УДК 621.317

О РАСЧЕТЕ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ С НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫМ РЕЗЕРВОМ

Е.А. Алёшин

RELIABILITY CALCULATION OF RESTORABLE SYSTEMS WITH NONRESTORABLE RESERVE

E.A. Aleshin

Описана работа восстанавливаемой системы с невосстанавливаемым резервом. Приведены граф переходов системы и математическое описание. Рассчитаны основные показатели надежности такой системы.

Ключевые слова: восстанавливаемая система, работоспособность, надежность.

The operation of a restorable system with nonrestorable reserve is described in the article. System transition graph and mathematical descriptions are given. Basic reliability index of the system is shown.

Keywords: restorable system, operating capability, reliability.

Рассмотрим систему из $n+1$ идентичных элементов, из которых только один является рабочим, а остальные n – ненагруженными резервными элементами. Система функционирует таким образом, что после отказа рабочего элемента производится его замена (восстановление системы) одним из резервных элементов, при этом восстановление отказавшего элемента не производится и в дальнейшей работе системы он участия не принимает. Система функционирует до тех пор, пока не откажет последний $n+1$ элемент. Смысл такого рода резервирования заключается в том, что хотя каждый отказ элемента, стоящего на рабочем месте, фиксируется как отказ системы, но быстрая замена отказавшего элемента позволяет форсированно перевести систему в состояние работоспособности, поддерживая ее высокую готовность к функционированию [1].

Начав работать, система последовательно попадает из состояния работоспособности в состояние отказа, затем опять в состояние работоспособности и т. д., причем за время функционирования система может побывать только в конечном числе состояний $H_0, H_1, \ldots, H_{2n}, H_{2n+1}$. Пусть система находится в работоспособном состоянии, если она находится в «четных» состояниях $H_0, H_2, \ldots, H_{2j}, \ldots, H_{2n}$; система находится в состоянии отказа, если она находится в «нечетных» состояниях $H_1, H_3, \ldots, H_{2j+1}, \ldots, H_{2n+1}$. Таким образом, H_{2j} – состояние работоспособности, в которое система переходит после j-го отказа и j-го восстановления; H_{2j+1} – состояние отказа, в которое система переходит после j-го восстановления и, соответственно, j+1-го отказа.

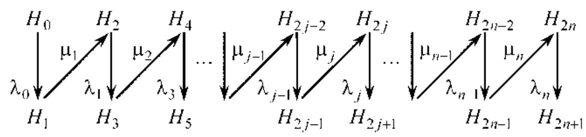

Рис. 1. Граф переходов восстанавливаемой системы

Граф переходов описанной выше системы показан на рис. 1. На графе все нечетные (нижние) состояния являются состояниями отказа системы, а все четные (верхние) состояния – состояниями работоспособности. Введем обозначения

$$N = 2n+1;\ \lambda_j = \omega_{2j};\ \mu_j = \omega_{2j-1};$$

$$\mu_{-1} = 0;\ 0 \le j \le n,$$

тогда граф переходов можно представить в другом виде (рис. 2), что соответствует графу переходов системы для «схемы гибели» [1, 2].

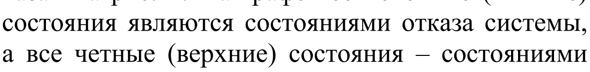

Рис. 2. Преобразованный граф переходов («схема гибели»)

Алёшин Евгений Анатольевич – канд. техн. наук, доцент кафедры систем управления, Южно-Уральский государственный университет; su@susu.ac.ru

Aleshin Evgeniy Anatolievich – Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of Control Systems Department, South Ural State University; su@susu.ac.ru

Решая систему дифференциальных уравнений, отвечающих графу на рис. 2, вероятность $p_k(t)$ того, что система в момент времени t находится в состоянии H_k [1] при начальных условиях $p_0(0)=1;\ p_k(0)=0; 1\le k\le N$;

для случая, когда все ω_i различны, получим

$$p_k(t)=\prod_{j=0}^{k-1}\omega_j\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\omega_i t}}{\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\ne i}}^{k}(\omega_l-\omega_i)};\ 1\le k\le N-1; \tag{1}$$

$$p_N(t)=1-\prod_{j=0}^{N-1}\omega_j\sum_{i=0}^{N-1}\frac{e^{-\omega_i t}}{\omega_i\prod\limits_{\substack{l=0\\ l\ne i}}^{N-1}(\omega_l-\omega_i)}. \tag{2}$$

Если замена отказавшего элемента на резервный производится с одной и той же интенсивностью μ независимо от номера отказа системы, а интенсивности последовательности отказов одинаковы и равны λ, т. е.

$$\omega_{2j+1}=\mu;\quad 0\le j\le\frac{N-3}{2};\ \omega_{2j}=\lambda;\quad 0\le j\le\frac{N-1}{2},$$

то в этом случае [1] получаем для четных k $(0\le k\le N-1)$

$$p_k(t)=\frac{(\lambda\mu)^{\frac{k}{2}}}{(\lambda-\mu)^k}\left\{e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}}(-1)^i C_{\frac{k}{2}-1+i}^{\frac{k}{2}-1}\frac{[(\mu-\lambda)t]^{\frac{k}{2}-i}}{\left(\frac{k}{2}-i\right)!}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}C_{\frac{k}{2}+i}^{\frac{k}{2}}\frac{[(\mu-\lambda)t]^{\frac{k}{2}-i-1}}{\left(\frac{k}{2}-i-1\right)!}\right\}, \tag{3}$$

