УДК 531.3

ОБЩИЙ И ЧАСТНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫХ ТЕЛ

А.И. Телегин

Получены общие виды уравнений динамики (УД) для нескольких классов систем абсолютно твёрдых тел (СТТ), на основе которых просто и быстро выписываются УД конкретных СТТ и вычисляются реакции связей. Приведены примеры.

Введение. Для описания структурных и других параметров СТТ можно воспользоваться понятием кинематической цепи, конструктивной схемы СТТ и сопряженными с ним понятиями, которые широко используются в теории механизмов и машин [1]. Кинематической цепью (КЦ) называют совокупность звеньев (тел), образующих подвижные соединения [1]. Пусть p - число подвижных соединений одного звена. Если p=1, то звено называют однопарным (полуповодком), если $p=2$, то двухпарным (поводком), если $p>2$ - многопарным. В схемах КЦ однопарные и двухпарные звенья изображают отрезками прямых, а многопарные звенья - многоугольниками. КЦ, состоящие только из однопарных и двухпарных звеньев, называются простыми цепями. Они бывают открытыми (например, двойной маятник) и замкнутыми (например, манипулятор с ключом в захвате, затягивающий гайку). КЦ, содержащие многопарные звенья, называются сложными цепями. Их классифицируют на открытые, например, шагающий аппарат (ША) в фазе полёта, полуоткрытые, полузамкнутые и замкнутые. Соответствующие примеры и изображения КЦ можно найти в цитируемой литературе. Здесь же, как принято в аналитической механике, приводятся формальные определения структурных и других параметров СТТ без их графической иллюстрации.

Предлагаемая статья продолжает исследования, начатые в статьях [2, 3] в части поиска новых форм представления УД СТТ и областей их эффективного использования. Но изучение текста этой статьи, за исключением доказательства утверждения 1, не требует знаний статей [2, 3].

1. Параметры СТТ. Одно из свободных тел СТТ или образующих с землёй (стойкой) подвижное сочленение, считают первым по порядку телом и обозначают его и его массу через m_{01}, а землю обозначают через m_0. СТТ с полуоткрытой, полузамкнутой или замкнутой КЦ может иметь тела, от которых до m_0 существуют различные «пути», т. е. последовательности сочленённых друг с другом тел. Для устранения этой неоднозначности мысленно разрывают связи тел так, чтобы получилась открытая (простая или сложная) КЦ, т. е. чтобы каждое тело имело единственный путь до m_0, который называют несущей цепочкой этого тела. В УД СТТ мысленно разорванные связи и внешние воздействия заменяют соответствующими реакциями. В дальнейшем будем считать, что путём разрыва минимального количества связей и изоляции СТТ от воздействий внешней среды получена СТТ с открытыми КЦ, на тела которой действуют соответствующие силы и моменты сил реакции.

Для идентификации тел выполняют их нумерацию. Тело с номером i (i=1, 2, ..., n, где n - количество тел СТТ) и его массу обозначают через m_{0i}. Тело, непосредственно следующее за m_{0i} на пути к m_0, называют базовым телом (базой для m_{0i}). Все остальные тела, связанные с m_{0i} (если они есть), называют смежными телами для m_{0i}. Тело, не имеющее смежных тел, называют концевым. Все тела, образующие путь от m_0 до m_{0i}, несут на себе m_{0i}, поэтому эти тела по отношению к m_{0i} называют несущими телами. Несомыми для m_{0i} называют тела, которые несёт на себе тело m_{0i}, т. е. от которых путь до стойки (до тела m_0) проходит через m_{0i}. Тело m_{0i} вместе со своими несомыми телами образует i-ю подсистему.

В УД СТТ используются следующие знаки суммирования: $\sum_{j}^{i-1} a_j$ – знак суммирования по номерам несущей цепочки i-го тела, где индекс суммирования j величины a_j пробегает номера всех тел, несущих i-е тело, здесь $j \neq i$ и, следовательно, для первого тела (i=1), в этой сумме слагаемых нет; $\sum_{j \geq i} a_j$ – знак суммирования по номерам тел i-й подсистемы, т. е. здесь индекс суммирования j величины a_j пробегает номера всех несомых тел для i-го тела, начиная со значения j=i; $\sum_{j,i} a_j$ – знак суммирования по номерам тел смежных i-му телу, здесь $j \neq i$ и, следовательно, для концевого тела в этой сумме слагаемых нет. Следует заметить, что операция декремента индекса является относительной, т. е. индекс $i-1$ любой величины равен номеру базы i-го тела.

Для описания движения СТТ в каждом теле m_{0i} выбирают точку O_i и называют её полюсом i-го тела. В начальном положении i-го тела относительно своей базы полюс O_i занимает положение O_{0i} в этой базе. Точку O_{0i}, жёстко связанную с базой i-го тела, называют базовой точкой i-го тела. Через m_j обозначают массу j-й подсистемы, т. е. сумму массы j-го тела и масс всех его несомых тел. Если тела m_{0j}, m_{0k}, ..., m_{0l} являются смежными для m_{0i}, то, мысленно поместив в их базовые точки O_{0j}, O_{0k}, ..., O_{0l} массы m_j, m_k, ..., m_l соответственно, получают i-е дополненное тело (ДТ).

2. УД классов СТТ. Формулу (26) статьи [2] можно преобразовать и получить

Утверждение 1. Относительные силовые факторы k-го тела СТТ, т. е. сила $\overline{F}_k$ и момент силы $\overline{M}_k$ относительно точки O_{0k}, действующие на k-е тело со стороны его базы, вычисляются по формулам

$$\begin{cases} m_k \overline{W}_{ok} + \overline{F}_{ok} = \overline{F}_k + m_k \overline{g} + \sum\limits_{i \geq k} \overline{F}_{ri}, & (1) \\ \overline{m}_k \times \left(\overline{W}_{ok} + \overline{W}_{rk} + 2\overline{\omega}_k \times \overline{V}_{rk} \right) + I_k \cdot \overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k \times I_k \cdot \overline{\omega}_k + \sum\limits_{j,k} \overline{R}_j \times \overline{F}_{oj} = & \\ \qquad = \overline{M}_k - \sum\limits_{j,k} \overline{M}_j + \overline{m}_k \times \overline{g} + \overline{M}_{rk} + \sum\limits_{j,k} \overline{R}_j \times \sum\limits_{i \geq j} \overline{F}_{ri}, & (2) \end{cases}$$

где $k = 1, 2, ..., n$;

$$\overline{W}_{ok} = \sum_{i}^{k-1} \left[\overline{W}_{ri} + 2\overline{\omega}_i \times \overline{V}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i \times \overline{R}_{i+1} + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{R}_{i+1} \right) \right] \tag{3}$$

– абсолютное ускорение базовой точки k-го тела (точки O_{0k});

$$\overline{F}_{ok} = \sum_{i \geq k} \left[m_i \left(\overline{W}_{ri} + 2\overline{\omega}_i \times \overline{V}_{ri} \right) + \overline{\varepsilon}_i \times \overline{m}_i + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{m}_i \right) \right] \tag{4}$$

– инерционная сила, обусловленная движением тел k-й подсистемы; $\overline{V}_{ri}$, $\overline{W}_{ri}$ – скорость и ускорение полюса i-го тела (точки O_i) относительно своей базовой точки O_{0i}; $\overline{\omega}_i$, $\overline{\varepsilon}_i$ – абсолютные угловые скорость и ускорение i-го тела; $\overline{g}$ – ускорение свободного падения; $\overline{F}_{ri}$, $\overline{M}_{ri}$ – главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) внешних сил и сил реакций, действующих на i-е тело со стороны внешней среды и мысленно разорванных связей при переходе от СТТ, взаимодействующей с внешней средой, к изолированной СТТ с открытыми КЦ.

