

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАТРОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С ШАГОВЫМИ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ

Ю.С. Смирнов, А.В. Соколов

## FEATURES OF DYNAMICS CLOSED ELECTRO-MECHATRONIC CONVERTERS WITH ELECTRIC STEP MOTORS

Yu.S. Smirnov, A.V. Sokolov

Представлен анализ устойчивости замкнутых электромехатронных преобразователей (ЭМТП) с шаговыми электродвигателями (ШЭД). Рассмотрены два варианта определения условий устойчивости нелинейной импульсной системы. Получена импульсная передаточная функция ЭМТП с учетом запаздывания в системе. Построение переходного процесса при детерминированных входных воздействиях в системе произведено численным методом по рекуррентной формуле.

*Ключевые слова:* устойчивость, нелинейная импульсная система, импульсная передаточная функция, рекуррентная формула, передаточный механизм.

The analysis of stability closed electro-mechatronic converters with electric step motors is presented. Two variants of definition of stability conditions of nonlinear pulse system are considered. Pulse transfer function electro-mechatronic converters taking into account delay in system is received. Transient construction at the determined entrance influences in system is made by a numerical method under the recurrent formula.

*Keywords:* stability, nonlinear pulse system, pulse transfer function, the recurrent formula, the transfer mechanism.

### Анализ устойчивости

Общим для работы замкнутого и разомкнутого ЭМТП с ШЭД является то, что независимо от амплитуды входного импульса ШЭД отработывает единичное шаговое перемещение, что эквивалентно наличию в структурной схеме порогового элемента, обладающего релейной характеристикой. Логическая часть электронного коммутатора (ЭК) осуществляет импульсную фазовую модуляцию, преобразуя одноканальную последовательность импульсов малой мощности в многофазную систему напряжений, прикладываемых к обмоткам управления ШЭД. Ступенчатому характеру напряжений на обмотках ШЭД соответствует дискретное вращение электромагнитного поля, вследствие чего движение ротора состоит из элементарных угловых перемещений, совершаемых по неко-

торому закону. Электромехатронный преобразователь с ШЭД является системой с  $m+1$  степенями свободы:  $m$  – электрические и одна механическая.

Эквивалентная структурная схема замкнутого ЭМТП с ШЭД представлена на рис. 1.

Передаточная функция  $W_s(p)$  в ЭМТП включает в себя передаточные функции интеллектуального силового модуля (ИСМ) и цифрового преобразователя перемещений (ЦПП), которые в первом приближении можно считать безинерционными и характеризовать коэффициентом передачи. В большинстве случаев влияние динамики циклического ЦПП можно учесть звеном чистого запаздывания. Динамические свойства ЦПП следящего типа рассмотрены в [1]. В зависимости от соотношения динамических показателей ШЭД и остальных звеньев ЭМТП, которые определяются построением

---

**Смирнов Юрий Сергеевич** – д-р техн. наук, профессор кафедры «Приборостроение», Южно-Уральский государственный университет; Тел: (351)2679012.

**Соколов Александр Васильевич** – старший преподаватель кафедры «Автоматизация механосборочного производства», Южно-Уральский государственный университет; ialexsok@gmail.com

---

**Smirnov Yury Sergeevich** – PhD, professor of Instrument making Department of SUSU; Tel: (351)2679012.

**Sokolov Alexander Vasilevich** – senior teacher of Automation of machine-assembling manufacture Department of SUSU; ialexsok@gmail.com

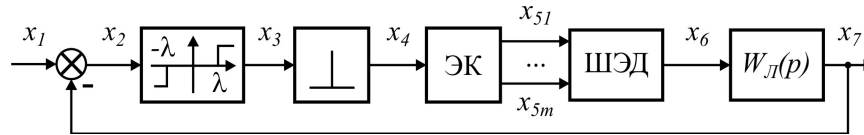


Рис. 1

ЭК и ЦПП, возможны два варианта определения условий устойчивости и возникновения периодических режимов в ЭМТП.

Первый вариант связан с применением в ЭМТП устройств, имеющих постоянные времени, значительно превышающие период управляющих импульсов ШЭД. Поэтому исследование устойчивости и условий возникновения периодических режимов может производиться путем перехода к эквивалентной релейной САУ без временного квантования. Это позволяет для анализа такой САУ воспользоваться известным методом гармонического баланса в его обычной форме.

В быстродействующих ЭМТП основным динамическим звеном является ШЭД. Анализ динамики такой САУ можно произвести на основе обобщенного метода гармонического баланса применительно к нелинейным импульсным системам.

Эквивалентная структурная схема ЭМТП для такого сочетания параметров представлена на рис. 2.

