УДК 519.868

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛИ НЕЙМАНА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.В. Панюков, А.Т. Латипова

Рассматривается анализ устойчивости положения равновесия при интервальных исходных данных. Доказано, что в случае мультипликативной неопределенности прямой и двойственный вектор Фробениуса определяются из точечной модели Неймана с матрицами центров интервалов. В случае интервальной неопределенности интервал для числа Фробениуса можно определить через нахождение положения равновесия для двух точечных моделей Неймана с матрицами, состоящими из верхних и нижних границ интервалов. Также в работе вводятся понятия слабого и сильного решений, которые используются для получения робастных оценок положения равновесия для интервальной модели Неймана.

Ключевые слова: продуктовая стратегия, линейное программирование, модель Неймана, интервальный анализ, теория игр, билинейные системы, программное обеспечение.

Введение

Модель многоотраслевой экономики Неймана оказала большое влияние на теорию экономического роста и накопления капитала и стимулировала развитие математической экономики [1, 2]. Тем не менее во многих работах модель Неймана описывается как нерешаемая чисто теоретическая модель. Практические результаты как правило получают с помощью модели Леонтьева, которая является частным случаем модели Неймана.

Модель Неймана можно применять не только для анализа многоотраслевой экономики, но и для решения других задач, в частности для оптимизации бюджета продаж при ценовой диверсификации (см. [3–5]). Поэтому необходимо разрабатывать численные методы для анализа модели Неймана и внедрять данные методы в пакеты популярного программного обеспечения, например, EXCEL, MATLAB, PROJECT EXPERT или 1С БУХГАЛТЕРИЯ.

Эффективные численные методы нахождения положения равновесия, использующие арифметику с плавающей точкой, представлены в [6]. В этих методах задача сводится к решению соответствующих матричных игр.

В реальной экономике численные значения для элементов матриц затрат и выпуска получают из данных статистики и экспертных оценок, поэтому может возникать неопределенность, которая зачастую является интервальной. Задача нахождения положения равновесия модели Неймана (A, B), когда значения для элементов матриц для модели заданы только в виде интервалов, рассмотрена в [7, 8]. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности прямой и двойственный векторы Фробениуса можно получить из точечной модели Неймана с матрицами центров интервалов, а в случае интервальной неопределенности интервал для числа Фробениуса можно получить, определив положение равновесия для двух точечных моделей Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

В данной работе изложены результаты, анонсированные в [9].

1. Положение равновесия для точечной модели Неймана

Чтобы сохранить целостность повествования, введем ряд определений и рассмотрим кратко полученные ранее результаты.

Определение 1. *Общим* положением равновесия для модели Неймана (A, B), где A и B – это матрицы $m \times n$ затрат и выпуска, элементы которых являются неотрицательными числами

$$a_{ij} \geq 0,\ b_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots n,\ j = 1, 2, \dots m,$$

называют решение $(\lambda,\ x,\ w)$ системы билинейных неравенств и уравнений

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

$$(A - \lambda B)^T\, w \geq 0,\ (w, e^n) = 1,\ w \geq 0, \tag{2}$$

где $e^l \in \mathbf{R}^l,\ l \in \{m, n\},\ (\forall i = 1, 2, \dots, l)\ e_i^l = 1.$

Из данного определения общего положения равновесия следует, что $\lambda \geq 0$.

Определение 2. *Невырожденным* положением равновесия в модели Неймана называется положением равновесия (λ, x, w), при котором выполняется дополнительное условие (λ, x, w)

$$w^T A\, x > 0. \tag{3}$$

В данной статье мы рассматриваем алгоритмы для нахождения общего положения равновесия; т.е. мы хотим найти решение (λ, x, w) для системы (1)-(2).

В общем случае система (1)–(2) имеет не единственное решение. Поскольку число λ^{-1} интерпретируется как равновесный темп роста, который достигается за счет структуры интенсивностей процессов x и структуры равновесных цен на товары w, то для теории и практики наибольший интерес представляют частные положения равновесия с экстремальными значениями λ.