В (1)–(4) используются следующие массо-геометрические величины:

$$\overline{m}_i = m_{0i} \overline{r}_i + \sum_{j,i} m_j \overline{R}_j = m_i \overline{O_i C}_{di} \tag{5}$$

– статический момент i-го ДТ относительно точки O_{0i}, $\bar{r}_i = \overline{O_{0i}C_i}$, $\bar{R}_j = \overline{O_{0j-1}O_{0j}}$ – радиус-вектор с началом в базовой точке базы j-го тела и с концом в базовой точке j-го тела, C_i – центр масс (ЦМ) i-го тела, C_{di} – ЦМ i-го ДТ.

$$I_i = I_i^c + m_{0i}\left(r_i^2 E - \bar{r}_i\bar{r}_i\right) + \sum_{j,i} m_j\left(R_j^2 E - \bar{R}_j\bar{R}_j\right) \tag{6}$$

– тензор инерции i-го ДТ относительно точки O_{0i}, I_i^c – тензор инерции i-го тела относительно точки C_i, a^2 – квадрат длины вектора $\bar{a}$, $\bar{a}\bar{a}$ – диадное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{a}$, E – единичная матрица.

Большое практическое значение имеют следствия этого утверждения. Поэтому доказательство утверждения отложим до конца статьи и перейдём к рассмотрению его следствий и примеров их практического использования для выписывания УД конкретных СТТ.

Если первое тело СТТ свободное, а остальные могут быть связаны друг с другом только шаровыми шарнирами, центры которых приняты за полюсы тел, то из утверждения 1 получим

Следствие 1. УД СТТ с шаровыми шарнирами (СТШШ) на свободном основании имеют вид

$$\begin{cases} M\bar{W} + \sum_{j,1} \bar{F}_{oj} = \bar{F} + M\bar{g} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ri}, & (7) \\ \bar{m}_k \times \bar{W} + \bar{m}_k \times \sum_{i}^{k-1}\left[\bar{\varepsilon}_i \times \bar{R}_{i+1} + \bar{\omega}_i \times \left(\bar{\omega}_i \times \bar{R}_{i+1}\right)\right] + I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \bar{F}_{oj} = \\ \quad = \bar{M}_k - \sum_{j,k} \bar{M}_j + \bar{m}_k \times \bar{g} + \bar{M}_{rk} + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \sum_{i \ge j} \bar{F}_{ri}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, & (8) \end{cases}$$

где $\bar{F}$ – сила, под действием которой свободное основание (тело) совершает поступательное движение относительно земли; $\bar{W}$ – ускорение переносного движения свободного основания; M – масса СТТ. Здесь за полюс первого свободного тела принята точка C_{d1}, и она совмещена с началом переносной системы координат, т. е. $\bar{m}_1 = 0$. В отличие от (4)–(6) в (7)–(8)

$$\bar{F}_{oj} = \sum_{i \ge j}\left[\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times \left(\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i\right)\right],$$

$\bar{m}_i = m_{0i}\bar{r}_i + \sum_{j,i} m_j \bar{R}_j = m_i \overline{O_i C_{di}}$ – статический момент i-го ДТ относительно точки O_i,

$\bar{r}_i = \overline{O_i C_i}$, $\bar{R}_j = \overline{O_{j-1} O_j}$,

$I_i = I_i^c + m_{0i}\left(r_i^2 E - \bar{r}_i\bar{r}_i\right) + \sum_{j,i} m_j\left(R_j^2 E - \bar{R}_j\bar{R}_j\right)$ – тензор инерции i-го ДТ относительно точки O_i,

так как $O_{0i} = O_i$ для всех i.

Замечание 1. Если за полюс свободного тела принята произвольная точка (не обязательно C_{d1}), то $\bar{m}_1 \ne 0$ и сумму в левой части уравнения (7) следует записывать в виде $\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\varepsilon}_i \times \bar{m}_i + \bar{\omega}_i \times \left(\bar{\omega}_i \times \bar{m}_i\right)\right]$.

Как частный случай из уравнений (7), (8) получаются известные виды УД свободного твёрдого тела. Действительно, если в (7), (8) положить $k = n = 1$ и за полюс тела принять его ЦМ, то получим

Следствие 2. Тело, совершающее поступательное движение относительно земли (стойки) под действием силы $\bar{F}$ и вращение под действием момента силы $\bar{M}$ (относительно ЦМ), имеет следующие УД: $M\bar{W} = \bar{F} + M\bar{g}$, $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M}$.

В следствии 2 записаны известные УД. Из них или непосредственно из (8) получаем

Следствие 3. УД тела с одной закреплённой точкой имеет вид $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M}$. Если закреплённая точка не совпадает с ЦМ тела, то его УД имеет вид $I \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I \cdot \bar{\omega} = \bar{M} + \bar{m} \times \bar{g}$, что следует из (8).

Если связи СТТ не допускают поступательных перемещений тел относительно своих баз, т. е. $\overline{V}_{rk} = 0$, $\overline{W}_{rk} = 0$ для всех k, то из утверждения 1 получим

Следствие 4. УД СТШШ имеют вид

$$\overline{m}_k \times \sum_{i}^{k-1}\left[\overline{\varepsilon}_i \times \overline{R}_{i+1} + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{R}_{i+1}\right)\right] + I_k \cdot \overline{\varepsilon}_k + \overline{\omega}_k \times I_k \cdot \overline{\omega}_k +$$

$$+\sum_{j,k}\overline{R}_j \times \sum_{i\ge j}\left[\overline{\varepsilon}_i \times \overline{m}_i + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{m}_i\right)\right] = \overline{M}_k - \sum_{j,k}\overline{M}_j + \overline{m}_k \times \overline{g} + \overline{M}_{rk} + \sum_{j,k}\overline{R}_j \times \sum_{i\ge j}\overline{F}_{ri}\,, \qquad (9)$$

где $k = 1, 2, ..., n$.