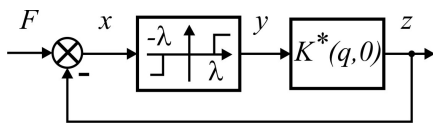


Рис. 2

Для анализа устойчивости определяем импульсную передаточную функцию разомкнутого ЭМТП, которая, как известно [2], представляет собой дискретное преобразование Лапласа импульсной переходной функции приведенной непрерывной части импульсной системы:

$$K^*(q, \varepsilon) = D\{\omega(n, \varepsilon)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \omega(n, \varepsilon). \quad (1)$$

Импульсную переходную функцию системы можно определить по известной передаточной функции, пользуясь теоремой разложения [2]:

$$\omega(t) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} \left( \frac{1}{(r_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r_v - \mu - 1}}{dp^{r_v - \mu - 1}} \times \right. \\ \left. \times \left[ W(p) (p - p_v)^{r_v} \right]_{p=p_v} \frac{t^\mu}{\mu!} e^{p_v t} \right), \quad (2)$$

где  $W(p) = P(p)/[pQ(p)]$ .

Для случая, когда имеется один нулевой корень,  $C'_{00} = P(0)/Q(0)$ ;  $C'_{v0} = P(p_v)/[Q'(p_v)p_v]$ . (3)

Вычисление коэффициентов  $C'_{v\mu}$  довольно трудоемко. Импульсная переходная функция  $\omega(t)$  и переходная функция звена  $h(t)$  связаны между собой соотношением  $\omega(t) = dh/dt$ .

Импульсная переходная функция ЭМТП в данном случае будет переходной характеристикой колебательного звена с запаздыванием, равным  $t_{\text{зап}}$ , поскольку входные импульсы ЭК можно считать дельта-импульсами. Для получения D-преобразования решетчатой функции с запаздыванием воспользуемся теоремой сдвига [2].

Переходная функция колебательного звена

$$h(t) = 1 - e^{-\xi t/T} \times \\ \times \left( \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right). \quad (4)$$

Без учета запаздывания это и есть импульсная переходная функция приведенной непрерывной части ЭМТП:

$$\omega(t) = 1 - e^{-\xi t/T} \left( \cos \omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega t \right), \quad (5)$$

где  $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ .

Введем новую независимую переменную – безразмерное время  $\bar{t} = t/T_y$ , тогда

$$\omega(t) = 1 - e^{-\xi \bar{t}/T} \left( \cos \bar{\omega} \bar{t} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \bar{\omega} \bar{t} \right), \quad (6)$$

где  $\bar{\omega} = \omega T_y$ .

Обозначим  $\xi T_y / T = \eta$ , тогда смещенная решетчатая функция

$$\omega[\eta, \varepsilon] = 1[\eta, \varepsilon] - \\ - e^{-\eta \varepsilon} \left( \cos \bar{\omega} \varepsilon + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \bar{\omega} \varepsilon \right). \quad (7)$$

Воспользуемся теоремами смещения и линейности и определим импульсную передаточную функцию комплекса без учета запаздывания:

$$K^*(q, \varepsilon) = \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^{2q} \cos \bar{\omega} \varepsilon - e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\eta}} e^{-\eta \varepsilon} - \\ - \frac{e^{2q} \sin \bar{\omega} \varepsilon + e^q e^{-\eta} \sin \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\eta}} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\eta \varepsilon}. \quad (8)$$

Чтобы получить импульсную передаточную функцию с учетом запаздывания, воспользуемся теоремой сдвига [2]. Если  $\varepsilon < 0$ , то введем в рассмотрение решетчатую функцию вида  $\omega(\eta - 1, 1 + \varepsilon)$ , тогда согласно теореме

$$D\{\omega[\eta - 1, 1 + \varepsilon]\} = e^{-q} F^*(q, 1 + \varepsilon).$$

Выразим запаздывание через безразмерное время  $\sigma = t_{\text{зап}} / T_y$  и воспользуемся теоремой запаздывания [2]. Импульсная передаточная функция ЭМТП (см. рис. 2) с учетом запаздывания будет иметь вид

$$K^*(q, \varepsilon) = \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^{2q} \cos \bar{\omega} \varepsilon - e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} (1 - \varepsilon)}{e^{2q} - 2e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\eta}} e^{-\eta \varepsilon} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{e^q \sin \bar{\omega} (1 - \sigma) + e^{-\eta} \sin \bar{\omega} \sigma}{e^{2q} - 2e^q e^{-\eta} \cos \bar{\omega} + e^{-2\eta}} e^{-\eta (1 - \sigma)}. \quad (9)$$

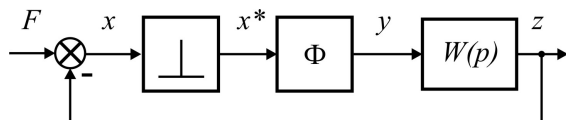
Учет влияния запаздывания важен при анализе устойчивости ЭМТП, она снижается с ростом запаздывания. Для анализа влияния запаздывания на устойчивость определяется импульсная передаточная функция замкнутого ЭМТП и по характеристическому полиному, с учетом критерия устойчивости Гурвица применительно к импульсным системам, определяется зависимость граничного коэффициента усиления системы как функция относительного запаздывания. По характеру эта зависимость является падающей, что указывает на ухудшение устойчивости системы с увеличением запаздывания [3].

