

# МЕТОД СИНТЕЗА СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ НА ОСНОВЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

М.А. Девятов, В.Ф. Тележкин

В работе [1] рассматривается метод синтеза систем управления с переменной структурой (СУПС) на основе анализа геометрической структуры фазовых пространств объектов управления. Благодаря этому методу автору удалось автоматизировать процесс проектирования регуляторов для широкого класса нелинейных объектов. Однако в предложенном подходе использовались не все возможности СУПС, а именно абсолютно не учитывалась их способность работать в скользящем режиме. Между тем, скользящие режимы обладают значительными преимуществами по сравнению с другими видами движений в динамических системах. Они не только позволяют улучшать качественные характеристики последних, но и обеспечивают работоспособность систем в тех случаях, когда другие режимы оказываются непригодными. Поэтому учет скользящих режимов при геометрическом синтезе регуляторов существенно расширяет область действия метода [2]. Ниже показано, каким образом это может быть реализовано.

## 1. Геометрический анализ траекторий фазового пространства

Синтез законов управления по результатам качественного анализа структуры фазовых пространств основан на декомпозиции фазового пространства исследуемого объекта на области со схожими характеристиками и поиске путей в фазовом пространстве, которые отвечают исходным требованиям. Для этого геометрический способ описания динамического поведения систем, т.е. фазовые пространства, объединяются с применяемыми в теории управления математическими определениями устойчивости и управляемости (включая условия существования и устойчивости скользящих режимов).

В процессе вычислений выполняются следующие операции: группирование, декомпозиция и поиск оптимальных траекторий движения.

- *Группирование:* на основе векторного поля фазового пространства для каждого конкретного управляющего воздействия формируется граф переходов, четко определяющий последовательность чередования состояний системы при движении в разбитом на элементарные ячейки фазовом пространстве. На этом же этапе формируются новые траектории, соответствующие скользящим режимам движения. Для вычисления векторов скорости, определяющих новые движения, можно воспользоваться принципом Филиппова [3,4] (дан-

ный принцип применим, поскольку рассматриваются лишь системы со скачкообразным изменением управления и конечным набором управляющих воздействий). В результате будут образованы новые переходы, не обусловленные каким-либо конкретным управляющим воздействием. На верхнем уровне графы переходов, построенные для каждого из возможных управляющих воздействий и комбинаций этих воздействий в скользящих режимах, объединяются в общий граф переходов. Две ячейки считаются связанными, если существует траектория, соответствующая любому из управляющих воздействий, которая соединяет эти ячейки. Возможна ситуация, когда несколько ребер (дуг) графа для различных управлений будут непосредственно соединять ячейки. Ребрам графа могут быть поставлены в соответствие веса согласно критерию управления. Например, в качестве весового коэффициента может использоваться время движения по элементарной траектории или энергия, затрачиваемая на управление.

- *Классификация (декомпозиция):* после построения осуществляется декомпозиция графа переходов. На первом шаге ячейки группируются по классам эквивалентности в соответствии с различными критериями, например, по робастности. Информация, подобная вероятности отклонения от траектории, представляет большую ценность на последующих этапах при поиске необходимой стратегии управления. На следующем шаге ячейки комбинированного графа переходов разделяются на два класса: один соответствует совокупности ячеек, принадлежащих управляемой области, когда из каждой ячейки существует путь к конечной цели; в другой класс входят ячейки, из которых невозможно достичь цели. Соответственно, участки фазовой плоскости классифицируются на управляемые и неуправляемые. Если заранее задана некоторая разрывная поверхность, на которой требуется организовать скользящий режим, ячейки классифицируются также в зависимости от условий существования такого режима.

- *Поиск:* подвергаясь декомпозиции структура фазового пространства исследуется с целью выявления оптимального пути, отвечающего целям управления. Траектория, соответствующая синтезированному закону управления состоит из последовательности ячеек и связанных с ними управляющих воздействий, определяющих последовательность переходов от ячейки к ячейке. Если каждому ребру графа переходов приписан опреде-

ленный вес, например, время перехода при необходимости оптимизации быстродействия, искомым путь должен быть наикратчайшим. Для этого можно использовать алгоритм поиска наикратчайшего пути Дijkstra.

Чтобы формализовать характеристики управления для нелинейных динамических систем в применении к геометрической структуре фазового пространства, необходимо с геометрической точки зрения определить такие понятия как управляемость, устойчивость, робастность и оптимальность управления таким образом, чтобы они могли быть выявлены на практике. Следует отметить, что эти же понятия будут действительны и для движений в скользящем режиме. Отличие будет заключаться лишь в том, что конечным состоянием в данных условиях будет считаться любая точка на поверхности скольжения. Для определения отмеченных выше понятий сформулируем несколько критериев.

- Критерий управляемости устанавливает, достижимо ли определенное конечное состояние из данного начального состояния или определенной области пространства системы под действием какого-либо управляющего сигнала. Совокупность достижимых состояний образует подпространство фазового пространства, которая может быть найдена на основе геометрических вычислений.

- Критерий устойчивости определяет, может ли система находиться в определенной окрестности заданного состояния в течение требуемого интервала времени. Устойчивость характеризуется областью устойчивости - совокупностью начальных состояний, траектории в которых сходятся в определенной ограниченной зоне. Область устойчивости представляет собой подпространство фазового пространства, которая также может быть найдена на основе геометрических вычислений. Благодаря введению областей существования скользящих режимов можно добиться расширения областей управляемости и устойчивости.

- В соответствии с критерием робастности проверяется, способна ли система в условиях параметрической или структурной неопределенности (при действии дестабилизирующих возмущений) сохранить свои свойства без коренных изменений. Геометрически определенные типы неопределенности, например, помехи или погрешности измерений могут моделироваться в виде зон, прилегающих к исследуемым состояниям или последовательностям состояний. При использовании этого критерия области существования скользящих режимов должны рассматриваться как наиболее приоритетные, поскольку обеспечивают наибольшую робастность в силу характерных особенностей движений в скользящем режиме.