УД (9) имеют следующие преимущества по сравнению с УД СТШШ, которые получены в [4] (см. стр. 125–126). Во-первых, в (9) значительно меньше векторно-матричных операций. Во-вторых, структурные свойства в УД (9) выражены в явном виде и представлены суммами по номерам несущей цепочки k-го тела, по номерам тел смежных k-му и по номерам j-й подсистемы. В-третьих, все постоянные массо-геометрические параметры СТШШ представлены расстояниями между полюсами тел ($\overline{R}_i$), статическими моментами ($\overline{m}_i$) и тензорами инерции (I_i) ДТ и выражены в УД (9) в явном виде. В-четвёртых, на основе УД (9) можно достаточно просто решать задачи синтеза СТТ с заданными динамическими свойствами, например, динамически развязанных или интегрируемых СТТ с шаровыми, цилиндрическими и шаровыми с пальцем шарнирами.

3. УД СТТ на плоскости с цилиндрическими шарнирами (СТПЦШ) в абсолютных угловых скоростях и ускорениях тел. Тела СТПЦШ, например, двойного маятника, плоского трёхзвенного манипулятора, n-звенника (цепи), образуют друг с другом цилиндрические шарниры, причём оси вращения всех тел параллельны друг другу и перпендикулярны одной плоскости, которую обозначим через P, а через $\overline{k}$ обозначим орт перпендикуляра к P, направленный в сторону наблюдателя (исследователя). В УД СТПЦШ используются следующие величины: $m_{di} = m_i d_i$; $d_i = O_i C_{di}$; $\overline{R}_j = \overline{O_{j-1}O}_j$; $\overline{e}_j = \overline{R}_j / R_j$; R_j – длина $\overline{R}_j$; $\overline{i}_i = \overline{O_i C}_{di} / d_i$; M_k – движущий момент силы, действующий на k-е тело со стороны его базы, приведенный к оси вращения k-го тела (к оси $O_k\overline{k}$). С учётом замечания 1 из следствия 1 легко получить

Следствие 5. Для выписывания УД СТПЦШ на свободном основании можно использовать формулы

$$\begin{cases} M\ddot{x} - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{di}\left(s_i\ddot{\alpha}_i + c_i\dot{\alpha}_i^2\right) = F_x + \overline{i}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F}_{ri}, & (10)\\ M\ddot{y} + \sum\limits_{i=1}^{n} m_{di}\left(c_i\ddot{\alpha}_i - s_i\dot{\alpha}_i^2\right) + Mg = F_y + \overline{j}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F}_{ri}, & (11)\\ m_{dk}\left(c_k\ddot{y} - s_k\ddot{x}\right) + m_{dk}\sum\limits_{i}^{k-1} R_{i+1}\left(c_{i+1,k}\ddot{\alpha}_i + s_{i+1,k}\dot{\alpha}_i^2\right) + J_k\ddot{\alpha}_k + \sum\limits_{j,k} R_j \sum\limits_{i\ge j} m_{di}\left(c_{ji}\ddot{\alpha}_i - s_{ji}\dot{\alpha}_i^2\right) + & \\ \quad + m_{dk} g \sin\alpha_{ok} = M_k - \sum\limits_{j,k} M_j + \overline{k}\cdot\left(\overline{M}_{rk} + \sum\limits_{j,k}\overline{R}_j \times \sum\limits_{i\ge j}\overline{F}_{ri}\right), \quad k = 1, 2, ..., n, & (12) \end{cases}$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}$ – проекции на горизонтальную и вертикальную оси ускорения $\overline{W}$ поступательного движения свободного основания; $\dot{\alpha}_i$, $\ddot{\alpha}_i$ – абсолютные угловая скорость и ускорение i-го тела; J_k – момент инерции k-го ДТ относительно оси вращения k-го тела; $s_k = \sin\alpha_k$, $c_k = \cos\alpha_k$, α_k – угол, откладываемый от горизонтальной оси (от $\overline{i}$) до $\overline{i}_k$; $s_{ij} = \sin\alpha_{ij}$, $c_{ij} = \cos\alpha_{ij}$, α_{ij} – угол, откладываемый от $\overline{e}_i$ до $\overline{i}_j$; α_{ok} – угол, откладываемый от $\overline{e}_o$ до $\overline{i}_k$ ($\overline{e}_o = \overline{g}/g$), g – ускорение свободного падения; $F_x = \overline{i}\cdot\overline{F}$, $F_y = \overline{j}\cdot\overline{F}$, $\overline{i}$ – орт горизонтали, $\overline{j}$ – орт вертикали, $O\overline{i}\overline{j}\overline{k}$ – правый репер.

Доказательство. Из принятых обозначений следует, что для СТПЦШ $\overline{m}_k = m_{dk}\overline{i}_k$, $\overline{R}_i = R_i\overline{e}_i$, $\overline{W} = \ddot{x}\overline{i} + \ddot{y}\overline{j}$, $\overline{\omega}_i = \dot{\alpha}_i\overline{k}$, $\overline{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_i\overline{k}$. Следовательно, умножив (7) скалярно на $\overline{i}$ и $\overline{j}$, получим

$$M\bar{i}\cdot\left(\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_{di}\left[\ddot{\alpha}_i\bar{i}\cdot\bar{k}\times\bar{i}_i+\dot{\alpha}_i^2\bar{i}\cdot\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)\right]-M\bar{g}\cdot\bar{i}=\bar{i}\cdot\bar{F}+\bar{i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{ri},$$

$$M\bar{j}\cdot\left(\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}\right)+\sum_{i=1}^{n}m_{di}\left[\ddot{\alpha}_i\bar{j}\cdot\bar{k}\times\bar{i}_i+\dot{\alpha}_i^2\bar{j}\cdot\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)\right]-M\bar{g}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{F}+\bar{j}\cdot\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{ri}.$$

Теперь, учитывая равенство $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, получим

$$\bar{i}\cdot\bar{k}\times\bar{i}_i=-\bar{j}\cdot\bar{i}_i=-\cos(\alpha_i-\pi/2)=-\sin\alpha_i=-s_i,$$

$$\bar{i}\cdot\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)=-\bar{j}\cdot\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)=-\bar{i}\cdot\bar{i}_i=-\cos\alpha_i=-c_i,$$

$$\bar{j}\cdot\bar{k}\times\bar{i}_i=\bar{i}\cdot\bar{i}_i=c_i,\quad \bar{j}\cdot\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)=\bar{i}\cdot\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)=-s_i,\quad \bar{g}\cdot\bar{j}=-g,\quad \bar{g}\cdot\bar{i}=0.$$

Подставив эти выражения в предшествующие уравнения, получим искомые УД (10), (11).

