

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНОНАГРУЖЕННЫХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В.Н. Прокопьев, К.В. Гаврилов

Приводится методика и результаты решения задачи оптимизации конструктивных параметров сложнонагруженных подшипников скольжения. Поле гидродинамических давлений в смазочном слое подшипников определяется интегрированием модифицированного уравнения Элрода. Показано, что выбором оптимальных параметров, прежде всего, вязкостно-температурной зависимостью масла, можно существенно улучшить все гидромеханические характеристики, определяющие износостойкость подшипников, усталостную долговечность антифрикционного слоя, потери на трение.

1. Введение

Типичными представителями сложнонагруженных подшипников скольжения являются шатунные подшипники коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания (ДВС). К основным гидромеханическим характеристикам (ГМХ) этих подшипников принято относить: мгновенные значения минимальной толщины смазочного слоя $h_{\min}(\tau)$ и максимального гидродинамического давления $p_{\max}(\tau)$, а также их экстремальные $\inf h_{\min}$, $\sup p_{\max}$ и средние h_{\min}^* , p_{\max}^* за цикл τ_{η} величины; мгновенные и средние потери мощности на трение $N(\tau)$, N^* ; расходы смазки $Q_T(\tau)$, Q_T^* , вытекающей в торцы подшипника; эффективную (расчетную) температуру смазочного слоя T_s .

Целью решения задачи оптимизации является определение оптимальных значений конструктивных параметров подшипника, обеспечивающих получение расчетных значений ГМХ, принадлежащих допустимой области. Совокупность значений ГМХ, показывающая относительное «предпочтение» одного варианта конструкции подшипника по отношению к другим, является критерием оптимальности. Для определенности обычно требуется, чтобы критерий оптимальности был минимален и тогда сокращенная запись задачи оптимизации сводится к виду $\min V(q)$, $q \in D$, означающему: найти вектор расчетных значений параметров $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, обеспечивающий минимальное значение критерия оптимальности $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ при решении системы неравенств

$$G_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$q_n^- \leq q_n \leq q_n^+. \quad (2)$$

Неравенства (1) являются ограничениями, а (2) определяют область возможных изменений расчетных значений параметров, исходя из условий эксплуатации подшипника, технологии его изготовления и конструктивных соображений. В зависимости от целей оптимизации неизвестными являются ширина подшипника, диаметр, радиальный зазор, поперечная и продольная геометрия шатунной шейки и вкладышей, координаты расположения на их поверхностях источников смазки, характеристики масла и другие.

2. Методика оптимизации

В работе использовался метод оптимизации на основе ЛП_r-последовательностей в сочетании с выделением множества Парето и организации на нем поиска оптимального решения [1]. Характерным отличием этого метода является отсутствие минимизируемой целевой функции в обычном понимании. Вместо нее на основе экспертных оценок формируется в некотором смысле оптимальный набор критериев.

В основе метода лежит трехэтапное численное исследование (зондирование) пространства параметров.

На первом этапе составлялась таблица испытаний, отражающая зависимость результатов расчета критериев качества от варьируемых параметров: ширины подшипника B , его диаметра D , радиального зазора C , давления подачи смазки p_S , вязкостно-температурной характеристики (ВТХ), т. е. зависимости эффективной вязкости $\mu_{\text{э}}$ от температуры. На втором этапе эксперты, просматривая таблицу испытаний, назначали ограничения для каждого критерия. На третьем проверялась непустота множества допустимых значений $(B, D, C, \mu_{\text{э}}, p_S)$. Если множество пусто, осуществлялся возврат ко второму этапу: эксперты либо делали уступки при назначении ограничений, либо увеличивали число пробных точек. После этого оптимизация начиналась с начала. Если множество $(B, D, C, \mu_{\text{э}}, p_S)$ оказывалось не пустым, из него исключались неэффективные точки. Множество всех эффективных точек образовывало множество паретовских точек \tilde{P} .

На варьируемые параметры накладывались ограничения. Границы для $\min C \leq C \leq \max C$ устанавливались исходя из рекомендаций экспертов. Диапазон изменения вязкостей смазки при 40°C и 100°C выбирался в соответствии с их известными значениями у моторных масел. В частности, для дизельных двигателей: $\mu_{40} = 0,0425 \dots 0,0680$ Па·с, $\mu_{100} = 0,0085 \dots 0,0136$ Па·с.

Давление подачи смазки варьировалось в пределах от 0,05 МПа до 0,7 МПа, что соответствует диапазону давлений, рекомендуемому заводами-изготовителями ДВС.

Таким образом, пространство изменяющихся параметров для оптимизации представлялось в виде точек q с координатами $(C, B, D, \mu_{40}, \mu_{100}, p_S)$.

3. Критерии качества

Критериями качества $\Phi_1(q), \Phi_2(q), \dots, \Phi_k(q)$ системы «шатунная шейка–смазочный слой–вкладыши» выбраны средние за цикл ГМХ: $h_{\min}^*, p_{\max}^*, N^*, Q_T^*, T_{\text{э}}^*$, образующие вектор качества $\Phi(q)$, учитывающий значения и важность каждого из индивидуальных критериев $\Phi_\nu(q)$, где ν – число ГМХ, включаемых в перечень критериев оптимизации. Этот общепринятый перечень дополнен протяженностью зон касания $\alpha|_{h=h_{kp}}$, т. е. участков траектории движения центра шатунной шейки, на которых $h_{\min}(\tau)$ меньше критических значений h_{kp} .

Выбор в качестве критериев средних h_{\min}^*, p_{\max}^* , а не экстремальных $\inf h_{\min}$ и $\sup p_{\max}$ значений продиктован тем, что у шатунных подшипников форсированных ДВС расчетные значения $\inf h_{\min}$ оказываются значительно меньше суммы высот неровностей поверхностей вкладышей подшипника и шатунной шейки.

Таким образом, в процессе решения задач оптимизации допускалось появление значений $\inf h_{\min} < h_{kp}$, а к средней за цикл нагружения минимальной толщине смазочного слоя h_{\min}^* предъявлялось требование максимизации.

Обычно считается, что максимальная расчетная температура смазочного слоя подшипников не должна превышать $120\text{--}130^\circ\text{C}$. Эта величина и принималась в качестве ограничения для максимальной за цикл нагружения эффективной температуры смазочного слоя $\max T_{\text{э}}$. К температуре $T_{\text{э}}^*$ предъявлялось требование минимизации.

С учетом выше сказанного задача оптимизации заключалась в отыскании точки \tilde{q} такой, что

$$\Phi(\tilde{q}) = \underset{q \in D}{\text{opt}} \Phi(q),$$

где D – множество допустимых точек, определяющих оптимальное значение вектора качества.

4. Алгоритмы расчета ГМХ

Исходной для расчета ГМХ является система уравнений движения центра шатунной шейки [2]:

$$m_{\text{э}} \omega_0^2 \ddot{U} = F_U(\tau) + R_U(U, \dot{U}), \quad (3)$$

Расчет и конструирование

где m_3 и $U = (X, Y)$ – эффективная (расчетная) масса шейки и вектор перемещений ее центра; \ddot{U}, \dot{U} – производные по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$; F_U, R_U – проекции главного вектора внешних сил и гидродинамических давлений на оси X, Y , закрепленные на подшипнике; ω_0 – угловая скорость вращения коленчатого вала.

Система (3) интегрировалась методом второго порядка, базирующемся на применении формул дифференцирования назад (методом ФДН), подробности которого изложены в работе [2].

Реакции $R_U(U, \dot{U}, \ddot{U})$ определялись на основе результатов численного интегрирования модифицированного уравнения Элрода для давлений в смазочном слое и степени его заполнения смазкой [3–5]. Модификация, используемая в работе, записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}_3} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\bar{h}^3}{12\bar{\mu}_3} \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right] = \frac{\bar{\omega}}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \{g\bar{h} + (1-g)(\bar{h}\theta)\} + \frac{\partial}{\partial \tau} \{g\bar{h} + (1-g)(\bar{h}\theta)\}, \quad (4)$$

где $\Pi = g\bar{p} + (1-g)\bar{p}_c$.