Экстремальные допустимые значения λ можно найти, решив следующие оптимизационные задачи.

$$\lambda^* = \min\left\{\lambda :\ (A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0\right\}, \tag{4}$$

$$\lambda_n = \max\left\{\lambda :\ (A - \lambda B)^T\, w \geq 0,\ (w, e^n) = 1,\ w \geq 0\right\}. \tag{5}$$

Определение 3. Числа λ_n и λ^* для модели Неймана (A, B) называются *числами Неймана и Фробениуса* соответственно. Число Неймана λ_n определяет максимальный темп равновесного роста, а число Фробениуса λ^* определяет минимально возможный темп равновесного роста и продуктивность модели (см. [1, 2]).

Определение 4. Векторы x, w положения равновесия (λ, x, w) называются *прямым и двойственным лучами Неймана,* соответствующие значению λ.

Из ограничений (1), (2) и (4) следует, что для нахождения параметров продуктивности (числа Фробениуса λ^*) и устойчивого положения равновесия необходимо решить следующую задачу билинейного программирования

$$(\lambda^*, x^*, w^*)^T = \arg \max_{(\lambda, x, w)^T \in D(A,B)} \lambda, \tag{6}$$

$$D(A,B)=\left\{\left(\begin{array}{c}\lambda\\ x\\ w\end{array}\right)\;\middle|\;\begin{array}{c}(A-\lambda B)x\le 0,\\ (A-\lambda B)^T w\ge 0,\\ (x,e^m)=1,(w,e^n)=1,\\ x\ge 0, w\ge 0, \lambda\ge 0\end{array}\right\}.$$

Далее под положением равновесия будут подразумеваться параметры продуктивности, если не будет уточнений.

Численные методы нахождения задачи (6) рассмотрены в [6]. Они основаны на нахождении корней монотонных функций

$$u(\lambda)=\min_{x:\,(x,e^m)=1,\,x\ge 0}\quad \max_{i=1,2,\dots n}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}-\lambda b_{ij}\right)x_j$$

или

$$v(\lambda)=\max_{w:\,(w,e^n)=1,\,w\ge 0}\quad \min_{j=1,2,\dots m}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}-\lambda b_{ij}\right)w_i.$$

При фиксированном λ значения функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ равны оптимальным значениям взаимодвойственных задач линейного программирования.

$$\min\left\{u\ :\ (A-\lambda B)\,x\le u,\ (x,e^m)=1,\ x\ge 0\right\},\tag{7}$$

$$\max\left\{v\ :\ (A-\lambda B)^T w\ge v,\ (w,e^n)=1,\ w\ge 0\right\}.\tag{8}$$

Когда значение λ близко к корням функций $u(\lambda),\ v(\lambda)\ \to 0$ задачи (7) и (8) становятся вырожденными из-за близости к нулю базисных переменных u и v в оптимальном базисном решении этих задач. Поэтому задачи (7) и (8) не могут быть решены традиционными методами, использующими вычисления с плавающей точкой.

Далее рассмотрим наши результаты по нахождению корней функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ с помощью численных методов матричных игр. Первую теорему можно применять в случае отсутствия нулевых элементов в матрице B.

Теорема 1. [6]
Пусть (A,B) является моделью Неймана, и все элементы матрицы B положительны. Пусть Γ_C является матричной игрой с платежной матрицей $C=[a_{ij}/b_{ij}]$ $(i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m)$, и пусть $\hat{\lambda}$ является ценой игры Γ_C. Тогда число Неймана λ_n и число Фробениуса λ^* модели Неймана (A,B) равны $\hat{\lambda}$.

Если нулевые элементы отсутствуют в матрице A, то имеет место

Теорема 2. [7]
Пусть (A,B) – модель Неймана, и все элементы матрицы A положительны. Пусть Γ_C является матричной игрой с платежной матрицей $C=[b_{ij}/a_{ij}]$ $(i=1,2,\dots,n,\ \ j=1,2,\dots,m)$, и пусть $\hat{\mu}$ является ценой игры Γ_C. Тогда число Неймана λ_n и число Фробениуса λ_n модели Неймана $1/\hat{\mu}$.