- Критерий оптимальности определяет, является ли оптимальным найденный путь с точки зрения заданного критерия, например, минимизации быстродействия или «затрат» на управление. Учет

«затрат» требует параметрического представления траекторий фазового пространства. Траектории упорядочиваются по выбранному показателю оптимальности.

## 2. Алгоритм построения фазовых траекторий и структурирование фазового пространства

Рассмотрим произвольную динамическую систему, описываемую системой уравнений вида

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (1)$$

где  $x$  - вектор состояний системы,  $u$  - вектор управляющих воздействий. Поскольку алгоритм синтеза управлений по фазовому пространству основан на дискретном представлении поведения системы, динамическая модель управляемой системы должна быть представлена в следующем виде:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2)$$

где  $x_n$  - вектор состояний системы в данный момент времени,  $f(x_n) = \int F(x_n, o(x_n))$  - вектор состояний системы через период дискретизации,  $o(x_n)$  - выходной управляющий сигнал регулятора. При этом будем считать, что период дискретизации постоянен, а синтезируемая система работает в ограниченной области фазового пространства.

В качестве входных данных в алгоритме анализа фазового пространства используются модель системы, цель управления (конечное состояние или поверхность разрыва, если таковая задается заранее), последовательность возможных значений переменной управления, а также информация о способе разделения на части фазового пространства. На основе модели системы путем численного решения алгебраических уравнений типа методом Ньютона-Рафсона вычисляются координаты особых точек. В результате действия алгоритма для каждого значения  $u$ , управляющего воздействия формируется таблица графа фазовых траекторий. Рабочая управляющая программа будет определять, какая из ячеек соответствует текущему состоянию системы, и выбирать из таблицы управлений соответствующее значение.

Алгоритм анализа состоит из 3 основных шагов.

1. *Отображение* - разбиение фазового пространства на элементарные участки-ячейки, размер которых может варьироваться в зависимости от характера (монотонности) траекторий.

2. *Структурирование* — построение графа переходов от каждой ячейки к смежным ячейкам. При этом ячейка  $x$  считается смежной с ячейкой  $y$ , если для некоторого возможного управляющего воздействия  $u$  существует такое натуральное число  $n$ , что  $f^k(\text{центр}(x), u) \in x, \forall k < n$  и  $f^n(\text{центр}(x), u) \in y$ . В граф переходов также включаются ячейки, в которых может быть организован скользящий режим.

3. *Маршрутизация* - если определено конечное состояние (цель), для каждой ячейки  $s$  находится путь к этому состоянию. Если такой путь отсутствует,  $s$  маркируется как ячейка, находя-

щаяся вне области управляемости системы. Иначе, в соответствии с заданным критерием оптимизации выбирается один из существующих путей, а соответствующий ему выходной управляющий сигнал заносится в таблицу управления.

Следует отметить, что в понятие «конечное состояние» включается не только точка в фазовом пространстве, но также предельный цикл или поверхность переключения для скользящего режима.

На шаге 3 при наличии нескольких вариантов движения используются алгоритмы выбора пути. В качестве критерия оптимизации на этом этапе могут применяться различные характеристики системы. Например, если необходимо оптимизировать быстродействие, следует выбирать наиболее короткие пути. При этом могут существовать дополнительные ограничения на выбор траекторий движения, например, для обеспечения заданного перерегулирования должно выполняться условие:  $x_n \leq x_{пер}$ .

Особым образом отмечаются ячейки, находящиеся на «поведенческой» границе системы, то есть представляющие различные по своим качественным характеристикам пути. Например, такой границей может быть граница области устойчивости.

Следует отметить, что задача определения границ области устойчивости имеет очень большое значение. Чтобы решить эту задачу, сформулируем понятие границы устойчивости.

При определенных допущениях граница устойчивости для устойчивой точки равновесия  $x$ , нелинейной автономной динамической системы формируется устойчивыми подмножествами точек равновесия на границе области притяжения [1, 5]. При этом отмеченным допущениям удовлетворяет достаточно широкий класс используемых на практике автономных динамических систем, а именно большинство динамических систем с устойчивой структурой [1].

В основной области устойчивости оцениваются численными методами. Однако существуют аналитические формулы, применение которых более целесообразно.

Рассмотрим одну из таких формул для расчета границы устойчивости:

$$h(x) = H_1 x + \frac{1}{2} x^T \Psi x + O(\|x\|^3), \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} H_1 = \eta^T; \\ \Psi = V_c^{-1} \left\{ \left[ \left( \frac{\mu}{2} E_n - J^T \right) E_n + \right. \right. \\ \left. \left. + E_n \left( \frac{\mu}{2} E_n - J^T \right) \right]^{-1} V_c \left( \sum_{i=1}^n \eta_i \text{Hess}(f_i(0)) \right) \right\}, \end{cases}$$

где  $J = J_f(0)$  – матрица-якобиан в точке  $x = 0$ ,  $\mu$  – собственное значение  $J$ ,  $\eta$  – собственный вектор  $J^T$ , соответствующий  $\mu$ ,  $\text{Hess}(f_i(0))$  – гессианы

$i$ -х компонент  $f$  в точке  $x = 0$ ,  $E_n$  – единичная матрица размерности  $n$ ,  $V_c(A)$  – вектор, образованный столбцами матрицы  $A$  размерности  $m \times n$ , т.е.  $V_c(A) = (a_{11} \cdots a_{m1} \cdots a_{1n} \cdots a_{mn})^T$ .

$$\text{Если матрица } \sum_{i=1}^n \eta_i \text{Hess}(f_i(0)) \left( \frac{\mu}{2} E_n - J \right)^{-1}$$

симметрична, тогда выражения (1) может быть упрощено:

$$h(x) = \eta^T x + \frac{1}{4} x^T \sum_{i=1}^n \eta_i \text{Hess}(f_i(0)) \left( \frac{\mu}{2} E_n - J \right)^{-1} x = 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что существуют формулы для еще более точной аппроксимации границ устойчивости [5], однако они более сложны.