В активной области смазочного слоя Ω_A , где $g = 1$, степень заполнения $\theta = 1$. В области кавитации, где $g = 0$, гидродинамическое давление p равно кавитационному p_c , степень заполнения меньше единицы, причем θ определяет массовое содержание жидкой фазы (масла) в единице объема пространства между шатунной шейкой и вкладышами.

Разностная аппроксимация уравнения (2) на сетке $\tau^n, \varphi, \bar{z}_j$, где $\tau^n = n\Delta_\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\varphi_i = i\Delta_\varphi$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\Delta_\varphi = l_\varphi / (N - 1)$, $\bar{z}_j = j\Delta_{\bar{z}}$ ($j = 1, 2, \dots, M$), $\Delta_{\bar{z}} = l_z / (M - 1)$, l_φ – протяженность подшипника в направлении координаты φ , l_z – протяженность подшипника в направлении координаты \bar{z} , приводит к следующей системе уравнений для вычисления давлений \bar{p} и степени заполнения θ :

$$\bar{p}_{ij} = k_1^{-1} (M_1 + M_2 \bar{p}_c + M_3 - K_3 + K_4), \text{ если } g_{ij} = 1;$$

$$\theta_{ij} = \frac{M_1 + (M_2 - K_2) \bar{p}_c + M_3 + K_4}{\bar{\omega} \Delta_\varphi \bar{h}_{ij} + K_3}, \text{ если } g_{ij} = 0.$$

Здесь $K_1 = \left\{ \left(\Gamma_{i-1/2,j} + \Gamma_{i+1/2,j} \right) + K_2 \right\}$, где $K_2 = 2 \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij}$;

$$K_3 = \Delta_\varphi^2 \left(\frac{\bar{h}_{ij}}{\Delta \tau} + \frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial \tau} \right); \quad K_4 = \Delta_\varphi^2 \frac{\bar{h}_{ij}}{\Delta \tau} [g_{ij}^n + (1 - g_{ij}^n) \theta_{ij}^n];$$

$$M_2 = \left\{ \left(-g_{i-1,j} \Gamma_{i-1/2,j} \right) - \left(g_{i+1,j} \Gamma_{i+1/2,j} \right) + \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij} [2 - (g_{i,j-1} + g_{i,j+1})] \right\};$$

$$M_1 = \left\{ \left(g_{i-1,j} \Gamma_{i-1/2,j} \bar{p}_{i-1,j} \right) + \left(g_{i+1,j} \Gamma_{i+1/2,j} \bar{p}_{i+1,j} \right) + \left(\frac{\Delta_\varphi}{\Delta_{\bar{z}}} \right)^2 \Gamma_{ij} (g_{i,j-1} \bar{p}_{i,j-1} + g_{i,j+1} \bar{p}_{i,j+1}) \right\};$$

$$M_3 = \bar{\omega} \Delta_\varphi \left[(1 - g_{i-1,j}) \bar{h}_{i-1,j} \theta_{i-1,j} - f_\omega \right],$$

где $f_\omega = \frac{(g\bar{h})_{i-1,j}}{2} (2 - g_{ij}) - \frac{(g\bar{h})_{i+1,j}}{2} g_{ij} - \frac{(g\bar{h})_{ij}}{2} (2 - g_{i+1,j} - g_{i-1,j})$.

Эффективная температура смазочного слоя определялась на каждом временном шаге интегрирования системы (3) решением уравнения теплового баланса, отражающего равенство за цикл τ_y значений теплоты, рассеянной в смазочном слое и отведенной смазкой, вытекающей в торцы подшипника, а также теплопередачей в шатунную шейку и вкладыши.

