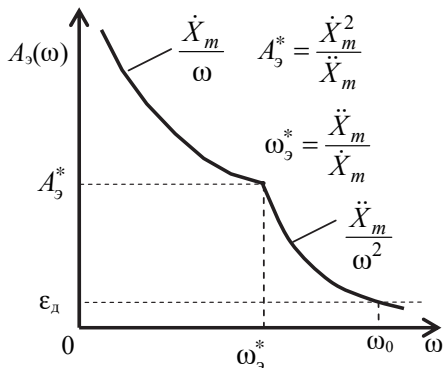


Рис. 1. Амплитуды V -сигналов

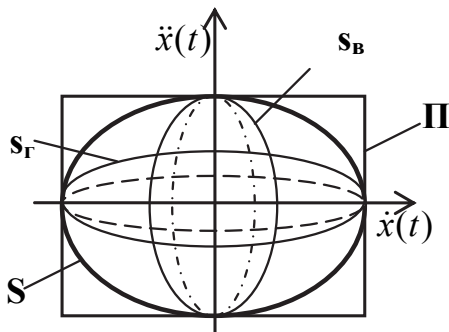


Рис. 2. Фазовые диаграммы V -сигналов

2. Сравнение СС по точности на основе V -спектров ММС. Из сказанного выше очевидна справедливость следующих утверждений:

1) каждый из V -сигналов является медленно меняющимся;

2) более точной будет та СС, которая воспроизводит *каждый* из сигналов V -спектра с меньшим значением амплитуды ошибки $E_3(\omega)$;

3) по требованиям к точности СС амплитуда ошибки $E_3(\omega)$ при воспроизведении *каждого* из V -сигналов *не должна* быть больше величины ϵ_m ;

4) так как $S \subset \Pi$, а V -сигналы – часть возможных реализаций $X(t)$, то воспроизведение каждого из них с ошибкой ϵ_d *не может гарантировать* такой же точности воспроизведения ММС $X(t)$. Это необходимое условие;

5) ошибка воспроизведения ММС $X(t)\epsilon_m$ не превосходит величины $\epsilon_{dm} = \sqrt{2} \epsilon_d$, где ϵ_{dm} – ошибка воспроизведения каждого из «усиленных» в $\sqrt{2}$ раз V -сигналов, заполняющих полностью внутреннюю часть эллипса S_m , проходящего через все вершины прямоугольной области Π (см. рис. 2). При этом из отношения $S_m \supset \Pi \supset S$ следует, что $\epsilon_d \leq \epsilon_m \leq \sqrt{2} \epsilon_d$.

6) множество V -сигналов можно использовать в качестве эквивалента ММС $X(t)$ при сравнении по точности СС на этапе их проектирования. Для

гарантии выполнения требований по точности следует задавать $\epsilon_d < \epsilon_m / \sqrt{2}$.

3. Обеспечение точности СС с помощью V -спектра ММС $X(t)$. Пусть ММС $X(t)$ является задающим сигналом для *непрерывной* линейной САР *следающего* типа с *произвольной* структурой и передаточной функцией (ПФ) по ошибке $\Phi_\epsilon(p) = 1 - \Phi(p)$.

Точность работы такой СС будем оценивать величиной $\epsilon_m = \max |\epsilon_B(t)|$. Поскольку конкретный вид $X(t)$ заранее неизвестен, то определить точное значение ϵ_m невозможно. Но так как любой из V -сигналов $V_3(t) = A_3 \sin \omega t$ может оказаться реализацией $X(t)$, то соответствующая ему вынужденная ошибка $\epsilon_{B3}(t)$ будет иметь вид $\epsilon_{B3}(t) = E_3 \sin(\omega t + \phi_\epsilon)$. Воспользуемся *необходимым условием* обеспечения заданной точности, полагая амплитуду ошибки E_3 одинаковой и равной ϵ_d на любой, включая и $\omega = \omega_3^*$, частоте, а значения амплитуд $A_3 = A_3(\omega)$ подчиняющимися условию (2).

Определим допустимую (нижнюю) границу $F^*(\omega)$ для значений *инверсной* АЧХ СС по ошибке $|\Phi_\epsilon^{-1}(j\omega)|$, как отношение амплитуды $A_3(\omega)$ V -сигнала к постоянной на всех частотах из диапазона $\omega \in [0; \omega_0]$ амплитуде ошибки $E_3 = \epsilon_d$ (см. рис. 1):

$$1 \leq F^*(\omega) = A_3(\omega) / \epsilon_d \leq |\Phi_\epsilon^{-1}(j\omega)|. \quad (4)$$

Тогда, учитывая формулу (3) для частоты $\omega = \omega_3^*$, получим

$$F^*(\omega_3^*) = A_3^* / \epsilon_d = \frac{1}{\delta}; \quad \delta = \frac{\epsilon_d}{A_3^*} = \frac{\epsilon_d \dot{X}_m^*}{(\dot{X}_m^*)^2}, \quad (5)$$

где δ – *относительная* величина динамической ошибки.