Отметим, что теорема 1 (2) применима только для моделей Неймана для которых матрицы B (A) состоят из положительных элементов. Для следующего подхода некоторые элементы матриц A и B могут быть равны нулю. Поэтому он имеет более широкую область применения. Тем не менее теоремы 1 и 2 предполагают решение только одной матричной игры, тогда как подход, представленный ниже, требует решения нескольких матричных игр.

Теорема 3. [6]
Пусть Γ *является матричной игрой с платежной матрицей* $(A - \lambda B)^T$, *а* $\hat{x}$, $\hat{w}$ – *первого и второго игроков, соответственно. Пусть* $\hat{u}$ – *цена игры* Γ. *Тогда* $(\hat{u},\ \hat{x})$ *и* $(\hat{u},\ \hat{w})$ *являются оптимальными решениями задач (7) и (8), соответственно.*

Доказательство теоремы является тривиальным. Оно следует из игровой интерпретации двойственности задач линейного программирования.

Существуют эффективные итеративные алгоритмы решения матричных игр. В частности, для решения задач (4)–(5) можно использовать алгоритм фиктивного разыгрывания, который является устойчивым к погрешностям округления, в отличие от симплекс-метода.

Симплекс-метод также можно применять при решении матричных игр, так как игра $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ с платежной матрицей $\overline{(A - \lambda B)^T} = (A - \lambda B)^T + \gamma I$ имеет цену $\overline{\hat{u}} = \hat{u} + \gamma$ и оптимальные решения $\overline{\hat{x}} = \hat{x}$, $\overline{\hat{w}} = \hat{w}$, где I – $(n \times m)$-матрица, все элементы которой равны 1,

$$\gamma = \max\{a_{ij} - \lambda b_{ij} :\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\},$$

при этом соответствующие задачи линейного программирования для игры с платежной матрицей $\overline{(A - \lambda B)^T}$ имеют невырожденное оптимальное решение.

2. Положение равновесия для интервальной модели Неймана

В дальнейшем через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будем обозначать *интервальные* матрицы затрат и выпуска, т.е. элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ представляют собой числовые интервалы.

Определение 5. *Интервальной* назовем модель Неймана с интервальными матрицами затрат $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right]\right\}$ *и выпуска* $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{b_{ij}}, \overline{b_{ij}}\right]\right\}$, $i = (\overline{1,n}),\ j = (\overline{1,m})$, $\mathrm{mid}\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}})/\mathbf{2}$, $\mathrm{mid}\mathbf{B} = (\underline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}})/\mathbf{2}$.

Обозначим с помощью mid$\mathbf{A}$ и mid$\mathbf{B}$ матрицы центров интервалов для элементов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно.

Точечные матрицы верхних границ интервалов для элементов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначим $\overline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ соответственно, а матрицы нижних границ интервалов для элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ соответственно [10].

Теорема 4. *Пусть* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *является интервальной моделью Неймана, и для точечных матриц* $\tilde{A}, \tilde{B}$ *выполняется условие*

$$\tilde{A} \in \mathbf{A}, \quad \tilde{B} \in \mathbf{B}. \tag{9}$$

Пусть также

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\tilde{A},\tilde{B})} \lambda\ ; \tag{10}$$

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\overline{\mathbf{A}},\underline{\mathbf{B}})} \lambda\ ; \tag{11}$$

$$(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\underline{\mathbf{A}},\overline{\mathrm{B}})} \lambda. \tag{12}$$

Тогда $\underline{\lambda} \le \tilde{\lambda} \le \overline{\lambda}$.

Доказательство. Из условия (10)

$$\begin{gathered}(\forall = 1, 2, \ldots, n \;\; j = 1, 2, \ldots, m) \\ \left(\overline{a}_{ij} \ge \tilde{a}_{ij},\ \overline{b}_{ij} \ge \tilde{b}_{ij},\ \underline{a}_{ij} \le \tilde{a}_{ij},\ \underline{b}_{ij} \le \tilde{b}_{ij}\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Тогда точечные матрицы можно представить следующим образом.

$$\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A' = \overline{\mathbf{A}} - A'', \quad \tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B' = \tilde{\mathbf{B}} - B'',$$