Решением уравнения теплового баланса определялась эффективная температура смазочного слоя $T_3(\tau)$, на основании которой корректировалась вязкость смазки по двухконстантной форму-

ле Фогеля, с поправкой Тодера, учитывающей зависимость вязкости от давления. Методика корректировки подробно изложена в работе [6].

5. Шатунные подшипники серийного двигателя КамАЗ-740.11.220

В качестве первого примера рассмотрим задачу оптимизации конструктивных параметров шатунного подшипника коленчатого вала двигателя КамАЗ-740.11.220, который выпускается серийно и является основным силовым агрегатом, устанавливаемым на большегрузные автомобили, автобусы, сельскохозяйственную технику. Диаметр подшипника, его ширина, радиальный зазор, диаметр отверстия для подачи смазки, давление и температура подачи, угловая скорость вращения коленчатого вала, эффективная (расчетная) масса шипа, динамическая вязкость смазки при 40 °С и 100 °С принимались соответственно равными: $D = 85$ мм, $B = 29$ мм, $C = 0,044$ мм, $d_i = 6$ мм, $p_s = 0,5$ МПа, $T_s = 90$ °С, $\omega_2 = 2600$ об/мин, $m_{\text{ш}} = 3$ кг, $\mu_{40} = 0,0661$ Па·с, $\mu_{100} = 0,0107$ Па·с.

На варьируемые параметры накладывались следующие ограничения: $25 \text{ мм} \leq B \leq 35 \text{ мм}$, $80 \text{ мм} \leq D \leq 90 \text{ мм}$, $\min C = 40 \text{ мкм}$, $\max C = 100 \text{ мкм}$.

В соответствии с первым этапом решения задачи оптимизации составлялась таблица испытаний (табл. 1).

Таблица 1

Таблица 1

№ опыта	Исходные значения варьируемых параметров			Значения критериев оптимизации				
	C , мм	B , мм	D , мм	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	$T_{\text{Э}}^*$, °С	P_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
1	0,092	0,026	0,080	2,846	0,0654	102,01	86,54	279
2	0,067	0,025	0,088	3,052	0,0541	104,84	79,57	268
3	0,0475	0,032	0,082	3,899	0,0355	106,66	62,12	204
4	0,040	0,030	0,081	3,621	0,0351	106,25	67,69	243
...								
97	0,045	0,031	0,088	3,976	0,0318	106,46	61,63	141
98	0,050	0,026	0,082	3,582	0,0405	105,97	72,84	278
99	0,045	0,026	0,089	3,738	0,0389	105,42	69,27	167
100	0,045	0,029	0,081	3,927	0,0381	108,83	62,23	150

Заметим, что исходные значения варьируемых параметров были выбраны достаточно далекими от параметров серийного варианта конструкции подшипников. В диалоговом режиме экспертами назначались ограничения для критериев качества с учетом следующих требований: $h_{\min}^* = \sup$ – наибольшее значение; $(Q_T^*, T_{\text{Э}}^*, P_{\max}^*, \alpha|_{h=2}) = \inf$ – наименьшие значения. В результате было определено множество Парето в виде четырех вариантов совокупности варьируемых параметров (табл. 2).

Множество Парето-оптимальных решений

Таблица 2

Значения варьируемых параметров			Значения критериев оптимизации				
C , мм	B , мм	D , мм	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	$T_{\text{Э}}^*$, °С	P_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
0,045	0,031	0,088	3,976	0,0318	106,46	61,63	141
0,044	0,032	0,085	3,854	0,0312	106,62	62,10	152
0,0445	0,029	0,087	3,779	0,0319	106,32	64,56	156
0,042	0,030	0,084	3,687	0,0309	106,80	60,34	158

Окончательный вариант параметров подшипника (C, B, D), отобранный экспертами, приведен в табл. 3.