Учитывая (2) и (3), представим формулу для $F^*(\omega)$ в виде:

$$F^*(\omega) = \frac{\dot{X}_m^*}{\omega \delta A_3^*} = \frac{\omega_3^*}{\omega \delta} \quad \text{при } \omega \leq \omega_3^*; \quad (6a)$$

$$F^*(\omega) = \frac{\dot{X}_m^*}{\omega^2 \delta A_3^*} = \frac{(\omega_3^*)^2}{\omega^2 \delta} \quad \text{при } \omega \geq \omega_3^*. \quad (6b)$$

Здесь (6a) определяет нижнюю границу для $|\Phi_\epsilon^{-1}(j\omega)|$ в низкочастотном (НЧ) диапазоне, а выражение (6b) – аналогичную границу в высокочастотном (ВЧ) диапазоне.

В соответствии с (6a), (6b) найдем и построим (рис. 3) границу запрещенной (по точности) области $L^*(\omega)$ для ЛАХ $L_s(\omega) = 20 \lg |\Phi_\epsilon^{-1}(j\omega)|$:

$$L^*(\omega) = 20 \lg \frac{\omega_3^*}{\omega \delta} = 20 \lg \frac{\omega_3^*}{\delta} - 20 \lg \omega \quad \text{при } \omega \leq \omega_3^*; \quad (7a)$$

$$L^*(\omega) = 20 \lg \frac{(\omega_3^*)^2}{\omega^2 \delta} = 20 \lg \frac{(\omega_3^*)^2}{\delta} - 40 \lg \omega \quad \text{при } \omega \geq \omega_3^*. \quad (7b)$$

Если ПФ по ошибке $\Phi_\varepsilon(p)$ для СС с произвольной структурой известна, то оценить значение динамической ошибки ε_d можно следующим образом:

1. Построить график $L_s(\omega) = 20 \lg |\Phi_\varepsilon^{-1}(j\omega)|$ на плоскости ЛАХ.
2. Задать некоторое значение δ (например, $\delta = 0,1$) и построить (рис. 3) соответствующий этому значению график для границы $L^*(\omega)$.
3. Сместить график $L^*(\omega)$ в вертикальном направлении до касания его с графиком $L_s(\omega)$ и определить величины L_δ и $\delta = \delta^* = 10^{-0,05L_\delta}$.
4. Найти оценку для максимальной ошибки $\varepsilon_m \leq \sqrt{2} \varepsilon_d = \sqrt{2} (\delta^*) A_0^*$.

Для САР с единичной отрицательной обратной связью (ЕООС) $|\Phi_\varepsilon^{-1}(j\omega)| = |1+W(j\omega)|$, где $W(j\omega)$ – частотная передаточная функция разомкнутой системы. Так как обычно $\delta \ll 1$, то $|W(j\omega)| \gg 1$ и $|\Phi_\varepsilon^{-1}(j\omega)| \approx |W(j\omega)|$. Поэтому $L^*(\omega)$, построенную для заданного $\delta = \delta^*$, можно приближенно считать границей запрещенной области для ЛАХ $L_w(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ разомкнутой системы в НЧ диапазоне, где $\omega < \omega_{cp}$, а $|W(j\omega)| \gg 1$. Именно так поступают в частотных методах синтеза САР при построении низкочастотной части желаемой ЛАХ разомкнутой системы [1].

Из рис. 3 следует также, что САР должна

иметь порядок астатизма $\nu \geq 1$. При $\nu = 1$ коэффициент добротности по скорости $K_\omega \geq K_{\min} = \omega_0^* / \delta$, а при $\nu = 2$ коэффициент добротности по ускорению $K_\varepsilon \geq K_{\min} = \omega_0^{*2} / \delta$. Для высокоточных СС $\delta \ll 1$, что для САР с ЕООС приводит к необходимости больших значений коэффициентов K_ω и K_ε , а также к проблемам обеспечения устойчивости САР и усложнению закона регулирования.

Повысить точность следящей САР, не уменьшая ее запасов устойчивости, можно применением компенсирующей (инвариантной) связи (КС) по задающему воздействию $X(t)$. Структурная схема непрерывной следящей системы с КС показана на рис. 4.