Алгоритм анализа выбирает пути, расположенные как можно дальше от рассмотренных «поведенческих» границ. Использование этого дополнительного критерия обусловлено тем, что данные состояния наиболее подвержены влиянию помех и ошибок моделирования, при этом незначительная ошибка может привести к существенным изменениям поведения системы.

Форма элементарных ячеек, используемых при разбиении фазового пространства, может быть как треугольной (триангуляция), так и прямоугольной. Первый тип позволяет использовать ячейки большего размера по сравнению с прямоугольным типом. Однако второй способ более прост в применении и не требует привлечения дополнительных алгоритмов для реализации.

В случае синтеза управлений в скользящих режимах возможны две ситуации.

1. Поверхности разрыва задаются заранее (вместе с моделью).

2. Поверхности разрыва заранее не определяются, а вычисляются автоматически при появлении возможности использовать скользящий режим для достижения конечного состояния.

В первом случае, требуется оценить, способна ли анализируемая система при данном наборе управляющих воздействий осуществлять движение по известной поверхности  $s(x)$ . Для этого маркируются все ячейки, через которые проходит эта поверхность (см. рис. 1), т.е. формируется граница, которая должна разделять переключаемые системы в скользящем режиме. Далее проверяются условия существования скользящего режима на этой границе. В каждой из отмеченных ячеек рассчитываются векторы градиента функции  $s(x)$  и вычисляются их произведения с векторами скорости  $f_\alpha$  и  $f_\beta$  (к которым стремится вектор  $F(x, u)$  при стремлении  $x$  к каждой из рассматриваемых точек с разных сторон от поверхности разрыва). Поскольку для того, чтобы скользящий режим мог быть организован, векторы фазовой скорости, соответствующие разным системам, должны быть

направлены навстречу друг другу, условие существования такого режима можно представить в следующем виде:

$$\text{sgn grad}(sf_\alpha) + \text{sgn grad}(sf_\beta) = 0. \quad (5)$$

Все ячейки, удовлетворяющие условию (5) маркируются как принадлежащие области существования скользящего режима и, соответственно, включаются в область управляемости (рис. 1). Остальные ячейки поверхности разрыва маркируются как лежащие вне области существования скользящего режима. В этих ячейках скользящий режим невозможен, поэтому при синтезе требуемого управления нельзя допускать попадания в них изображающей точки.

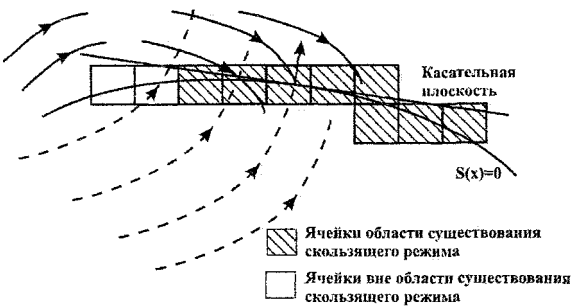


Рис. 1. Определение границы существования скользящего режима

Следует отметить, что в рассматриваемом подходе практически не имеют большого значения различия между линейными и нелинейными поверхностями скольжения. Он не ориентирован на форму поверхности разрыва, как большинство существующих теорий проектирования СУПС. В частности, метод автоматизированного геометрического фазового пространства позволяет легко организовывать движение по линии переключения вида (рис. 2).

$$s(x) = \dot{x} - \lambda(x), \quad (6)$$

где

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{e_m}{1/\lambda_m + K_e e_m} + \lambda_0(x - e_m), & \text{при } e_m < x; \\ \frac{x}{1/\lambda_m + K_e x}, & \text{при } 0 \leq x \leq e_m; \\ \frac{x}{1/\lambda_m - K_e x}, & \text{при } -e_m \leq x \leq 0; \\ -\frac{e_m}{1/\lambda_m + K_e e_m} + \lambda_0(x + e_m), & \text{при } x < -e_m, \end{cases}$$

а  $e_m = (\sqrt{\lambda_m/\lambda_0} - 1)/(K_e \lambda_m)$ ,  $\lambda_m > \lambda_0 > 0$  – постоянные коэффициенты. Линии переключений такой формы обладают преимуществами по сравнению с традиционно используемыми прямыми [6]. Однако их применение сдерживается достаточно сложным математическим описанием и ориентацией большинства существующих методик рас-

чета скользящих режимов на линейные поверхности скольжения.

Даже если условия существования скользящего режима выполнены, и соответствующие движения можно организовать, необходимо определить величину и направление фазовой скорости для новой траектории. Во-первых, это позволит оценить правильность перемещения изображающей точки в скользящем режиме, а, во-вторых, способность системы выполнять такое перемещение. Например, возможна ситуация, когда фазовые траектории переключаемых структур направлены непосредственно навстречу друг другу (рис. 3), и результирующий вектор фазовой скорости равен нулю [3]. В этом случае изображающая точка будет совершать циклические движения на одном месте, не смещаясь вдоль поверхности скольжения, и потребуются изменить стратегию управления. Для того чтобы вычислить вектор фазовой скорости в скользящем режиме, можно воспользоваться методом Филиппова [4].