Результаты оптимизации свидетельствуют о том, что конструктивные параметры серийного шатунного подшипника двигателя КамАЗ-740.11-220 близки к оптимальным. Улучшить ГМХ в

Расчет и конструирование

пределах 10%, а такие характеристики, как $\alpha|_{h=h_{kp}}$ и Q_T^* на 48% и 18% соответственно удается сравнительно небольшими изменениями конструктивных параметров. Время, затраченное на решение задачи оптимизации параметров, составило порядка 120 мин., что не идет ни в какое сравнение с годами экспериментальных исследований и эксплуатационных испытаний, позволивших прийти к параметрам, близким к оптимальным.

Таблица 3

Сравнение параметров оптимизированной и серийной конструкции шатунных подшипников двигателя КамАЗ-740.11-220

Параметры	C , мм	B , мм	D , мм
Оптимизированный	0,045	31,0	88
Серийный	0,044	29,0	85

В табл. 4 приведены значения критериев оптимизации для серийного и оптимизированного подшипников.

Таблица 4

Значения критериев оптимизации

Критерии оптимизации	h_{min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{ϑ}^* , °С	p_{max}^* , МПа	$\alpha_{h=2}$, град ПКВ
Оптимизированный	3,976	0,0318	106,5	61,63	141
Серийный	3,719	0,039	108,9	69,21	274
Отн. разница, %	6,4	18,4	2,4	10,9	48

6. Шатунные подшипники форсированного двигателя КамАЗ-740.51.360

В настоящее время заводом-изготовителем для серийного производства подготовлен перспективный двигатель КамАЗ-740.51-360. Конструктивные параметры шатунного подшипника этого двигателя установлены заводом по аналогии с параметрами шатунного подшипника серийного двигателя КамАЗ-740.11-220, за исключением величины угловой скорости коленчатого вала $\omega_2 = 2200$ об/мин, величина которой изменена в связи с форсированием двигателя по мощности.

Проведенные расчеты свидетельствуют, что значения ГМХ шатунных подшипников коленчатого вала двигателя КамАЗ-740.51-360 достигают критических (недопустимых) величин.

Для их улучшения предпринята попытка изменить величину радиального зазора C , давления подачи p_S , а также вязкости μ_{40} и μ_{100} , е. изменить вязкостно-температурную зависимость применяемого для смазки моторного масла (табл. 5) на основе выбранных случайным образом пяти сочетаний μ_{40} и μ_{100} .

Таблица 5

Значения вязкости масел

Вариант	1	2	3	4	5
μ_{100} , Па·с	0,0085	0,0102	0,0119	0,0136	0,0136
μ_{40} , Па·с	0,0680	0,0595	0,0510	0,0680	0,0425

После составления таблицы испытаний (табл. 6) и назначения экспертами ограничений для критериев h_{min}^* , Q_T^* , T_{ϑ}^* , p_{max}^* , $\alpha|_{h=1,5}$ было определено множество Парето в виде семи вариантов совокупности варьируемых параметров (табл. 7), из которых выбран (табл. 8) предпочтительный (оптимальный) вариант. В табл. 9 приведены значения критериев оптимизации для серийного и оптимизированного подшипников.

К оптимальным значениям вязкости масла μ_{40} и μ_{100} наиболее близко примыкают вязкости $\mu_{40} = 0,070$ Па·с и $\mu_{100} = 0,012$ Па·с масла Shell Rimula Ultra XT SAE 5W-40.

Из табл. 7 следует, что использованием для смазки двигателя КамАЗ-740.51-360 этого масла, а также увеличением давления подачи до 0,6 МПа и уменьшением радиального зазора до 42 мкм можно увеличить расчетное значение минимальной толщины смазочного слоя h_{\min}^* на 20% и снизить на такую же величину максимальное гидродинамическое давление p_{\max}^* . При этом протяженность зоны касания $\alpha|_{h=1,5}$ не превысит 20% цикла нагружения, что считается допустимым.