для нечетных k $(0\le k\le N)$

$$p_k(t)=\frac{\lambda(\lambda\mu)^{\frac{k-1}{2}}}{(\lambda-\mu)^k}\left\{e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^i C_{\frac{k-1}{2}+i}^{\frac{k-1}{2}}\frac{[(\mu-\lambda)t]^{\frac{k-1}{2}-i}}{\left(\frac{k-1}{2}-i\right)!}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k+1}{2}}e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}C_{\frac{k-1}{2}+i}^{\frac{k-1}{2}}\frac{[(\mu-\lambda)t]^{\frac{k-1}{2}-i}}{\left(\frac{k-1}{2}-i\right)!}\right\}, \tag{4}$$

$$p_N(t)=1-\frac{1}{(\mu-\lambda)^n}\left\{\mu^n e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{n}\frac{(\lambda t)^{n-i}}{(n-i)!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_{n-1+j}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)^j+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{\lambda^{n+1}}{\mu-\lambda}e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\mu t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\sum_{j=0}^{i}C_{n+j}^{n}\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)^j\right\}. \tag{5}$$

Используя формулы (1)–(5), для соответствующих вариантов можно определить вероятность пребывания системы в момент времени t в одном из состояний работоспособности $K(t)$:

$$K(t)=\sum_{k=0}^{N-1}p_k(t)\ \text{(для четных } k\text{)}. \tag{6}$$

В условиях рассматриваемой модели значение коэффициента готовности равно

$$K=\lim_{t\to\infty}K(t). \tag{7}$$

Среднее время T_N функционирования системы до ее окончательного отказа (состояние H_N) и среднее время T_Σ пребывания системы в состояниях работоспособности определяются по выражениям

$$T_N=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\omega_i},\ T_\Sigma=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\omega_i}\ \text{(для четных } i\text{)}. \tag{8}$$

Вероятность того, что система в интервале времени $[0;t]$ еще функционирует (либо работает, либо производится замена отказавшего элемента), т. е. вероятность того, что система за интервал $[0;\ t]$ не попадет в конечное состояние H_N, определяется по формуле $S_N(t)=1-p_N(t)$, где вероятности $p_N(t)$ для соответствующих случаев определяются по выражениям (2) и (5).

Пусть имеется система из оного основного элемента и пяти резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме. Интенсивность отказов работающего элемента равна $\lambda=0{,}05\ 1/\text{ч}$, интенсивность подключения резервных элементов на место отказавшего (интенсивность восстановления) равна $\mu=5\ 1/\text{ч}$. Определим, что в момент времени $t=30$ ч система будет работоспособной.

Система может находиться в двенадцати состояниях: H_0, H_2, H_4, H_6, H_8, H_{10} – состояния работоспособности; H_1, H_3, H_5, H_7, H_9, H_{11} – состояния отказа, причем H_0 – состояние системы, характеризующееся тем, что основной элемент работает безотказно; H_1 – состояние системы, в котором основной элемент отказал и началось подключение первого резервного элемента (восстановление системы); H_2 – состояние системы, в котором закончилось подключение первого резервного элемента, и система продолжает работать безотказно и т. д.; H_{11} – состояние окончательного отказа системы, когда отказали последовательно все пять резервных элементов.

Так как $n=5$, $N=2n+1=11$, то, воспользовавшись формулами (3)–(5), для вероятностей $p_k(t)$ того, что в момент времени t система находится в состоянии H_k $(k=0,1,\dots,11)$, получим

$$p_0(t)=e^{-\lambda t},\qquad p_1(t)=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda t}-e^{-\mu t}\right),$$

$$p_2(t)=\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}\left(e^{-\lambda t}\left[(\mu-\lambda)t-1\right]+e^{-\mu t}\right),\ \dots,$$

$$p_{10}(t)=\frac{(\lambda\mu)^5}{(\mu-\lambda)^{10}}\left(e^{-\lambda t}\left[\frac{1}{120}(\mu-\lambda)^5t^5-\frac{5}{24}(\mu-\lambda)^4t^4+\right.\right.$$

$$+\frac{5}{2}(\mu-\lambda)^3 t^3-\frac{35}{2}(\mu-\lambda)^2 t^2+70(\mu-\lambda)t-126\Big]-$$
$$-e^{-\mu t}\left[\frac{1}{24}(\mu-\lambda)^4 t^4+(\mu-\lambda)^3 t^3+\frac{21}{2}(\mu-\lambda)^2 t^2+\right.$$
$$\left.+56(\mu-\lambda)t+126\right).$$

Вероятность того, что система в момент времени $t=30$ будет работоспособной в соответствии с формулой (6) равна $K(t=30)=0{,}986$. Вероятность того, что система в момент времени $t=30$ попала в состояние окончательного отказа H_{11} равна $p_N(t)=p_{11}(30)\approx 0{,}004$. Среднее время работы системы (8) $T_N=220$, а среднее время пребывания в состояниях работоспособности $T_\Sigma=120$.

Литература

1. *Козлов, Б.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б.А. Козлов, И.А. Ушаков. – М.: Советское радио, 1975. – 472 с.*

2. *Элементы прикладной теории надежности: учеб. пособие / А.Г. Щипицын, А.А. Кощеев, Е.А. Алёшин, О.О. Павловская. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 114 с.*

Поступила в редакцию 4 июня 2012 г.