где

$$A' = \left(a'_{ij}\right) = \left(\tilde{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}\right), \quad B' = \left(b'_{ij}\right) = \left(\tilde{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}\right),$$

$$A'' = \left(a''_{ij}\right) = \left(\overline{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij}\right), \quad B'' = \left(b''_{ij}\right) = \left(\overline{b}_{ij} - \tilde{b}_{ij}\right),$$

при этом все элементы матриц A', B', A'' и B'' неотрицательны. Подставим $\tilde{A} = \overline{\mathbf{A}} - A''$ и $\tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B'$ в задачу (10), получим

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})^T = \arg \max_{(\lambda, x, w)^T \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \tag{14}$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} \\ x \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))x \le 0, \\ (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Ввиду неотрицательности A'' и B' во втором ограничении (14)

$$(\overline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\underline{\mathbf{B}})^T \tilde{w} \ge 0.$$

Таким образом, $(\forall j = 1, 2, \ldots, m)$ выполняется

$$\tilde{\lambda} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} \tilde{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} \tilde{w}_i} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} \overline{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} \overline{w}_i}. \tag{15}$$

Последнее неравенство в данной последовательности следует из условия (11) теоремы, которое заключается в

$$\overline{w} = \arg \max_{w:(w, e^n) = 1, w \ge 0} \quad \min_{j = 1, 2, \ldots, m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i},$$

$$\overline{\lambda} = \max_{w:(w, e^n) = 1, w \ge 0} \quad \min_{j = 1, 2, \ldots, m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i},$$

отсюда $\tilde{\lambda} \le \overline{\lambda}$.

Неравенство $\tilde{\lambda} \ge \underline{\lambda}$ доказывается аналогично. На самом деле, подставив $\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A'$ и $\tilde{B} = \overline{\mathbf{B}} - B''$ в задачу (10), получаем

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\tilde{A},\tilde{B})} \lambda, \tag{16}$$

$$D(\tilde{A},\tilde{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ x \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))x \le 0, \\ (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, \\ w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Из неотрицательности A' и B'' и первого неравенства (16) следует $(\underline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\overline{\mathbf{B}})\tilde{x} \le 0$, поэтому $(\forall i = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется неравенство:

$$\tilde{\lambda} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}\tilde{x}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\tilde{x}_j} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}\underline{x}_{\,j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\underline{x}_{\,j}}. \tag{17}$$

Последнее неравенство следует из (12)

$$\underline{x} = \arg \min_{x:(x,e^m)=1, x \ge 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}x_j},$$

$$\underline{\lambda} = \min_{x:(x,e^m)=1, x \ge 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{\,ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}x_j},$$

отсюда $\tilde{\lambda} \ge \underline{\lambda}$.

Теорема 4 доказана. □

Теорема 4 показывает, что для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ число Фробениуса принадлежит интервалу $\mathbf{\Lambda} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, где $\overline{\lambda}$ – число Фробениуса для точечной модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, а $\underline{\lambda}$ – число Фробениуса для точечной модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$. Тогда любая точечная модель Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in (\mathbf{A}, \mathbf{B}) :\ \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$ имеет число Фробениуса $\tilde{\lambda} \in \mathbf{\Lambda}$.

Теорема 5. *Пусть* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *является интервальной моделью Неймана, а числа* β_A, β_B *и матрицы* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *удовлетворяют ограничениям*

$$\tilde{A} = \beta_A \cdot \mathrm{mid}\mathbf{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} = \beta_B \cdot \mathrm{mid}\mathbf{B} \in \mathbf{B}.$$

Если

$$(\lambda^*, x^*, w^*)^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})} \lambda,$$

то

$$\left(\frac{\lambda^* \beta_A}{\beta_B},\ x^*,\ w^* \right)^T = \arg \max_{(\lambda,x,w)^T \in D(\tilde{A},\tilde{B})} \lambda\ .$$

Доказательство. Задача нахождения положения равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ является следующей.

$$(\tilde{\lambda}^*, \tilde{x}, \tilde{w})^T = \arg \max_{(\tilde{\lambda}, x, w)^T \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \tilde{\lambda}, \qquad (18)$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \tilde{\lambda} \\ x \\ w \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})x \le 0, \\ (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \tilde{\lambda} \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Заменим переменную λ на $\widetilde{\lambda} = \lambda\beta_A/\beta_B$ в задаче (18).