Здесь $W_0(p)$ и $W_k(p)$ – ПФ объекта управления (ОУ) и корректирующего звена (КЗ), а $W_x(p)$ – ПФ компенсирующей связи (КС), используемой для уменьшения ошибки слежения $\varepsilon(t)$. Для такой системы ПФ по ошибке

$$\Phi_\varepsilon(p) = \Phi_{\varepsilon p}(p)\Phi_{\varepsilon s}(p), \tag{8}$$

где $\Phi_{\varepsilon p}(p) = [1 - W_x(p)W_0(p)]$ – ПФ по ошибке разомкнутого контура управления, а $\Phi_{\varepsilon s}(p) = [1 + W_k(p)W_0(p)]^{-1}$ – ПФ по ошибке замкнутого контура.

Из (8) следует, что такая СС является итерационной: ошибка разомкнутого контура (грубый канал) уменьшается замкнутым контуром регулирования (точный канал). При этом желаемая ПФ

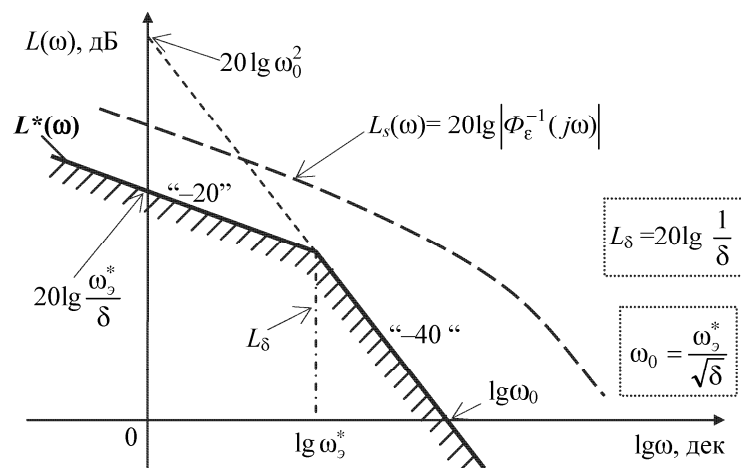


Рис. 3. Граница $L^*(\omega)$ для запрещенной области по точности

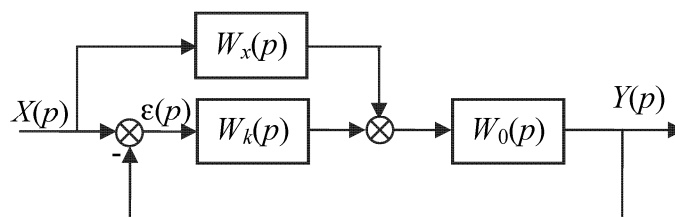


Рис. 4. Следящая система с компенсирующей связью

КС вида $W_x(p) = W_0^{-1}(p)$ из-за инерционности ОУ оказывается нереализуемой (порядок числителя больше порядка знаменателя) и ее выбирают таким образом, чтобы соответствующая ей ЧПФ $W_x(j\omega) \approx W_0^{-1}(j\omega)$ в диапазоне частот $[0; \omega_0]$, где амплитуды V -сигналов $A_s(\omega) \geq \varepsilon_d$ (см. рис. 1). Для ВЧ диапазона, в котором $\omega \gg \omega_0$, вид $W_x(j\omega)$ и $L_x(\omega)$ выбирают с учетом условия физической осуществимости (равенство порядков числителя и знаменателя ПФ). После выбора $W_x(p)$, проверка требований по точности и/или оценка ε_d в САР с КС выполняются так же, как и для системы с ЕООС (см. рис. 3).

С учетом (4) и (8), условие требуемой точности относительно характеристик $\Phi_{ep}(j\omega)$ и $L_x(\omega) = 20 \lg |\Phi_{ep}(j\omega)|$ запишется следующим образом:

$$|\Phi_{ep}(j\omega)| \leq |\Phi_{e3}^{-1}(j\omega)| / F^*(\omega); \quad (9)$$

$$L_x(\omega) \leq L_s(\omega) - L^*(\omega).$$

Это условие должно выполняться в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega_0 = \omega_s^* / \sqrt{\delta}$.

4. Оценка точности микропроцессорной СС. В микропроцессорной СС управляющее вычислительное устройство (УВУ) выполняет функции измерителя рассогласования (ИР), корректирующего звена (КЗ) и компенсирующей связи (КС). Являясь устройством дискретного действия, УВУ воспринимает и преобразует только выборочные (решетчатые) значения сигналов $X(kT_0)$ и $Y(kT_0)$, представленные последовательностями цифровых кодов. При этом для устойчивой МП СС всегда выполняется условие $\omega_s^* < \omega_0 < \omega_{cp} < 2/T_0$.