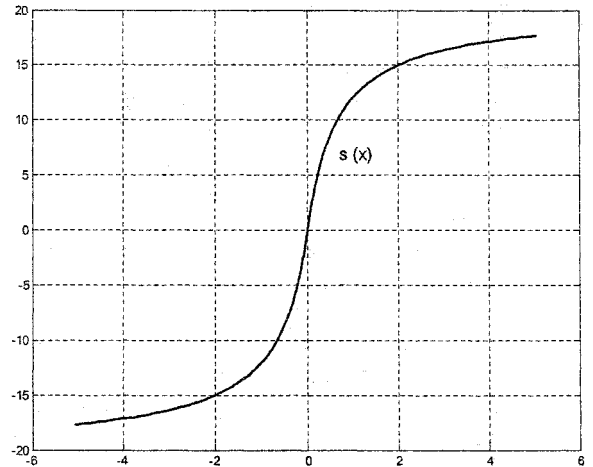


Рис. 2. Криволинейная линия переключений

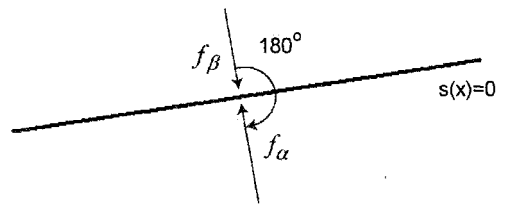


Рис. 3. Направления векторов фазовой скорости вблизи поверхности скольжения, при котором скользящий режим невозможен

Рассмотрим систему, в которой переключающее устройство, осуществляющее скачкообразное изменение величины управления, обладает гистерезисом. Функция управления  $u$  в уравнении (1) будет иметь вид

$$u = \begin{cases} u_\alpha, & \text{при } s(x) > \epsilon; \\ u_\beta, & \text{при } s(x) < -\epsilon, \end{cases} \quad u_\alpha, u_\beta, \epsilon = \text{const},$$

а в области  $|s(x)| \leq \epsilon$  функция  $u$  сохраняет то значение, которое она имела, когда величина  $|s|$  в последний раз была равной  $\epsilon$ . Как правило, на прак-

тике формирующие управляющее воздействие устройства всегда имеют некоторый гистерезис, поэтому системы рассматриваемого типа имеют достаточно широкое применение.

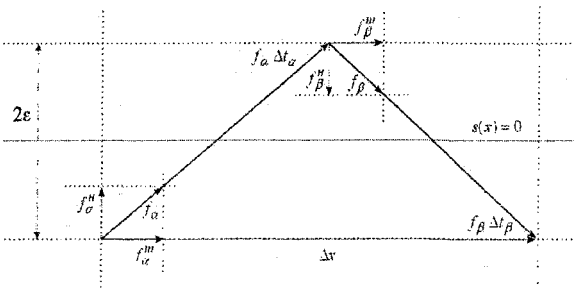
Наличие гистерезиса приводит к тому, что после попадания на поверхность разрыва вектор состояния уже не будет двигаться точно вдоль поверхности, а будет совершать колебания в ее окрестности шириной  $2\epsilon$  (рис. 4). Векторы скорости

$f_\alpha$  и  $f_\beta$  можно представить в виде сумм нормальных и тангенциальных составляющих  $f_\alpha^H$ ,  $f_\beta^H$  и  $f_\alpha^T$ ,  $f_\beta^T$ . Тогда «время», затрачиваемое на пересечение интервала  $2\epsilon$  в режиме  $\alpha$ , составит  $\Delta t_\alpha = 2\epsilon / f_\alpha^H$ , а в режиме  $\beta - \Delta t_\beta = 2\epsilon / f_\beta^H$ , причем нормальные составляющие векторов скорости определяются с помощью вектора градиента к поверхности разрыва:

$$f_\alpha^H = \frac{\text{grad } sf_\alpha}{|\text{grad } s|};$$

$$f_\beta^H = \frac{\text{grad } sf_\beta}{|\text{grad } s|}.$$

Метод Филиппова позволяет математически описывать поведение системы в скользящем режиме. Согласно данному методу в системах с одной поверхностью разрыва для определения вектора скорости в каждой точке этой поверхности необходимо найти точку пересечения касательной плоскости к поверхности разрыва с прямой, соединяющей концы векторов  $f_\alpha$  и  $f_\beta$  [4] (рис. 5).



**Рис. 4. Движение в системе со скалярным управлением, и обладающим гистерезисом переключающим устройством**

Среднюю скорость  $f^{cp}$ , соответствующую движению в скользящем режиме, можно найти по перемещению изображающей точки  $\Delta x$  на двух соседних интервалах, на первом из которых и равно  $u_{\alpha\beta}$  а на втором  $u_\beta$ :

$$\Delta x = f_\alpha \Delta t_\alpha + f_\beta \Delta t_\beta. \quad (7)$$

Подставив в выражение (7) формулы для определения  $\Delta t_\alpha$  и  $\Delta t_\beta$

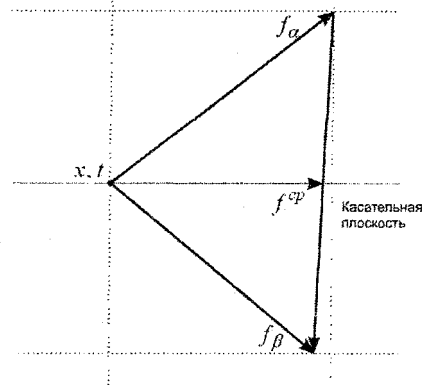
$$f^{cp} = \frac{\text{grad } sf_\alpha}{\text{grad } s(f_\alpha - f_\beta)} f_\beta - \frac{\text{grad } sf_\beta}{\text{grad } s(f_\alpha - f_\beta)} f_\alpha. \quad (8)$$

Эта фазовая скорость и будет определять поведение системы в скользящем режиме. Соответ-

ствующее уравнение движения будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{\text{grad } sf_\alpha}{\text{grad } s(f_\alpha - f_\beta)} f_\beta - \frac{\text{grad } sf_\beta}{\text{grad } s(f_\alpha - f_\beta)} f_\alpha. \quad (9)$$

Таким образом, вычислив фазовые скорости внутри некоторой достаточно малой (чтобы считать эти скорости неизменными) области-ячейки, можно определить характер движения в этой зоне.