Умножив (8) скалярно на орт $\bar{k}$ оси вращения тел, получим

$$\bar{k}\cdot\bar{m}_k\times\bar{W}+\bar{k}\cdot\bar{m}_k\times\sum_{i}^{k-1}\left[\bar{\varepsilon}_i\times\bar{R}_{i+1}+\bar{\omega}_i\times\left(\bar{\omega}_i\times\bar{R}_{i+1}\right)\right]=$$

$$=m_{dk}\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\left(\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}\right)+m_{dk}\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\sum_{i}^{k-1}R_{i+1}\left[\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}\ddot{\alpha}_i+\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}\right)\dot{\alpha}_i^2\right],$$

$$\bar{k}\cdot I_k\cdot\bar{\varepsilon}_k=\bar{k}\cdot I_k\cdot\bar{k}\ddot{\alpha}_k=J_k\ddot{\alpha}_k,\quad \bar{k}\cdot\bar{\omega}_k\times(I_k\cdot\bar{\omega}_k)=\dot{\alpha}_k(\bar{k}\times\bar{k})\cdot I_k\cdot\bar{\omega}_k=0,$$

$$\bar{k}\cdot\sum_{j,k}\bar{R}_j\times\sum_{i\geq j}\left[\bar{\varepsilon}_i\times\bar{m}_i+\bar{\omega}_i\times\left(\bar{\omega}_i\times\bar{m}_i\right)\right]=\bar{k}\cdot\sum_{j,k}R_j\bar{e}_j\times\sum_{i\geq j}m_{di}\left[\bar{k}\times\bar{i}_i\ddot{\alpha}_i+\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)\dot{\alpha}_i^2\right].$$

Очевидно, что

$$\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\bar{i}=\bar{j}_k\cdot\bar{i}=\cos\left(\alpha_k+\pi/2\right)=-\sin\alpha_k=-s_k,\ \bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\bar{j}=\bar{j}_k\cdot\bar{j}=\cos\alpha_k=c_k,$$

$$\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\left(\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}\right)=\bar{j}_k\cdot\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}=\bar{i}_k\cdot\bar{e}_{i+1}=\cos\alpha_{i+1,k}=c_{i+1,k},$$

$$\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\left[\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}\right)\right]=\bar{i}_k\cdot\bar{k}\times\bar{e}_{i+1}=-\bar{j}_k\cdot\bar{e}_{i+1}=-\cos\left(\alpha_{i+1,k}+\pi/2\right)=\sin\alpha_{i+1,k}=s_{i+1,k},$$

$$\bar{k}\cdot\bar{e}_j\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)=\bar{k}\cdot\bar{e}_j\times\bar{j}_i=-\bar{k}\cdot\bar{j}_i\times\bar{e}_j=\bar{i}_i\cdot\bar{e}_j=\cos\alpha_{ji}=c_{ji},$$

$$\bar{k}\cdot\bar{e}_j\times\left[\bar{k}\times\left(\bar{k}\times\bar{i}_i\right)\right]=\bar{k}\cdot\bar{e}_j\times\left(\bar{k}\times\bar{j}_i\right)=-\bar{k}\cdot\bar{e}_j\times\bar{i}_i=\bar{j}_i\cdot\bar{e}_j=\cos\left(\alpha_{ji}+\pi/2\right)=-s_{ji}.$$

Следовательно,

$$\bar{k}\cdot\bar{m}_k\times\bar{W}+\bar{k}\cdot\bar{m}_k\times\sum_{i}^{k-1}\left[\bar{\varepsilon}_i\times\bar{R}_{i+1}+\bar{\omega}_i\times\left(\bar{\omega}_i\times\bar{R}_{i+1}\right)\right]=m_{dk}\sum_{i}^{k-1}R_{i+1}\left(c_{i+1,k}\ddot{\alpha}_i+s_{i+1,k}\dot{\alpha}_i^2\right),$$

$$\bar{k}\cdot\left(I_k\cdot\bar{\varepsilon}_k+\bar{\omega}_k\times I_k\cdot\bar{\omega}_k\right)=J_k\ddot{\alpha}_k,$$

$$\bar{k}\cdot\sum_{j,k}\bar{R}_j\times\sum_{i\geq j}\left[\bar{\varepsilon}_i\times\bar{m}_i+\bar{\omega}_i\times\left(\bar{\omega}_i\times\bar{m}_i\right)\right]=\sum_{j,k}R_j\sum_{i\geq j}m_{di}\left(c_{ji}\ddot{\alpha}_i-s_{ji}\dot{\alpha}_i^2\right),$$

$$\bar{k}\cdot\bar{m}_k\times\bar{g}=m_{dk}\bar{k}\times\bar{i}_k\cdot\bar{g}=m_{dk}\bar{j}_k\cdot\bar{g}=m_{dk}g\cos\left(\bar{e}_o,\bar{j}_k\right)=m_{dk}g\cos\left(\alpha_{ok}+\pi/2\right)=-m_{dk}gs_{ok},$$

что доказывает справедливость левой части уравнения (12).

Так как $\bar{k}\cdot\bar{M}_i=M_i$ – момент движущей силы относительно оси $O_i\bar{k}$, действующий на i-е тело со стороны его базы, получим правую часть уравнения (12). *Следствие доказано.*

Замечание 2. В следствии 5 считается, что СТПЦШ движется в вертикальной плоскости P. Если эта плоскость образует с горизонтом угол α, то вместо g необходимо подставить величину $g\sin\alpha$.

Если первое тело СТПЦШ не является свободным, т. е. образует с землёй цилиндрический шарнир с осью, перпендикулярной плоскости движения P, то из следствия 5 получим

Следствие 6. Для выписывания УД СТПЦШ можно использовать формулы

$$m_{dk}\sum_{i}^{k-1}R_{i+1}\left(c_{i+1,k}\ddot{\alpha}_i+s_{i+1,k}\dot{\alpha}_i^2\right)+J_k\ddot{\alpha}_k+\sum_{j,k}R_j\sum_{i\geq j}m_{di}\left(c_{ji}\ddot{\alpha}_i-s_{ji}\dot{\alpha}_i^2\right)+m_{dk}g\sin\alpha_{ok}=$$

$$=M_k-\sum_{j,k}M_j+\bar{k}\cdot\left(\bar{M}_{rk}+\sum_{j,k}\bar{R}_j\times\sum_{i\geq j}\bar{F}_{ri}\right),\qquad k=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

СТПЦШ с простой открытой КЦ, для которой $\bar{i}_i = \bar{e}_{i+1}$, часто называют n-звенником. Для него $\alpha_{i+1,k} = \alpha_k - \alpha_i$. Следовательно, из (13) получим

Следствие 7. УД n-звенника имеют вид

$$
\begin{gathered}
m_k d_k \sum_{i=1}^{k-1} L_i \left[\cos(\alpha_k - \alpha_i)\ddot{\alpha}_i + \sin(\alpha_k - \alpha_i)\dot{\alpha}_i^2\right] + J_k \ddot{\alpha}_k + \\
+ L_k \sum_{i=k+1}^{n} m_i d_i \left[\cos(\alpha_i - \alpha_k)\ddot{\alpha}_i - \sin(\alpha_i - \alpha_k)\dot{\alpha}_i^2\right] + m_k d_k g \sin(\alpha_k) = M_k - M_{k+1},
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$, $L_i = O_i O_{i+1}$ – длина i-го звена, M_k – момент движущей силы относительно оси $O_k \bar{k}$, действующий на k-е звено со стороны предшествующего звена, α_k – абсолютный угол поворота k-го звена, откладываемый от $\bar{e}_o$ до $\bar{i}_k$.