Так как в НЧ диапазоне частота ω и псевдо-частота $\lambda = (2/T_0) \operatorname{tg}(\omega T_0/2)$ примерно равны, а графики частотных и псевдо-частотных характеристик практически совпадают, то нет никаких особенностей в оценке точности МП СС по сравнению с непрерывной САР. При этом если были определены $W_k(p)$ и $W_x(p)$ для непрерывного варианта СС с КС (см. рис. 4), то для «переоборудования» ее в цифровую (микропроцессорную) удобно воспользоваться методом *аналогового прототипа* (МАП) [2]. В этом методе шаг дискретизации по времени T_0 находят из условия $T_0 \leq 2\delta_\phi \cdot \phi_3 / \omega_{cp}$. Здесь ω_{cp} – частота среза; ϕ_3 – запас устойчивости по фазе (в радианах!) для непрерывной СС с ЕООС (т. е. при $W_x(p) = 0$), а δ_ϕ – относительная величина допустимого уменьшения запаса устойчивости по фазе МП СС по сравнению с непрерывной СС (например, $\delta_\phi = 0,1$).

Дискретные передаточной функции $W_k(z)$ и $W_x(z)$ получают из $W_k(p)$ и $W_x(p)$ заменой переменной вида $p = 2(z-1) / [(z+1)T_0]$.

5. Проверка точности СС при ММС $X(t)$.

Постоянство амплитуды ошибки ε_d при воспроизведении каждого из V -сигналов не гарантирует

такой же точности СС при реальном задающем ММС $X(t)$ (см. замечание 4 в п. 2). Поэтому актуальным является вопрос о соотношении величин фактической ошибки слежения $\varepsilon_m = \max|\varepsilon_b(t)|$ и ε_d . Найти величину ε_m аналитически невозможно из-за неопределенности закона изменения $X(t)$. Воспользуемся комбинацией расчетно-теоретического метода и компьютерного моделирования, задавая для исследуемой СС *тестовый сигнал* $X_t(t)$ полигармонического вида как одну из возможных реализаций ММС $X(t)$:

$$X_t(t) = \sum_{i=1}^m A_i \sin \omega_i t. \quad (10)$$

По графику $X_t(t)$ найдем максимальные значения скорости и ускорения, а по ним – V -спектр и ЭГС этого сигнала. Затем, по известной ЧПФ $\Phi_\varepsilon(j\omega) = M_\varepsilon(\omega) \cdot \exp\{j\varphi_\varepsilon(\omega)\}$, получим выражение для $\varepsilon_b(t)$:

$$\varepsilon_b(t) = \sum_{i=1}^m A_i M_\varepsilon(\omega_i) \sin(\omega_i t + \varphi_\varepsilon(\omega_i)). \quad (11)$$

Далее по графику $\varepsilon_b(t)$ определим величину $\varepsilon_m = \max|\varepsilon_b(t)|$ и сравним ее с оценкой для ε_d , найденной по методике, описанной в п. 4.

Такое исследование при различных сочетаниях частот ω_i , амплитуд A_i и числа гармоник m в составе $X_t(t)$ проводилось для непрерывного и для МП варианта СС со структурной схемой рис. 4 при наличии и при отсутствии компенсирующей связи [2]. По результатам сравнения величин ε_m и ε_d были сделаны следующие выводы:

1. Ошибка ε_m всегда больше, чем ошибка ε_d , но меньше величины $\sqrt{2} \varepsilon_d$.
2. Отношение $r = \varepsilon_m / \varepsilon_d$ не постоянно, а зависит от параметров амплитудного спектра сигнала $X_t(t)$, т. е. от значений ω_i , A_i и числа гармоник m .
3. Для $m = 5$ при различных комбинациях ω_i и A_i величина r меняет значения в интервале $(1,05 \div 1,2)$.
4. Введение КС с ПФ $W_x(p)$ одновременно уменьшает ε_m и ε_d примерно в $(10 \div 15)$ раз с приближенным сохранением прежнего значения для r .
5. Для СС с микропроцессорной реализацией КЗ и КС аналогичные результаты получены моделированием в программном пакете VisSim.

Литература

1. Бесекецкий, В.А. *Цифровые автоматические системы* / В.А. Бесекецкий. – М.: Наука, 1976. – 575 с.
2. Зырянов, Г.В. *О применении метода аналогового прототипа при синтезе цифровых САУ* / Г.В. Зырянов // Информационные, информационно-управляющие и радиоэлектронные устройства и системы: темат. сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – С. 44–50.

Поступила в редакцию 4 июня 2012 г.