Поскольку система является нелинейной, то необходимо определить условия отсутствия периодических режимов. Для этой цели используется метод Л.С. Гольдфарба, развитый в работах Я.З. Цыпкина и Ю.М. Коршунова применительно к нелинейным импульсным системам. Для получения условий отсутствия периодических режимов строятся их возможные границы. Упрощение анализа достигается использованием известного критерия абсолютной устойчивости САУ.

**Построение переходного процесса**

Для построения переходного процесса в системе удобно воспользоваться численным методом. В нелинейных непрерывных системах он обычно обеспечивает лишь приближенные решения, а для импульсных нелинейных систем во многих случаях дает точные решения. Для этого выводят рекуррентную формулу [3].

Преобразуем структуру ЭМТП к виду, показанному на рис. 3.



**Рис. 3**

Пользуясь обозначениями координат на нем, можно записать следующее уравнение:

$$F(q) - X(q) = K^*(q) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi[x(n)] e^{-qn}. \quad (10)$$

Так как информация в D-преобразовании функции времени при  $\varepsilon = 0$  содержится только в моменты времени  $\bar{t} = nT_y$ , то, следовательно, дан-

ное уравнение содержит неизвестную величину ошибки при  $\bar{t} = nT_y$ , где  $T_y$  – период выборки информации, а  $n$  – номер управляющего импульса. Поскольку импульсная передаточная функция представляет собой D-преобразование импульсной переходной функции приведенной непрерывной части, ее можно разложить в ряд по степеням:

$$K^*(q) = D\{\omega[n, 0]\} = g_0 + g_1 e^{-q} + g_2 e^{-2q} + \dots, \quad (11)$$

где  $g_k$  – ординаты импульсной переходной функции при  $\bar{t} = K$ .

Аналогично входную функцию, равную нулю при отрицательных значениях времени, также можно разложить в степенной ряд:

$$F(q) = F_0 + F_1 e^{-q} + F_2 e^{-2q} + F_3 e^{-3q} + \dots \quad (12)$$

Неизвестную функцию ошибки также представим степенным рядом:

$$X(q) = X_0 + X_1 e^{-q} + X_2 e^{-2q} + X_3 e^{-3q} + \dots, \quad (13)$$

где  $X_k$  – величина ошибки при  $\bar{t} = K$ .

При подстановке степенных рядов в исходное уравнение получим

$$\begin{aligned} & \left[ (F_0 - X_0) + (F_1 - X_1) e^{-q} + (F_2 - X_2) e^{-2q} + \dots \right] = \\ & = (g_0 + g_1 e^{-q} + g_2 e^{-2q} + \dots) (\Phi[X_0] + \\ & + \Phi[X_1] e^{-q} + \Phi[X_2] e^{-2q} + \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы удовлетворялось это уравнение, коэффициенты при соответствующих степенях  $e^q$  должны быть равны:

$$\begin{aligned} F_0 - X_0 &= g_0 \Phi[X_0]; \\ F_1 - X_1 &= g_0 \Phi[X_1] + g_1 \Phi[X_0]; \\ F_2 - X_2 &= g_0 \Phi[X_2] + g_1 \Phi[X_1] + g_2 \Phi[X_0]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$F_k - X_k = \sum_{n=0}^k g_n \Phi[X_{k-n}].$$

Поскольку  $g_0 = 0$ , то, очевидно:

$$\begin{aligned} X_0 &= F_0; \\ X_1 &= F_1 - g_1 \Phi[X_0]; \\ X_2 &= F_2 - g_1 \Phi[X_1] - g_2 \Phi[X_0]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$X_k = F_k - \sum_{n=0}^k g_n \Phi[X_{k-n}], \quad g_0 = 0.$$

Поскольку коэффициенты  $g_k$  сходятся к постоянному значению, придется брать большое число слагаемых для получения достаточно точного результата. Чтобы избежать этого, произведем вычитание двух последовательных ошибок. В этом случае получим следующий вид выражений, определяющих ошибки:

