УДК 681.513.685

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ И ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ

Р.Ю. Шаров

STOCHASTIC PROBLEM OF THE RECONSTRUCTION AND REPLACEMENT OF EQUIPMENT

R.Yu. Sharov

В статье описывается задача о восстановлении и замене оборудования марковской цепью с двумя состояниями. Проводится анализ функции общего и среднего дохода за время жизни оборудования и дается алгоритм расчета оптимального времени замены оборудования.

Ключевые слова: стохастическая модель, замена оборудования.

The problem of equipment reconstruction and replacement by Markov chain with two states is described. The analysis of the functions of the general and average income for equipment time life is given and an optimal time calculation algorithm of equipment replacement is proposed.

Keywords: stochastic model, replacement of equipment.

Введение

Задача о восстановлении и замене оборудования рассматривалась в детерминированной постановке Р.Беллманом и решалась методом динамического программирования [1]. В предлагаемой работе состояние промышленного оборудования в процессе эксплуатации и ремонта описывается марковской цепью с двумя состояниями: состояние 1 соответствует исправному оборудованию, состояние 0 – оборудованию, находящемуся в ремонте.

1. Постановка задачи

Время предполагается дискретным (например, единица измерения – 1 ч). Исправное эксплуатируемое оборудование, с вероятностью p_n остается исправным на следующем шаге и с вероятностью $1–p_n$ переходит в состояние ремонта. В связи со старением оборудования вероятность p_n уменьшается по закону геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} &p_n = \alpha p_{n-1}, \\ &p_0 = 1, \\ &0 < \alpha < 1, \end{aligned} \tag{1}$$

q – вероятность того, что неисправное оборудование на следующем шаге останется в ремонте. Можно ввести в модель изменяющуюся вероятность q, возрастающую с течением времени, что моделирует усложнение ремонта устаревающего оборудования. Для непрерывного времени стохастическая постановка задачи рассматривается в работе [2].

Введём величины $Q_1[n]$ и $Q_0[n]$:

$Q_1[n]$ – вероятность рабочего состояния оборудования на временном шаге n;

$Q_0[n]$ – вероятность того, что на шаге n оборудование находится в ремонте;

$Q[n] = (Q_1[n], Q_0[n])$ – вектор распределения вероятностей.

Тогда определим:

$$Q[n] = Q[0] \cdot A[1] \cdot A[2] \cdot \ldots \cdot A[n], \tag{2}$$

где $A[n] = \begin{bmatrix} p_n & 1-p_n \\ 1-q & q \end{bmatrix}$ – переходная матрица вероятностей.

Доход, полученный в течение шага n, можно рассчитать по формуле:

$$D[n] = \text{п} Q_1[n] - cQ_0[n], \tag{3}$$

п – доход, получаемый от работающего оборудования в единицу времени, с – расход за ремонт в единицу времени.

Шаров Роман Юрьевич – аспирант кафедры информатики, Южно-Уральский государственный университет; romich@is74.ru

Sharov Roman Yurievich – graduate student “Informatics” of South Ural State University;romich@is74.ru

Тогда средний доход за время жизни оборудования N:

$$P_r'[N]=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\text{п}Q_1[n]-cQ_0[n]), \qquad (4)$$

а общий доход вычисляется по формуле:

$$P_r[N]=\sum_{n=1}^{N}(\text{п}Q_1[n]-cQ_0[n]). \qquad (5)$$

В таком случае решение задачи о замене оборудования сводится к нахождению N_0 – точки максимума функции $P_r[N]$. Считаем, что в момент времени N_0 целесообразно заменить оборудование новым.

2. Алгоритм выбора и обоснование модели замены оборудования

Функции общего и среднего дохода нелинейны и, по-видимому, не выражаются в аналитическом виде известными методами. Отыскание момента замены оборудования нетрудно реализовать численными методами. Предпримем попытку аналитического исследования:

$p_0 = 1$; $p_{n+1} = \alpha P_n$ значит, $P_n = \alpha^n$; Отсюда получаем: $A[n]=\begin{bmatrix}\alpha^n & 1-\alpha^n\\ 1-q & q\end{bmatrix}$. Из выражения (2) вытекает, что $Q[n] = Q[n-1]A[n]$.

Вычислим начальные значения членов последовательности Q[n]:

$$Q[1]=[1;0]\cdot\begin{bmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-q & q\end{bmatrix}=[\alpha;1-\alpha].$$

$$Q[2]=[\alpha;1-\alpha]\cdot\begin{bmatrix}\alpha^2 & 1-\alpha^2\\ 1-q & q\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\alpha^3+(1-\alpha)(1-q);\alpha(1-\alpha^2)+(1-\alpha)q\right].$$

Из условия задачи вытекает, что сумма 1 и 2-й компоненты вектора $Q[n]$ равна единице (это вероятности состояний, образующие полную систему вероятностей).

Тогда примем:

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\alpha;\ \alpha_2=\alpha^3+(1-\alpha)(1-q);\\ &1-\alpha_2=\alpha(1-\alpha^2)+(1-\alpha)q.\end{aligned} \qquad (6)$$

Запишем

$$Q[n]=[\alpha_{n-1};1-\alpha_{n-1}]\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1^n & 1-\alpha_1^n\\ 1-q & q\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\alpha_{n-1}\alpha_1^n+(1-\alpha_{n-1})(1-q);1-\left(\alpha_{n-1}\alpha_1^n+(1-\alpha_{n-1})(1-q)\right)\right].$$

Отсюда находим выражение для α_n:

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}\alpha_1^n+(1-\alpha_{n-1})(1-q). \qquad (7)$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\to b$. По условию $0<\alpha<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_1^n\to 0.$

Тогда будем искать значение b из уравнения: $b=(1-b)(1-q)$.

В итоге получаем: $b=1-\frac{1}{2-q}$ или

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\to 1-\frac{1}{2-q}$;

Из соотношения (4) получаем

$$\lim_{N\to\infty}\Pr'[N]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\text{п}Q_1[n]-cQ_0[n]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\text{п}\alpha_n-c(1-\alpha_n).$$

Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty}\Pr'[N]=\text{п}\left(1-\frac{1}{2-q}\right)-c\frac{1}{2-q}. \qquad (8)$$

Значит, функция среднего дохода имеет горизонтальную асимптоту, с течением времени средний доход от эксплуатации стабилизируется, причем его предельная величина зависит от начальных параметров п, c и q. Очевидно, это предельное значение может быть как отрицательным, так и положительным или нулевым. Путем несложных выкладок можно вывести условие нулевого предельного среднего дохода:

$$\frac{c}{\text{п}}=1-q. \qquad (9)$$

Модель имеет смысл при условии, что средний доход превышает затраты на ремонт. Только в этом случае существует предел уравнения (7).

Параметр α определяет лишь быстроту стабилизации среднего дохода (чем больше значение α, тем медленнее стабилизируется доход), от него значение предельного дохода не зависит.

Рассмотрим функцию общего дохода.

Так как Pr[N] = N·Pr'[N], учитывая соотношение (5), делаем вывод, что функция общего дохода имеет наклонную асимптоту:

$$\Pr[N]=\left(\text{п}\left(1-\frac{1}{2-q}\right)-c\frac{1}{2-q}\right)\cdot N+m,$$

где m – некоторая константа, определяемая параметрами п, c, q.

При $\frac{c}{n}+q-1<0$ (в частности, при c > п) общий доход, в конечном счёте, будет убывать. Как свидетельствуют расчеты, если при этом взять малое α → 0 и большое q → 1, экстремума внутри отрезка не будет, так как функция начнёт убывать с первого же шага. Иначе экстремум будет иметь место. Причём чем больше q, тем быстрее функция достигает экстремума.

При $\frac{c}{n}+q-1>0$ общий доход, в конечном счёте, будет расти. При этом экстремум внутри отрезка возможен лишь в том случае, если функция возрастает медленно и имеет существенные начальные колебания (при малых $\alpha \to 0$, при $\frac{c}{n}+q-1 \to +0$). В остальных случаях доход монотонно возрастает, начиная с самого первого шага.

В целях иллюстрации модели была составлена программа с использованием математического пакета Matlab. Программа рассчитывает зависимость значений точки оптимума от начальных параметров.

Недостаток данной модели состоит в том, что она допускает возможность бесконечного роста дохода от бесконечно старого оборудования. Модель можно сделать более реалистичной, введя, например, коэффициент удорожания ремонта или коэффициент понижения прибыли (с каждым последующим шагом). В таком случае общий доход, в конечном счете, будет падать даже при самых благоприятных условиях.

Литература

1. *Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 288 с.*

2. *Hastings, N.A.J. Statistical Distributions / N.A.J. Hastings, J.B. Peacock. – Butterworth, London / Halsted Press (Wiley); New York, 1974. – 203 с.*

Поступила в редакцию 1 октября 2012 г.