Замечание 3. Из (14) видно, что если тела n-звенника являются однородными стержнями с равномерно распределённой (по длине) и одинаковой массой, то его УД не упрощаются. Эти УД не упрощаются и в случае часто используемой идеализации, в соответствии с которой массы звеньев сосредоточены в точках. Тем не менее, эту идеализацию ошибочно используют с целью упрощения вида УД n-звенника, в частности, двойного маятника. УД последнего элементарно выписываются из (14).

4. Примеры выписывания УД СТПЦШ. Для выписывания УД СТПЦШ с простой КЦ эффективно использовать следствие 7. В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 1. Выпишем УД двойного маятника в вертикальной плоскости.

Для двойного маятника $n = 2$, $M_1 = M_2 = 0$. Следовательно, из (14) для $к = 1$, $к = 2$ в процессе развёртывания сумм получим УД двойного маятника

$$
\begin{cases}
J_1 \ddot{\alpha}_1 + L_1 m_2 d_2 \left[\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\ddot{\alpha}_2 - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)\dot{\alpha}_2^2\right] + m_1 d_1 g \sin\alpha_1 = 0, \\
m_2 d_2 L_1 \left[\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\ddot{\alpha}_1 + \sin(\alpha_2 - \alpha_1)\dot{\alpha}_1^2\right] + J_2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 d_2 g \sin\alpha_2 = 0.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Пример 2. Выпишем УД манипулятора, состоящего из плеча $(k = 1)$, предплечья $(k = 2)$ и кисти с захватом $(k = 3)$. Манипулятор снабжён электроприводами прямого действия, которые расположены в цилиндрических шарнирах и развивают движущие моменты сил плеча M_1, предплечья M_2 и кисти M_3 соответственно. ЦМ звеньев расположены на осях $O_i X_i$ (с ортами $\bar{i}_i$), проходящих через оси вращения смежных звеньев. Манипулятор работает в горизонтальной плоскости.

Подставляя в (14) $n = 3$ и развёртывая суммы для $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$, получим УД манипулятора:

$$
\begin{cases}
J_1 \ddot{\alpha}_1 + L_1 \left[m_2 d_2 \left(c_{21}\ddot{\alpha}_2 - s_{21}\dot{\alpha}_2^2\right) + m_3 d_3 \left(c_{31}\ddot{\alpha}_3 - s_{31}\dot{\alpha}_3^2\right)\right] + m_1 d_1 g \sin\alpha_1 = M_1 - M_2, \\
m_2 d_2 L_1 \left(c_{21}\ddot{\alpha}_1 + s_{21}\dot{\alpha}_1^2\right) + J_2 \ddot{\alpha}_2 + L_2 m_3 d_3 \left(c_{32}\ddot{\alpha}_3 - s_{32}\dot{\alpha}_3^2\right) + m_2 d_2 g \sin\alpha_2 = M_2 - M_3, \\
m_3 d_3 \left[L_1 \left(c_{31}\ddot{\alpha}_1 + s_{31}\dot{\alpha}_1^2\right) + L_2 \left(c_{32}\ddot{\alpha}_2 + s_{32}\dot{\alpha}_2^2\right)\right] + J_3 \ddot{\alpha}_3 + m_3 d_3 g \sin\alpha_3 = M_3.
\end{cases}
\tag{16}
$$

Здесь приняты следующие обозначения: $c_{21} = \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, $s_{21} = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$, $c_{31} = \cos(\alpha_3 - \alpha_1)$, $s_{31} = \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $c_{32} = \cos(\alpha_3 - \alpha_2)$, $s_{32} = \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$.

Замечание 4. Вывод УД трёхзвенного манипулятора на плоскости по любому из классических формализмов, например, по формализму Лагранжа, Аппеля, Нильсена, займёт несколько страниц машинописного текста, и для записи их в виде (16) потребуется громоздкая работа по приведению подобных, тригонометрическим упрощениям, введению переобозначений и по другим преобразованиям.

Пример 3. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на страницах 96-97.

Тело может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. На нём установлен маятник. Выведем УД этой системы и найдём реакцию F_r направляющей.

Используем следствие 5, совмещая переносную систему координат с телом. Маятник является единственным несомым телом. Следовательно, подставляя в (10), (11) $n=1$ и в (12) $k=1$, получим

$$\begin{cases} M\ddot{x} - m_{d1}\left(s_1\ddot{\alpha}_1 + c_1\dot{\alpha}_1^2\right) = 0, \\ M\ddot{y} + m_{d1}\left(c_1\ddot{\alpha}_1 - s_1\dot{\alpha}_1^2\right) + Mg = F_r, \\ m_{d1}\left(c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x}\right) + J_1\,\ddot{\alpha}_1 + m_{d1}g\sin\alpha_{o1} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $s_1 = \sin\alpha_1$, $c_1 = \cos\alpha_1$, α_1 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Для сопоставления результатов с известными формулами [5] (см. стр. 97) введём замену $\alpha_1 = 270^o + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от $\bar{e}_o$ до стержня маятника. Тогда $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_1^2 = \dot{\varphi}^2$, $\cos\alpha_1 = \cos(270° + \varphi) = \sin\varphi$, $\sin\alpha_1 = \sin(270° + \varphi) = -\cos\varphi$. Если положить $\ddot{y} = 0$, то второе уравнение системы (17) даст формулу вычисления искомой реакции $F_r = m_{d1}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + Mg$, а первое и третье образуют систему для определения функций $x(t)$, $\varphi(t)$: $M\ddot{x} + m_{d1}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0$, $m_{d1}\ddot{x}\cos\varphi + J_1\,\ddot{\varphi} + m_{d1}g\sin\varphi = 0$, что совпадает с результатами, изложенными в учебном пособии [5].

Пример 4. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на страницах 65–66.

Составим УД математического маятника, точка O_1 подвеса которого совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости по закону $OO_1 = a\sin\omega t$ вдоль прямой, наклонённой под углом α к горизонту.