**Рис. 5. Оценка поведения системы в скользящем режиме с помощью метода Филиппова**

В том случае, когда поверхности разрыва заранее не заданы, их можно синтезировать автоматически в процессе анализа структуры фазового пространства. Для этого требуется определить направления векторов фазовой скорости переключаемых систем в каждой из ячеек пространства. Затем полученные значения сравниваются, чтобы оценить возможность организации скользящего режима и характер движения в нем. Согласно принципу Филиппова конец суммарного вектора фазовой скорости должен располагаться на прямой, соединяющей концы векторов различных структур в рассматриваемой точке. Таким образом, для каждой точки пространства может быть найдено бесконечное множество траекторий движения в скользящем режиме. Для выбора необходимого движения можно использовать различные критерии, например, критерий максимальной близости к прямой, соединяющей текущую точку с итоговым состоянием. На последнем этапе элементарные поверхности скольжения, определенные для отдельных ячеек, объединяются, и формируются результирующая траектория движения в скользящем режиме, которая затем используется при синтезе требуемого управления.

### **3. Алгоритм верификации фазового пространства**

Алгоритм верификации фазового пространства применяется с целью установления рабочих областей, обладающих желаемым предельным поведением с точки зрения стабилизации управляемой величины (в случае систем управления, предназначенных для стабилизации состояния

объекта на заданном уровне). При незначительной модификации алгоритма можно также определить другие показатели, такие как перерегулирование и скорость сходимости. Данный алгоритм применим к системам управления с дискретным временем и фиксированной частотой дискретизации вида (2). Динамическое поведение объекта управления может быть непрерывным, дискретным или смешанным. При этом предполагается, что синтезируемая система будет работать в ограниченной области фазового пространства.

*Алгоритм верификации*

1. Заданная область фазового пространства разбивается на конечное множество ячеек  $C$ .

2. Определяется начальная область управляемости  $R_{упр}$ .

3. Для каждой ячейки  $c$  из множества  $C - R_{упр}$ :

а) находится политоп (многогранник)  $p_c$ , заключающий в себе  $c$ ;

б) вычисляется «выходной политоп»  $e_c = p_c - c$ ;

в) если  $e_c$  содержится в  $R_{упр}$  и функция  $f$  не генерирует циклов внутри  $c$ , ячейка  $c$  помечается как верифицированная, а множество  $R_{упр} = R_{упр} \cup c$ .

4. Если на шаге 3 во множество  $R_{упр}$  были добавлены какие-либо новые ячейки, шаг 3 повторяется.

5. После верификации всей заданной области или истечения установленного числа шагов процедура заканчивается. В противном случае формируется новое множество  $C'$  в результате разделения немаркированных ячеек множества  $C$ . Далее производится замена  $C = C'$  и осуществляется возврат к шагу 3.

Разбиение фазового пространства на шаге 1 может быть произвольным; однако удобнее использовать регулярный способ разбиения, а для некоторых типов управления имеются предпочтительные способы. Например, управление, основанное на ячеистой структуре предполагает, чтобы первоначальное разбиение на ячейки осуществлялось способом, аналогичным использованному при формировании карт ячеек.

Определение начальной области управляемости отнимает немного больше усилий. Можно выделить два основных подхода. Если регулятор уже был верифицирован в некоторой области  $R_1$  (например, на основе результатов предварительного расчета), и алгоритм верификации используется для расширения этого участка, в качестве  $R_{упр}$  выбирается  $R_1$ , и маркируются все ячейки, целиком попадающие внутрь  $R_1$ . Этот подход применяется, например, когда регулятор, спроектированный для локальной области (напр., на основе линейных методов) дополняется глобальным регулятором.

При отсутствии предварительных сведений об управляемости в системе  $R_{упр}$  нельзя выбрать просто как целевой, поскольку существует вероятность того, что для данного регулятора начальное состояние объекта может попасть в целевой уча-

сток, однако изображающая точка позднее может покинуть его и более никогда не вернуться. Таким образом, в данном случае необходимо найти множество  $R_{упр}$  базовых ячеек. Базовые ячейки обла- дают следующими двумя свойствами.

1. Каждая ячейка  $c \in R_{упр}$  располагается в целевом регионе.

2. Для каждой  $c \in R_{упр}$  контур  $f(c)$  содержится в  $R_{упр}$ .

Максимальное множество базовых ячеек (для заданного способа разбиения фазового пространства) может быть сформировано посредством выбора всех ячеек, входящих в целевой регион и последующего итеративного исключения ячеек, чьи границы лежат вне множества выбранных ячеек. Нахождение политопа  $p_c$ , ограничивающего  $f(c)$ , может быть произведено несколькими способами. Одним из простейших и наиболее эффективных способов нахождения подходящего  $p_c$  является вычисление минимальных и максимальных значений каждого компонента  $F$  по всей ячейке  $c$  и формирование ограничивающего контура для  $f(c)$  с использованием этих значений.

Если задана поверхность переключения, то в качестве начальной области управляемости можно выбрать предварительно найденную область существования скользящих режимов. В этом случае алгоритм верификации будет представлять собой проверку условий устойчивости скользящих режимов на поверхности.

На шаге 3 проверяются два свойства:

1.  $\forall x \in c : f^n(x) \notin c$  для некоторых  $n \in N$ . То есть все траектории системы, начинающиеся внутри  $c$ , в конечном итоге должны покидать  $c$ ;

2.  $\forall x \in c, n \in N : f^n(x) \notin c \wedge f^{n-1}(x) \in c \Rightarrow f^n(x) \in R_{упр}$ . То есть, когда траектория покидает  $c$ , она должна попадать в уже верифицированную и маркированную ячейку.

Проверить второе свойство не представляет труда. Чтобы проверить первое свойство, мы пересекаем  $f(c)$  с  $c$  для формирования политопа  $p'_c$ . Этот процесс повторяется с  $p'_c$  до тех пор, пока пересечение не станет пустым, либо пока не будет превышено заранее заданное число итераций  $i$ . Таким образом, мы заменяем первое свойство более строгим условием – чтобы все траектории покидали  $c$  за  $i$  временных шагов.

**4. Синтез закона управления по результатам анализа геометрической структуры фазового пространства**

В качестве входных данных в алгоритме синтеза закона управления по заданной геометрической структуре фазового пространства используются модель системы, цель управления (конечное состояние или поверхность разрыва) и данные анализа геометрической структуры фазового пространства. На первом шаге проверяется принадлежность целевого состояния к области устойчиво-

ста или областям существования скользящих режимов. Если проверка проходит успешно, и целевое состояние достижимо, производится поиск траектории управления. При этом для повышения робастности искомая траектория, по возможности, формируется из отрезков поверхностей скольжения.

В результате действия алгоритма составляется таблица управляющих воздействий для каждой из ячеек таблицы графа фазовых траекторий. Рабочая управляющая программа будет определять, какая из ячеек соответствует текущему состоянию системы, и выбирать из таблицы управлений соответствующее значение.

**5. Пример действия алгоритма**

Проиллюстрируем действие предложенного алгоритма на примере. Для этого рассмотрим процесс синтеза закона управления для термохимического гетерогенного процесса [7]. Этот процесс может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -(a_2 + wx)y - (a_1 + h_2u)x - lx^2 - h_1u, \end{cases} \quad (10)$$

где  $x$  - сигнал рассогласования, разность между истинной и номинальной температурой процесса, а  $u$  - управляющее воздействие. Коэффициенты  $a_1, a_2, h_1, h_2, l, w$  во втором уравнении системы (10) определяются технологическим режимом управляемого процесса.

Предположим, что управляющее воздействие может быть сформировано в виде

$$u = \Psi x, \quad (11)$$

где

$$\Psi = \begin{cases} k & \text{для структуры I;} \\ -k & \text{для структуры II,} \end{cases} \quad (12)$$

т.е. для создания системы автоматического управления доступно две структуры: I и II. Коэффициент  $\Psi$  скачкообразно меняет свое значение в течение переходного процесса, тем самым меняя структуру системы.

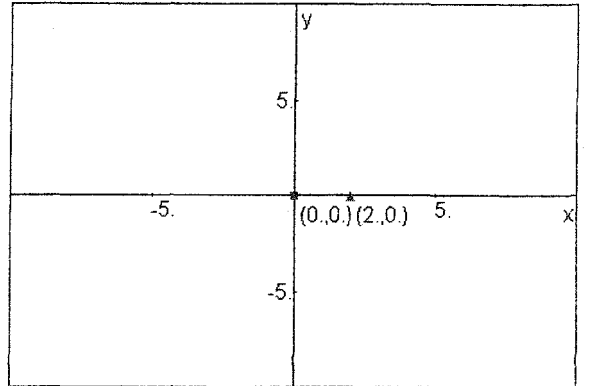
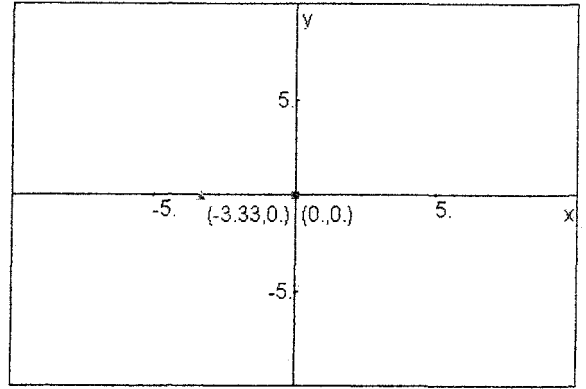
Расчеты производились с использованием следующих значений параметров:

$$a_1 = 3, a_2 = 1, h_1 = 2, h_2 = 1, l = 0,5, w = 2, k = 1.$$

На первом этапе программа анализа определяет координаты и тип особых точек каждой из структур (рис. 6), решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0; \\ -(a_2 + wx)y - (a_1 \pm h_1k)x = (l \pm h_2k)x^2. \end{cases} \quad (13)$$

Структура I имеет две особые точки (0, 0) и (-3,33, 0). Первая имеет характер устойчивого фокуса, вторая представляет собой неустойчивую особую точку типа «седло». Характер особых точек (0, 0) и (2, 0) структуры II аналогичен характеру особых точек структуры I. Точка (0,0) по-прежнему является устойчивым фокусом, а «седло» сместилось в правую полуплоскость в точку (2, 0).



**Рис. 6. Особые точки структур I (сверху) и II (снизу)**

После нахождения особых точек строятся фазовые траектории и определяются области устойчивости (рис. 7), границы которых образуются устойчивыми траекториями особых точек типа «седло». На рис. 7 эти области выделены серым цветом. Можно заметить, что с точки зрения устойчивости структура I явно предпочтительней структуры II, поскольку она обеспечивает устойчивое движение (движение, при котором изображающая точка не может покинуть заданную область окончательно) на значительно большей площади.

Кроме того, в этом же смысле структуры I и II почти не дополняют друг друга, так как область устойчивости первой включает в себя практически всю область устойчивости второй, и обычным переключением структур невозможно добиться расширения рабочей зоны системы. 3-й квадрант в любом случае остается вне этой зоны. Таким образом, управление в режиме переключений в рассматриваемом примере неспособно существенно повлиять на динамику системы - имеется возможность лишь сократить колебательность переходного процесса за счет включения структуры II при приближении изображающей точки к началу координат.

По найденным траекториям строится граф переходов (рис. 8), представляющий собой граф векторов фазовой скорости, а затем отдельные траектории объединяются в более крупные участки однообразного движения (рис. 9).