Получим

$$(\lambda^*, \tilde{x}, \tilde{w})^T = \arg \max_{(\lambda, x, w)^T \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda, \qquad (19)$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \tilde{\lambda} \\ x \\ w \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})x \le 0, \\ (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Используем матрицы mid$\mathbf{A}$ и mid$\mathbf{B}$ вместо $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ мы получаем следующую эквивалентную задачу.

$$(\lambda^*, x^*, w^*)^T = \arg \max_{(\lambda, x, w)^T \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})} \lambda, \qquad (20)$$

$$D\left(\begin{array}{c} \mathrm{mid}\mathbf{A}, \\ \mathrm{mid}\mathbf{B} \end{array} \right) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \lambda \\ x \\ w \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda \mathrm{mid}\mathbf{B})x \le 0, \\ (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda \mathrm{mid}\mathbf{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1, \\ x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Эта задача совпадает с задачей нахождения положения равновесия (λ^*, x^*, w^*) для точечной модели Неймана (mid$\mathbf{A}$, mid$\mathbf{B}$). Учитывая преобразование переменной λ, получаем, что кортеж $(\lambda^*\beta_A/\beta_B,\ x^*,\ w^*)$ является положением равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Теорема 5 доказана. □

Таким образом, в случае мультипликативной неопределенности (коэффициенты пропорциональности β_A и β_B неизвестны), несмотря на изменение числа Фробениуса, прямой и двойственный векторы Фробениуса не изменяются. Однако такая устойчивость может наблюдаться и при более общей интервальной неопределенности.

Пример 1. Модель (A, B) размера 2×2 с элементами, удовлетворяющими следующими ограничениями

$$a_{21} + a_{22} \le \lambda^*(b_{21} + b_{22}); a_{11} = b_{11};\ a_{12} = b_{12};$$

имеет положение равновесия

$$\{\lambda^*, (x^*)^T = (0,5; 0,5),\ (w^*)^T = (1; 0)\}.$$

Из этого примера видно, что существуют интервалы для элементов матриц A и B, для которых прямой и двойственный векторы Фробениуса $(x^*,\ w^*)$ не меняются. Поэтому введем понятия *сильного решения* и *слабого решения*.

Определение 6. *Сильным* решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x_s, w_s) такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$ существует положение равновесия $(\tilde{\lambda}, x_s, w_s)$.

Наличие слабого решения обеспечивает допустимость ограничений (1)-(2) для интервальной модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Определение 7. *Слабым* решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x', w') такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$ выполняются ограничения

$$\begin{cases} (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0; \\ (x', e^m) = 1; \ \ (w', e^n) = 1; \ \ x', w', \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение можно использовать для проверки, является ли пара векторов (x, w) слабым решением.

Теорема 6. *Если система ограничений*

$$\begin{cases} (\overline{\mathbf{A}} - \underline{\lambda}\ \underline{\mathbf{B}})x'' \leq 0; \ \ (\underline{\mathbf{A}} - \overline{\lambda}\ \overline{\mathbf{B}})^T w'' \geq 0; \\ (x'', e^m) = 1; \ \ (w'', e^n) = 1; \ \ x'', w'' > 0; \end{cases}$$

разрешима для пары векторов (x'', w''), то (x'', w'') является слабым решением интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Доказательство данной теоремы является по сути компиляцией доказательства теоремы 2.26, приведенной в [11].

Если модель $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет слабое решение, то это решение можно использовать для оценки числа Фробениуса λ'.

Теорема 7. *Пусть $(x',\ w')$ является слабым решением интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Пусть точечная модель Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$ имеет*

$$\lambda' = \max\{\lambda| \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0\},$$

тогда $\lambda' \in [\underline{\lambda}_n; \bar{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}_n$ – число Неймана для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})$ является положением равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Если $\lambda' = \max\{\lambda| \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0\}$, то

$$\lambda' = \min \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w'_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ij} w'_i}.$$

Так как кортеж (λ', x', w') является допустимым, но не оптимальным решением (4), $\lambda' \leq \tilde{\lambda}$. Согласно (4) $\tilde{\lambda} \leq \bar{\lambda}$, откуда $\lambda' \leq \bar{\lambda}$.