Используем следствие 5, совмещая переносную систему координат с точкой O_1. Подставляя в (12) $n=1$, $k=1$, получим следующее УД маятника: $m_{d1}\left(c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x}\right) + J_1\,\ddot{\alpha}_1 + m_{d1}g\sin\alpha_{o1} = 0$, где $s_1 = \sin\alpha_1$, $c_1 = \cos\alpha_1$, α_1 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Для сопоставления результатов с известной формулой УД [5] (см. стр. 66) введём замену $\alpha_1 = 270° + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от $\bar{e}_o$ до стержня маятника. Тогда $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_1^2 = \dot{\varphi}^2$, $\cos\alpha_1 = \cos(270° + \varphi) = \sin\varphi$, $\sin\alpha_1 = \sin(270° + \varphi) = -\cos\varphi$. Абсолютные координаты точки O_1 вычисляются по формулам $x = OO_1\cos\alpha = a\cos\alpha\sin\omega t$, $y = a\sin\alpha\sin\omega t$. Следовательно,

$$\dot{x} = a\omega\cos\alpha\cos\omega t,\ \ddot{x} = -a\omega^2\cos\alpha\sin\omega t,\ \dot{y} = a\omega\sin\alpha\cos\omega t,\ \ddot{y} = -a\omega^2\sin\alpha\sin\omega t,$$

$$c_1\ddot{y} - s_1\ddot{x} = -\sin\varphi\, a\omega^2\sin\alpha\sin\omega t - \cos\varphi\, a\omega^2\cos\alpha\sin\omega t =$$

$$= -a\omega^2\sin\omega t(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\, sin\alpha) = -a\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi - \alpha).$$

Подставляя эти выражения в УД, получим: $J_1\,\ddot{\alpha}_1 - m_{d1}a\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi - \alpha) + m_{d1}g\sin\varphi = 0$, что совпадает с результатом, представленным в учебном пособии [5] на странице 66.

Пример 5. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [5] на стр. 93.

На конец двойного маятника (на точку A) наложена связь, не позволяющая точке A покидать вертикальную ось. Найдём силу F_r реакции связи и выведем УД этой системы.

Обозначим левые части УД, выписанные в примере 1, через H_1, H_2. Тогда по формуле (13) для $k=1$ получим $H_1 = \bar{k}\cdot\bar{R}_2\times\bar{F}_{r2}$, для $k=2$ $H_2 = \bar{k}\cdot\bar{M}_{r2}$, где $\bar{R}_2 = \overline{O_1O_2} = L_1\bar{i}_1$, $\bar{F}_{r2} = F_r\bar{i}$, $\bar{M}_{r2} = \overline{O_2A}\times\bar{F}_{r2} = L_2F_r\bar{i}_2\times\bar{i}$. Очевидно, что $\bar{k}\cdot\bar{i}_2\times\bar{i} = -\bar{j}\cdot\bar{i}_2$, $\bar{k}\cdot\bar{i}_1\times\bar{i} = -\bar{j}\cdot\bar{i}_1 = -\cos(\pi + \varphi) = \cos\varphi$, где $\varphi = \alpha_1 = \alpha_{o1}$ – угол, откладываемый от $\bar{e}_o$ до 1-го звена маятника. Как и в [5] будем считать, что длины звеньев маятника равны, т. е. $L_1 = L_2 = L$. Тогда $\varphi = -\psi$, где $\psi = \alpha_2$ – угол, откладываемый от $\bar{e}_o$ до 2-го звена маятника и $\bar{j}\cdot\bar{i}_2 = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$. Следовательно, $H_1 = H_2 = LF_r\cos\varphi$. Подставим в H_1, H_2, т. е. в левые части уравнений (15), следующие величины: $\dot{\alpha}_1 = \dot{\varphi}$, $\ddot{\alpha}_1 = \ddot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_2 = -\dot{\varphi}$, $\ddot{\alpha}_2 = -\ddot{\varphi}$, $\alpha_2 - \alpha_1 = -2\varphi$, $L_1 = L$. Тогда получим

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi} + Lm_2d_2\left(-\ddot{\varphi}\cos 2\varphi + \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi\right) + m_1d_1g\sin\varphi = LF_r\cos\varphi, \\ m_2d_2L\left(\ddot{\varphi}\cos 2\varphi - \dot{\varphi}^2\sin 2\varphi\right) - J_2\ddot{\varphi} - m_2d_2g\sin\varphi = LF_r\cos\varphi. \end{cases} \tag{18}$$

Вычитая из первого уравнения (18) второе, получим УД рассматриваемой системы

$$\left(J_1 + J_2 - 2Lm_2d_2\cos 2\varphi\right)\ddot{\varphi} + 2Lm_2d_2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = -\left(m_1d_1 + m_2d_2\right)g\sin\varphi .$$

Складывая между собой уравнения системы (18), получим искомое выражение для силы реакции: $F_r = \left(J_1 - J_2\right)\ddot{\varphi}/2L\cos\varphi + \left(m_1d_1 - m_2d_2\right)g\,\mathrm{tg}\,\varphi/2L$.

Пример 6. Рассмотрим пример, изложенный в учебном пособии [6] на страницах 235, 236.

Два однородных сплошных цилиндра, жёстко закреплённые на оси, образуют скат, опирающийся на горизонтальные опоры. На этой же оси свободно насажен стержень маятника. Выведем УД этой системы, считая, что цилиндры катятся по опорам без скольжения и трение в цилиндрическом шарнире отсутствует.

Используем следствие 5, совмещая начало переносной системы координат с точкой на оси. Скат и маятник являются двумя несомыми телами с номерами $k=1$ и $k=2$ соответственно. Для ската $m_{d1}=0$, так как его ЦМ лежит на оси. Следовательно, подставляя в (10) $n=2$ и в (12) $k=1$, $k=2$, получим

$$\begin{cases} M\ddot{x} - m_{d2}\left(s_2\ddot{\alpha}_2 + c_2\dot{\alpha}_2^2\right) = \overline{F}_{r1}\cdot\overline{i} = -F_r, \\ J_1\ddot{\alpha}_1 = \overline{k}\cdot\overline{M}_{r1} = -F_rR, \\ -m_{d2}s_2\ddot{x} + J_2\ddot{\alpha}_2 + m_{d2}g\sin\alpha_{o2} = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где F_r – сила трения, действующая на скат в точке его контакта с горизонтальной опорой, R – радиус ската, $s_2 = \sin\alpha_2$, $c_2 = \cos\alpha_2$, α_2 – угол поворота маятника, откладываемый от горизонтальной оси. Введём замену $\alpha_2 = 270° + \varphi$, где $\varphi = \alpha_{o2}$ – угол, откладываемый от $\overline{e}_o$ до стержня маятника. Тогда

$$\ddot{\alpha}_2 = \ddot{\varphi},\ \dot{\alpha}_2^2 = \dot{\varphi}^2,\ c_2 = \cos\alpha_2 = \cos\left(270° + \varphi\right) = \sin\varphi,\ s_2 = \sin\alpha_2 = \sin\left(270° + \varphi\right) = -\cos\varphi .$$

Очевидно, что $x = R\alpha_1$, и из второго уравнения системы (19) получим $J_1\ddot{x}/R = -F_rR$ или $-F_r = J_1\ddot{x}/R^2$. Подставляя всё это в первое и второе уравнения системы (19), получим искомые УД

$$\begin{cases} \left(M - J_1/R^2\right)\ddot{x} + m_{d2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0, \\ m_{d2}\ddot{x}\cos\varphi + J_2\ddot{\varphi} + m_{d2}g\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Замечание 5. В рассмотренных примерах в отличие от аналогичных примеров, изложенных в учебных пособиях [5, 6], не используется идеализация в виде невесомости стержня маятника и масс тел, сосредоточенных в точках, так как в этом нет никакой необходимости.

5. Классы СТТ и области их практического использования. В предшествующих разделах выделены пять классов СТТ.

В следствии 1 записан общий вид УД СТШШ на свободном основании. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД ША в пространстве во всех фазах ходьбы и/или свободного полёта. Для этого необходимо корпус ША принять за первое свободное тело, и все суставы моделировать шаровыми шарнирами. Если суставы моделируются шаровыми с пальцем шарнирами или цилиндрическими шарнирами, то УД (7), (8) дают возможность попутно выписать формулы для вычисления моментов сил реакции относительно соответствующих осей. УД (7), (8) можно использовать для вывода УД многоруких робототехнических систем на подвижной колёсной, гусеничной или шагающей платформе. Из УД (7), (8) можно получить общие УД СТТ в пространстве с цилиндрическими шарнирами на подвижном основании. Соответствующая статья готовится к печати.

В следствии 4 записан общий вид УД СТШШ. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД ША в пространстве в одно- и многоопорных фазах ходьбы. Из УД (9) как частный случай получается эффективный вид УД манипуляционных систем роботов с цилиндрическими шарнирами.

В следствии 5 записан общий вид УД СТПЦШ на свободном основании в плоскости. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД плоских моделей ША во всех фазах ходьбы и/или свободного полёта. Для этого необходимо корпус ША принять за первое свободное тело и все суставы моделировать цилиндрическими шарнирами с параллельными друг другу осями. Общие УД (10)—(12) можно использовать для выписывания УД плоских моделей колёсных и гусеничных транспортных средств, а также многоруких роботов на подвижном основании.

В следствии 6 записан общий вид УД СТПЦШ. Эти УД эффективно использовать для выписывания УД плоских моделей ША в одно- и многоопорных фазах ходьбы, а также одно- и многоруких манипуляторов на плоскости и любых плоских моделей СТТ с цилиндрическими шарнирами.

В следствии 7 записан общий вид УД n-звенника. Область практического использования этих УД не велика. Но для теоретических исследований, например, разработки методов численного интегрирования УД отдельных классов СТТ или вывода общих УД систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел эти УД очень полезны, так как они самые простые и получаются в частных случаях движений многих произвольных СТТ, что позволяет их использовать для проверки справедливости общих результатов в частных случаях.

Замечание 6, УД каждого из перечисленных классов СТТ практически невозможно упростить за счёт дальнейших преобразований, так как все подобные члены при скоростях и ускорениях уже приведены и упрощены.

На основе следствий 1, 4-7 можно получить УД систем твёрдых и деформируемых (на изгиб и кручение) тел. Для этого в деформируемое тело (в виде стержня) достаточно ввести сосредоточенные податливости и выполнить ряд преобразований. Соответствующие статьи готовятся к печати.

Из следствий 5, 6, 7 получаем

Следствие 8. Для рассмотренных классов СТТ на плоскости с открытыми КЦ необходимым и достаточным условием динамической развязки движения тел является статическое уравновешивание всех подсистем, т. е. выполнение равенств $m_{di}=0$ для всех i. Для СТТ на плоскости с полуоткрытыми, полузамкнутыми и замкнутыми КЦ эти условия ослабляются [7].

Замечание 7. Наиболее полно задачи статического уравновешивания механизмов рассмотрены в монографии [8]. Использование полученных следствий позволяет решить эти задачи значительно быстрее.

6. Доказательство утверждения 1. Для изучения предлагаемого доказательства необходимо познакомиться с статьями [2], [3]. Формула (1) совпадает с формулой (25) статьи [3]. В доказательстве нуждается только формула (2).

Если j пробегает номера тел смежных k-му телу, то $\overline{R}_{kj}=\overline{R}_j$. Поэтому, используя формулу $\overline{F}_k=\sum\limits_{i\geq k}\left(m_{oi}\overline{W}_{ci}-\overline{F}_{ri}\right)-m_k\overline{g}$ утверждения 6 статьи [2] и обозначение $\overline{F}_{Rk}=\sum\limits_{j,k}\overline{R}_j\times\sum\limits_{i\geq j}\overline{F}_{ri}$, получим

$$\sum_{j,k}\overline{R}_{kj}\times\overline{F}_j=\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\overline{F}_j=\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\left[\sum_{i\geq j}\left(m_{oi}\overline{W}_{ci}-\overline{F}_{ri}\right)-m_j\overline{g}\right]=$$

$$=\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\sum_{i\geq j}m_{oi}\overline{W}_{ci}-\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\overline{g}-\overline{F}_{Rk}. \qquad (20)$$

Введём обозначения

$$\overline{D}_j=\sum_{i\geq j}\left[m_i\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right)\right],\ \overline{W}_{Ri}^{j}=\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{R}_j+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{R}_j\right).$$

Тогда, используя формулу (16) статьи [3], получим

$$\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\sum_{i\geq j}m_{oi}\overline{W}_{ci}=\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\left(m_j\overline{W}_{oj}+\overline{D}_j\right), \qquad (21)$$

где $\overline{W}_{oj}=\sum\limits_{i}^{j-1}\overline{W}_{Ri}^{i+1}$. Выполним следующие преобразования:

$$\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\overline{W}_{oj}=\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\sum_{i}^{j-1}\overline{W}_{Ri}^{i+1}=\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\sum_{i}^{k}\overline{W}_{Ri}^{i+1}=\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\left(\overline{W}_{Rk}^{j}+\sum_{i}^{k-1}\overline{W}_{Ri}^{i+1}\right)=$$

$$=\sum_{j,k} m_j\overline{R}_j\times\left[\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}+\overline{\varepsilon}_k\times\overline{R}_j+\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{R}_j\right)\right]+\sum_{j,k} m_j\overline{R}_j\times\overline{W}_{ok}. \quad (22)$$

Из утверждения 1 статьи [2] и формул (20), (21) получим

$$\overline{M}_k-\sum_{j,k}\overline{M}_j=m_{ok}\overline{r}_k\times\left(\overline{W}_{ck}-\overline{g}\right)+I_k^c\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_k^c\cdot\overline{\omega}_k-\overline{M}_{rk}+\sum_{j,k}\overline{R}_{kj}\times\overline{F}_j=m_{ok}\overline{r}_k\times\overline{W}_{ck}-$$

$$-m_{ok}\overline{r}_k\times\overline{g}+I_k^c\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_k^c\cdot\overline{\omega}_k-\overline{M}_{rk}+\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\left(m_j\overline{W}_{oj}+\overline{D}_j\right)-\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\overline{g}-\overline{F}_{Rk}. \quad (23)$$

Используя обозначение (5), получим

$$m_{ok}\overline{r}_k\times\overline{g}+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\overline{g}=\left(m_{ok}\overline{r}_k+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\right)\times\overline{g}=\overline{m}_k\times\overline{g}. \quad (24)$$

Из утверждения 2 статьи [2] следует, что $\overline{W}_{ck}=\overline{W}_{ok}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}+\overline{\varepsilon}_k\times\overline{r}_k+\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{r}_k\right)$. Поэтому, учитывая (22), получим

$$m_{ok}\overline{r}_k\times\overline{W}_{ck}+\sum_{j,k}\overline{R}_j\times m_j\overline{W}_{oj}=m_{ok}\overline{r}_k\times\left[\overline{W}_{ok}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}+\overline{\varepsilon}_k\times\overline{r}_k+\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{r}_k\right)\right]+$$

$$+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\left[\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}+\overline{\varepsilon}_k\times\overline{R}_j+\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{R}_j\right)\right]+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\overline{W}_{ok}=$$

$$=\left(m_{ok}\overline{r}_k+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\right)\times\left(\overline{W}_{ok}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}\right)+m_{ok}\overline{r}_k\times\left(\overline{\varepsilon}_k\times\overline{r}_k\right)+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\left(\overline{\varepsilon}_k\times\overline{R}_j\right)+$$

$$+m_{ok}\overline{r}_k\times\left[\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{r}_k\right)\right]+\sum_{j,k}m_j\overline{R}_j\times\left[\overline{\omega}_k\times\left(\overline{\omega}_k\times\overline{R}_j\right)\right]. \quad (25)$$

Используем известные тождества [9]

$$\overline{a}\times\left(\overline{\varepsilon}\times a\right)=\left(a^2E-\overline{a}\overline{a}\right)\cdot\overline{\varepsilon},\quad \overline{a}\times\left[\overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{a}\right)\right]=\overline{\omega}\times\left(a^2E-\overline{a}\overline{a}\right)\cdot\overline{\omega},$$

обозначение (5) и обозначение $I_{Rk}=m_{ok}\left(r_k^2E-\overline{r}_k\overline{r}_k\right)+\sum_{j,k}m_j\left(R_j^2E-\overline{R}_j\overline{R}_j\right)$, тогда из (25) получим

$$m_{ok}\overline{r}_k\times\overline{W}_{ck}+\sum_{j,k}\overline{R}_j\times m_j\overline{W}_{oj}=\overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{ok}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}\right)+I_{Rk}\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_{Rk}\cdot\overline{\omega}_k. \quad (26)$$

Выражение (23) с учётом (24), (26) и обозначения $\overline{D}_j$ примет вид

$$\overline{M}_k-\sum_{j,k}\overline{M}_j=\overline{m}_k\times\left(\overline{W}_{ok}+\overline{W}_{rk}+2\overline{\omega}_k\times\overline{V}_{rk}\right)+I_{Rk}\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_{Rk}\cdot\overline{\omega}_k+I_k^c\cdot\overline{\varepsilon}_k+\overline{\omega}_k\times I_k^c\cdot\overline{\omega}_k+$$

$$+\sum_{j,k}\overline{R}_j\times\sum_{i\geq j}\left[m_i\left(\overline{W}_{ri}+2\overline{\omega}_i\times\overline{V}_{ri}\right)+\overline{\varepsilon}_i\times\overline{m}_i+\overline{\omega}_i\times\left(\overline{\omega}_i\times\overline{m}_i\right)\right]-\overline{m}_k\times\overline{g}-\overline{F}_{Rk}-\overline{M}_{rk}. \quad (27)$$

Теперь, используя обозначения (3) и (6) ($I_k=I_k^c+I_{Rk}$) из (27), получим искомое выражение (2). *Утверждение доказано.*

Замечание 8. В отличие от статьи [2] здесь и в статье [3] вместо обозначений $\overline{r}_i^c=\overline{O_{0i}C_i}$, $\overline{R}_{ji}=\overline{O_{0i}O_{0j}}$ использованы обозначения $\overline{r}_i=\overline{O_{0i}C_i}$, $\overline{R}_{ij}=\overline{O_{0i}O_{0j}}$. Это сделано для сокращения записей (компьютерного набора) и для более удобного запоминания.

Заключение. Доказанное утверждение и его следствия предоставляют новые возможности для моделирования СТТ из пяти выделенных классов. Приведённые примеры убедительно демонстрируют эффективность использования общих видов УД для выписывания УД конкретных СТТ из этих классов и решения на их основе 1-й задачи динамики, т. е. вычисления движущих моментов сил или динамических реакций.

Литература

1. *Озол, О.Г. Теория механизмов и машин. / ОТ. Озол; под ред. СИ. Кожевникова; пер. с латыш. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 432 с.*

2. *Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Абросов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2001. - Вып. 1. - № 6 (Об). - С. 3-9.*

3. Телегин, А.М. Новые уравнения для решения задач динамики и синтеза систем твёрдых тел/А.И. Телегин//ВестникЮУрГУ. Серия «Машиностроение». -2006. -Вып. 8. -№ 11 (66). - С. 3-14.

4. Виттенбург, И. Динамика систем твёрдых тел / И. Виттенбург. - М.: Мир, 1980. - 290 с.

5. Бутенин, КВ., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин, Н.А. Фуфаев. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991. - 256 с.

6. Добронравов, В.В. Основы аналитической механики: учеб. пособие для вузов / В.В. Добронравов. - М.: Высш. школа, 1976. - 264 с.

7. Телегин, А.И. Динамическая развязка систем тел с замкнутыми ветвями / А.И. Телегин //Изв. РАН. Механика твёрдого тела. -1999. -№2. - С. 37-45.

8. Щепетильников, В.А. Уравновешивание механизмов / В.А. Щепетильников. - М.: Машиностроение, 1982, - 256 с.

9. Лурье, А.И. Аналитическая механика /А.И. Лурье. - М.: Физматгиз, 1961. - 824 с.