Таблица 6

Таблица испытаний

№ опыта	Исходные значения варьируемых параметров				Значения критериев оптимизации				
	C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °C	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
1	0,087	0,065	0,0087	0,54	3,248	0,054	100,8	123,5	296
2	0,051	0,0494	0,0121	0,62	3,594	0,021	110,1	104,7	252
3	0,040	0,0561	0,0102	0,39	3,312	0,011	108,2	98,9	244
4	0,072	0,0584	0,0091	0,22	2,971	0,010	110,7	122,1	272
...									
97	0,049	0,0651	0,0103	0,42	3,415	0,013	104,8	95,7	178
98	0,093	0,044	0,0082	0,65	2,561	0,061	102,4	131,5	317
99	0,082	0,0219	0,0110	0,32	2,612	0,043	110,4	109,7	283
100	0,041	0,0432	0,0131	0,68	3,809	0,049	115,9	87,3	139

Таблица 7

Множество Парето-оптимальных решений

Значения варьируемых параметров				Значения критериев оптимизации				
C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °C	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
0,045	0,044	0,0129	0,68	3,891	0,012	109,7	88,4	137
0,042	0,050	0,0132	0,59	4,523	0,011	109,4	87,3	129
0,040	0,067	0,0136	0,70	4,480	0,011	108,8	96,2	141
0,0415	0,061	0,0131	0,64	4,225	0,012	109,8	97,5	144
0,049	0,046	0,0135	0,62	3,894	0,010	109,9	98,2	143
0,042	0,066	0,0134	0,65	3,971	0,011	108,2	93,7	138
0,044	0,053	0,0128	0,63	3,874	0,012	109,3	94,2	142

Таблица 8

Сравнение параметров исходной и оптимизированной конструкций шатунных подшипников двигателя КамАЗ-740.51-360

Параметры	C , мм	μ_{40} , Па с	μ_{100} , Па с	p_S , МПа
Оптимизированный	0,042	0,050	0,0132	0,59
Исходный	0,044	0,0661	0,0107	0,50

Таблица 9

Значения критериев оптимизации

Критерии оптимизации	h_{\min}^* , мкм	Q_T^* , л/с	T_{Σ}^* , °C	p_{\max}^* , МПа	$\alpha_{h=1,5}$, град ПКВ
Оптимизированный	4,523	0,011	109,4	87,3	129
Исходный	3,631	0,018	111,2	107,8	280
Отн. разница, %	19,7	38,9	1,6	19,0	53,9

Представленная работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)» (код проекта РНП 2.1.2.2285) и финансовой поддержке Правительства Челябинской области.

Литература

1. *Соболь, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Н.Б. Статников. - М.: Наука, 1981, - 285 с.*
2. *Прокопьев, В.Н. Повышение эффективности алгоритмов расчёта выходных параметров сложнагруженных опор скольжения двигателей транспортных машин / В.Н. Прокопьев, Ю.В. Рождественский, Н.В. Ширококов // Вестник УМОАТ. - Курган, 1999. - №2. - С. 28-32.*
3. *Элрод. Алгоритм расчёта зоны кавитации / Элрод // ТАОИМ. - М.: Мир. Серия Ф. Проблемы трения и смазки. - 1981. - № 3. - С. 28-32.*
4. *Прокопьев, В.Н. Модификации алгоритма Элрода и их применение для расчёта гидродинамических давлений в смазочных слоях сложнагруженных опор скольжения / В.Н. Прокопьев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2001. - Вып. 1. - №6 (06). - С. 52-60.*
5. *Прокопьев, В.Н. Применение алгоритмов сохранения массы при расчёте динамики сложнагруженных опор скольжения / В.Н. Прокопьев, А.К. Бояринова, КВ. Гаврилов // Проблемы машиностроения и надежности машин. - М.: Наука, 2004. - № 4. - С. 32-38.*
6. *Прокопьев, В.Н. Применение при расчете гидромеханических характеристик сложнагруженных подшипников алгоритма сохранения массы / В.Н. Прокопьев, КВ. Гаврилов // Труды международного научного симпозиума «Гидродинамическая теория смазки - 120 лет». В 2-х томах. - М.: Машиностроение, Орел: ОрелГТУ, 2006. - Т. 1. - С. 330-339.*