Пара $(x',\ w')$ является слабым решением модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, значит, (x', w') являются допустимыми векторами для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, поэтому ограничение

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \overline{\mathbf{B}})w' \geq 0.$$

выполянется.

Пусть $\underline{\lambda}' = \max\{\lambda|\ (\underline{\mathbf{A}} - \lambda\overline{\mathbf{B}})w' \geq 0\}$, тогда

$$\underline{\lambda}' = \min \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_{ij} w_i'}{\sum_{i=1}^{n} \overline{b}_{ij} w_i'}.$$

Кортеж $(\underline{\lambda}', x', w')$ является допустимым решением для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, поэтому $\underline{\lambda} \geq \underline{\lambda}' \geq \underline{\lambda}_n$. Так как $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$, мы получаем $\underline{\mathbf{A}} = \tilde{A} - \Delta A$, $\overline{\mathbf{B}} = \tilde{B} + \Delta B$, $(\Delta a_{ij} \geq 0,\ \Delta b_{ij} \geq 0)$. Откуда

$$\underline{\lambda}_n \leq \underline{\lambda}' = \min \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_{ij} w_i'}{\sum_{i=1}^{n} \overline{b}_{ij} w_i'} \leq \lambda' = \min \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w_i'}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ij} w_i'}.$$

Таким образом, $\lambda' \geq \underline{\lambda}_n$. □

Согласно теореме (7) оценка λ' числа Фробениуса может быть меньше $\underline{\lambda}$.

В следующей теореме применяется другой подход для оценки числа Фробениуса.

Теорема 8. *Пусть (x^*, w^*) являются прямым и двойственным векторами Фробениуса для двух точечных моделей Неймана $(\breve{A}, \breve{B})$ и $(\hat{A}, \hat{B})$, для которых $\hat{a}_{ij} - \breve{a}_{ij} = \Delta a_{ij} \geq 0$, $\hat{b}_{ij} - \breve{b}_{ij} = \Delta b_{ij} \geq 0$. Пусть число Фробениуса модели $(\breve{A}, \breve{B})$ равно $\breve{\lambda}$, а модель $(\hat{A}, \hat{B})$ имеет число Фробениуса $\hat{\lambda}$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \breve{\lambda}$. Тогда если положение равновесия $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ не является вырожденным для модели $(\breve{A}, \breve{B})$, то*

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T (\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B) x^*}{(w^*)^T (\breve{B} + \Delta_B) x^*}. \tag{21}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой о дополняющей нежесткости должны выполняться следующие ограничения

$$(w^*)^T (\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B}) x^* = 0; \tag{22}$$

$$(w^*)^T (\hat{A} - \hat{\lambda}\hat{B}) x^* = 0. \tag{23}$$

Если положение равновесия $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ не является вырожденным для модели $(\breve{A}, \breve{B})$, то в соответствии с (1)-(3) получаем

$$(w^*)^T \breve{A} x^* > 0;\ \left(\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B}\right) x^* \leq 0; w^* \geq 0.$$

Из этого следует

$$(w^*)^T \breve{B} x^* > 0. \tag{24}$$

Отсюда

$$\breve{\lambda} = \frac{(w^*)^T \breve{A} x^*}{w^{*T} \breve{B} x^*} \tag{25}$$

Сделаем замену $\hat{\lambda} = \breve{\lambda} + \Delta\lambda$, $\hat{A} = \breve{A} + \Delta_A$ и $\hat{B} = \breve{B} + \Delta_B$ в (25); откуда

$$(w^*)^T\,(\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B} + \Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B - \Delta\lambda(\breve{B} + \Delta_B))x^* = 0,$$

тогда с учетом (22) и (24) получаем

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T\,(\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T\,(\breve{B} + \Delta_B)x^*}.$$

□

Если интервальная модель Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет сильное решение (x_s, w_s), мы можем оценить изменение числа Фробениуса для точечных моделей Неймана.