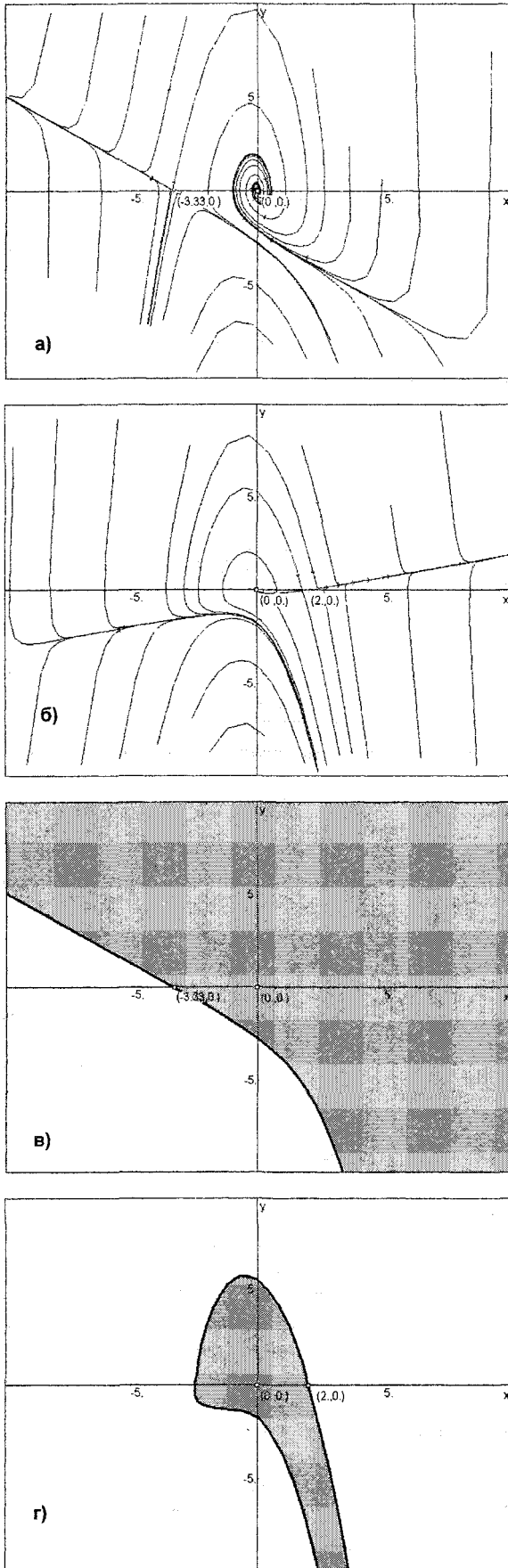


Рис. 7. Фазовые портреты и области устойчивости: а, в – I структура; б, г – II структура

На последнем этапе анализа определяются области, в которых выполняются условия существования скользящего режима. При этом учитывается заданный диапазон допустимых углов наклона фазовых траекторий разных структур по отношению друг к другу (см. выше). Как видно из рис. 10, в системе (10) существует две зоны, в которых может быть организован скользящий режим. Первая зона, расположенная в 1-м и 4-м квадрантах, не расширяет совокупную область устойчивости системы и может использоваться лишь для повышения робастности движений за счет преимуществ скользящего режима.

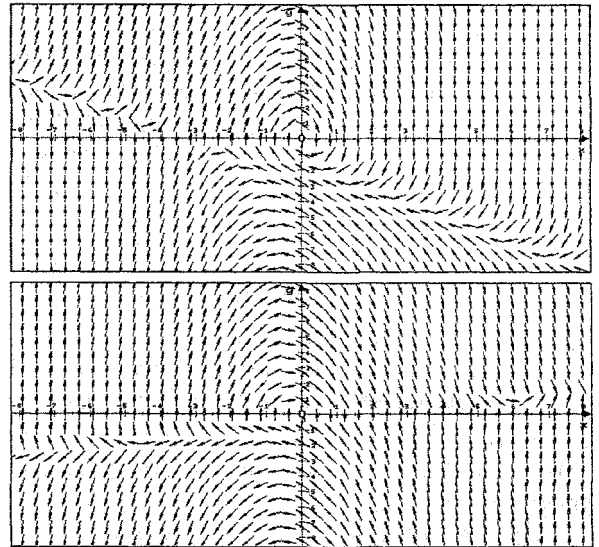


Рис. 8. Графы векторов фазовой скорости структур I (сверху) и II (снизу)

Вторая зона, расположенная во 2-м и 4-м квадрантах, лежит вне найденных ранее областей устойчивости и, таким образом, дополняет их, давая возможность обеспечить устойчивое движение там, где оно не может быть реализовано ни одной из имеющихся структур. Как следствие, расширяется спектр доступных стратегий управления.

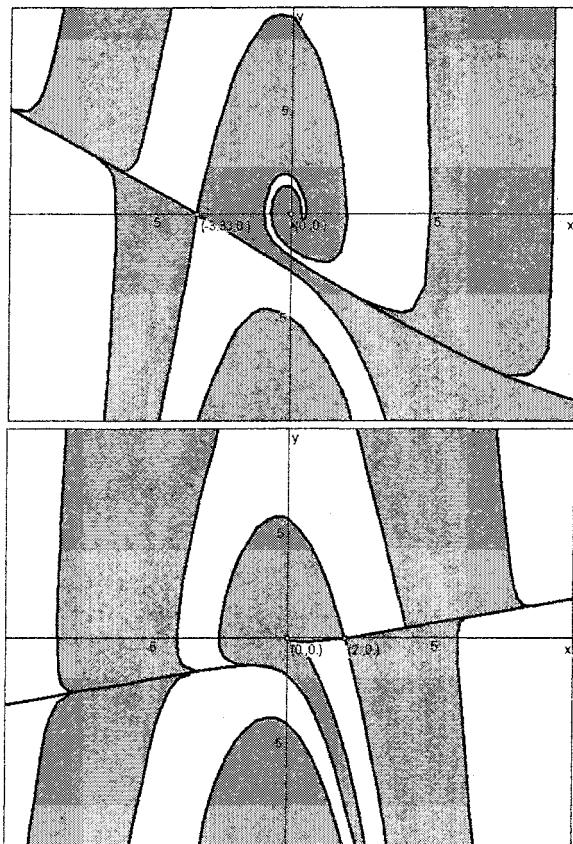
В результате декомпозиции фазового пространства и извлечения информации об основных его геометрических особенностях формируются исходные данные для синтеза стратегии управления. Чтобы осуществить синтез, не хватает лишь начальных условий и цели управления.

Сформулируем задачу управления: необходимо перевести систему из точки  $(-8,8, -1,3)$  в начало координат за минимальное время. На рис. 11 показан результат работы алгоритма синтеза.

Программа синтеза устанавливает, что исходная точка находится в области существования скользящего режима. Далее производится поиск одиночного пути к целевому состоянию. В данном случае такого пути нет, поскольку начало координат не попадает в область существования скользящего режима из 2-го и 4-го квадрантов. Следовательно, искомая траектория может быть получена



лишь путем дополнительного переключения структур на границе этой области. Выбор прямой переключения  $A_0-A_1$  осуществляется с учетом того, что конечная точка при движении в скользящем режиме не должна подходить слишком близко к границе области устойчивости структуры П. В противном случае система окажется очень чувствительной к помехам и вариациям внутренних параметров. Исходя из этого, точка на границе области существования скользящего режима выбирается на некотором заранее заданном удалении от указанной границы.



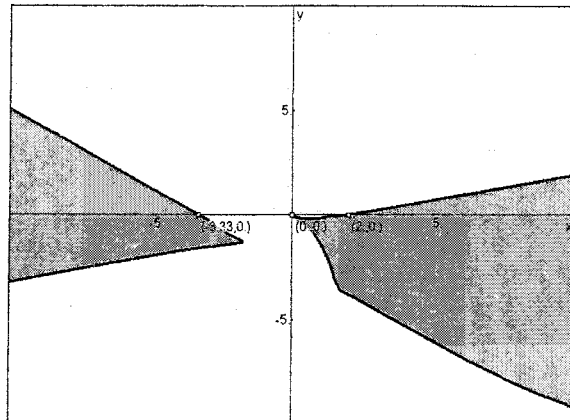
**Рис. 9. Области однообразного поведения структур I (сверху) и II (снизу)**

После определения линии скольжения требуется установить структуру, которая обеспечит наиболее быстрое приближение к цели управления. В рассматриваемом примере такой структурой является структура П. Соответствующая траектория с начальной точкой  $A_1$  является неустойчивой, и требуется еще одно переключение в точке  $A_2$ , где изображающая точка начинает удаляться от начала координат. Последнее переключение в точке  $A_2$  объясняется меньшей колебательностью структуры П и призвано увеличить быстродействие.

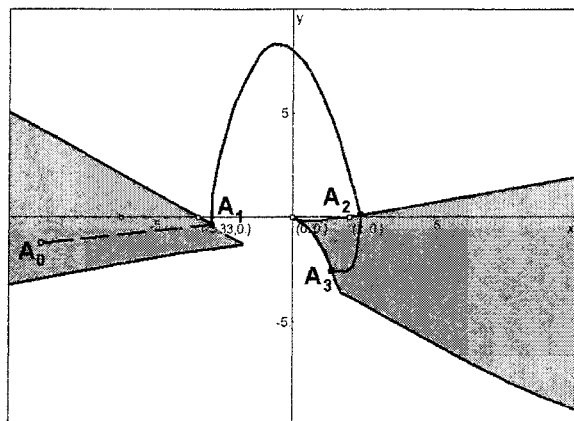
По окончании работы программы синтеза выдаются следующие данные:

Initial: sliding, line:  $y=0.163x+0.131$   
Sw\_point1:  $(-2.813, -0,326)$ ,  $u=-x$

Sw\_point2:  $(2.422, 0,109)$ ,  $u=x$   
Sw\_point3:  $(1.250, -2,609)$ ,  $u=-x$



**Рис. 10. Области, в которых выполняются условия существования скользящего режима**



**Рис. 11. Синтезированная траектория управления для перехода в начало координат из начальной точки  $A_0$ :**

$A_0-A_1$  – скользящий режим;  $A_1-A_2$  – структура II,  $A_2-A_3$  – структура I;  $A_3(0, 0)$  – структура II

Здесь  $y = 0,163x + 0,131$  – уравнение линии переключения на участке скользящего режима  $A_0-A_1$ , Sw\_point1, Sw\_point2, Sw\_point3 – координаты точек переключения структур,  $u$  – управляющее воздействие после переключения структуры.

### Заключение

Итак, метод автоматизированного геометрического анализа фазовых пространств вполне подходит для синтеза систем управления, работающих в скользящем режиме. Благодаря этому область применимости данного метода существенно расширяется. Появляется возможность комбинировать различные режимы движения и создавать регуляторы, которые практически невозможно спроектировать каким-либо другим методом. Кроме того, учет областей существования скользящего режима в алгоритме анализа фазового пространства позволяет повысить робастность системы и расширить ее область устойчивости.

**Литература**

1. Zhao F., May J. A., Loh S. C. *Controller Synthesis and Verification for Nonlinear Systems: A computational approach using phase-space geometric models*// *IEEE Control Systems Magazine*. - 1998.

2. Девятков М.А. Автоматический синтез систем автоматического управления на основе фазовых пространств// Информационные, измерительные и управляющие системы и устройства: тем. сб. научн. тр. - Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. - С. 50-52.

3. Pieter J. M., Zhao F., Biswas G. *Sliding mode model semantics and simulation for hybrid systems*// *Hybrid Systems V, Lecture Notes in Computer Science*. - Springer, 1998. - P. 218-237.

4. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. - М.: Наука, 1981. - 368 с.

5. Cheng, D. *Calculation of stability boundary of power systems*. - 2003. - <http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stabboundOO.pdf>.

6. Stepanenko Y., Chun-Yi Su. *Variable structure control of robot manipulators with nonlinear sliding manifolds*// *International Journal of Control*. — 1993, Vol. 58. -No.2. -P. 285-300.

7. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.-336 с.