Теорема 9. *Пусть (x_s, w_s) является сильным решением интервальной модели Неймана $\left([\breve{A}, \hat{A}], [\breve{B}, \hat{B}]\right)$, обе модели Неймана $(\breve{A}, \breve{B})$ и $(\hat{A}, \hat{B})$ имеют невырожденные положения равновесия $(\breve{\lambda}, x_s, w_s)$ и $(\hat{\lambda}, x_s, w_s)$ соответственно. Пусть также точечная модель Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\tilde{A} = \breve{A} + k\Delta_A$, $\tilde{B} = \breve{B} + k\Delta_B$, $k \in [0; 1]$ имеет число Фробениуса $\tilde{\lambda}$. Тогда*

$$\tilde{\lambda} - \breve{\lambda} = k\Delta\lambda\frac{w_s^T(\breve{B} + \Delta_B)x_s}{w_s^T(\breve{B} + k\Delta_B)x_s}. \tag{26}$$

Доказательство теоремы (9) аналогично доказательству теоремы (8).

Заключение

Прямой и двойственный лучи Неймана для матрицы затрат A и матрицы выпуска B определяются моделью Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$.

Число Фробениуса для модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с интервальными матрицами затрат и выпуска принадлежит интервалу $\mathbf{\Lambda} = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, где $\overline{\lambda}$ число Фробениуса для точечной модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, а $\underline{\lambda}$ число Фробениуса для точечной модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ являются точечными матрицами верхних границ интервалов для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, соответственно; $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ являются точечными матрицами нижних границ интервалов для матриц. Это означает, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ число Фробениуса $\tilde{\lambda} \in \mathbf{\Lambda}$.

Введенные понятия слабого и сильного решения для интервальной модели Неймана являются достаточно конструктивными и позволяют получать робастные оценки для положения равновесия. В дальнейшем предполагается разработать и изучить эффективные алгоритмы нахождения сильного и слабого решений для интервальной модели Неймана.

Литература

1. Ашманов, С.А. Введение в математическую экономику / А.С. Ашманов. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. Альсевич, В.В. Введение в математическую экономику. Конструктивная теория / В.В. Альсевич. – М.: Либроком, 2005. – 256 с.

3. Латипова, А.Т. Модель оптимизации ценовой стратегии для задач бюджетирования / А.Т. Латипова; под ред. Ю.А. Кочетова // Труды Российской конференции «Дискретный анализ и исследоваие операций» (Новосибирск, 2004). – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2004. – С. 206.
4. Латипова, А.Т. Ценовая диверсификация в бюджетировании / А.Т. Латипова; под ред. В.А. Кежаева // Труды Международной конференции «Экономика и управление: проблемы и перспективы» (Санкт-Петербург, 2005). – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2005. – С. 562–566.
5. Панюков, А.В. Оптимизация бюджета продаж / А.В. Панюков, А.Т. Латипова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. «Рынок: Теория и практика». – 2006. – Вып. 4. – № 15(70). – С. 116–120.
6. Panyukov, A.V. Numerical Techniques for Finding Equilibrium in von Neumann's Model // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008. – Issue 14, Vol. 48. – P. 1999–2006.
7. Panyukov, A.V. Finding Equilibrium in von Neumann's Model / A.V. Panyukov, A.T. Latipova // Proceedings of 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. – 2010. – Vol. 13. Part 1. – URL: http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/40647.html (Дата обращения 10.10.2012).
8. Панюков, А.В. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных / А.В. Панюков, А.Т. Латипова // Вестник УГАТУ, Сер. «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2008. – Вып. 2(27), № 10. – С. 150–153.
9. Panyukov, A.V. Stability Analysis of Equilibrium Position of Von Neumann's Model under Interval Uncertainty / A.V. Panyukov, A.T. Latipova // Proceedings of 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. – 2012. – Vol. 14. Part 1. – URL: http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/53981.html (Дата обращения 10.10.2012).
10. Jauilin, L. Applied Interval Analysis / L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter. – Springer-Verlag, 2001. – 382 p.
11. Фидлер, М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2008. – 288 с.

Анатолий Васильевич Панюков, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра экономико-математических методов и статистики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), a_panyukov@mail.ru.

Алина Таиховна Латипова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра экономико-математических методов и статистики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), latipova.alina@gmail.com.

STABILITY ANALYSIS OF EQUILIBRIUM POSITION OF VON NEUMANN'S MODEL UNDER INTERVAL UNCERTAINTY

Anatoly V. Panyukov. South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)**,**
Alina T. Latipova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

There is discussed the problem of stability analysis of equilibrium position under interval settings. In case of multiplicative uncertainty both primal and dual Frobenius vectors are obtained by exact von Neumann's model with matrices of interval centers. Interval of the Frobenius number in case of interval von Neumann's model are obtained by finding equilibrium for two exact von Neumann's models with exact matrices of interval upper and lower bounds. There are introduced definitions of weak and strong solutions, which are used to obtain robust estimates of equilibrium position of interval von Neumann's model.

Keywords: Product strategy, linear programming, von Neumann's model, interval analysis, game theory, bilinear systems, computer, software, interval uncertainty

References

1. Ashmanov S.A. Introduction to Mathematical Economics [Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku]. Nauka, Moscow, 1984. 296 p.

2. Al'sevich, V.V. Introduction to Mathematical Economics. Constructive Theory [Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku. Konstruktivnaya teoriya]. Moscow: Librocom, 2005. 256 p.

3. Latipova A.T. A Model for the Optimization of the Price Strategy in Budgeting [Model' optimizatsii tsenovroi strategii dlya zadach byudzhetirovaniya]. Trudy Rossiyskoy konferentsii "Diskretny analiz i issledovanie operatsiy"(Novosibirsk, 2004) [Discrete Analysis and Operations Research: Proc. of Russian Conf. (Novosibirsk, 2004)]. Novosibirsk, Institute of mathematics of Rus. Sci. Academy (Siberian Branch), 2004 . P. 206.

4. Latipova A.T. Price Diversification in Budgeting [Tsenovaya diversifikatsiya v byudzhetirovanii]. Trudy mezhdunarodnoy konferentsii Ekonomika i upravlenie: problemy i perspektivy [Economics and Management: Problems and Prospects: Int. Conf. Proc. (Sant Petersburg, 2005)]. Saнт Petersburg: Izd-vo SPbGTU, 2005. P. 562 – 566.

5. Panyukov A.V., Latipova A.T. Optimization of Sales Budget [Optimizatsiya byudzheta prodazh]. // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Univ., Ser.: "Rynok: Teoriya i praktika" [Bulletin of South Ural State Univ., Ser. Markets: Theory and Practice]. Issue 4, Vol. 15(70), 2006. P. 116–120.

6. Panyukov A.V., Latipova A.T. Numerical Techniques for Finding Equilibrium in von Neumann's Model. // Computational Mathematics and Mathematical Physics, issue 14, Vol. 48, 2008. P. 1999–2006.

7. Panyukov A.V., Latipova A.T. Finding Equilibrium in von Neumann's Model. // Proceedings of 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in

Manufacturing. Vol. 13. Part 1. Elsevier, 2010. ISBN: 978-3-902661-43-2, available at: http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/40647.html.

8. Panyukov A.V., Latipova A.T. Finding Equilibrium in von Neumann's Model in Case of Interval Uncertainty of Initial Data [Otsenka polozheniya ravnovesiya v modeli Neimana pri interval'noi neopredelennosti ishodnykh dannykh]. // Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Univ., Ser. Upravlenie, vycheslitelnaya tekhnika i informatika [Bulletin of Ufa State Aviation Univ., Ser. Control, Computer Engineering and Computer Science]. Issue 2(27), vol. 10, 2008. P. 150–153.

9. Panyukov A.V. Latipova A.T. Stability Analysis of Equilibrium Position of Von Neumann's Model under Interval Uncertainty / A.V. Panyukov, A.T. Latipova // Proceedings of 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. Vol. 14. Part 1. Elsevier, 2010. ISBN: 978-3-902661-43-2, available at: www.ifac-papersonline.net/Detailed/53981.html.

10. Jaulin, L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. – Springer-Verlag, 2001. 382 p.

11. Fiedler M., Nedoma J., Ramik J., Rohn J., Zimmermann K. Linear Optimization Problems with Inexact Data. – Springer Science+Business Media, 2006. 288 p.

Поступила в редакцию 10 октября 2012 г.