УДК 517.521.8

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ГРОНУОЛЛА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ СУММИРУЕМОСТИ

Л.В. Матвеева[1]

Линейные методы суммирования позволяют аналитически продолжать функцию вне области сходимости степенного ряда. Для практики полезно знать оценку скорости сходимости полученной последовательности полиномов Гронуолла. В настоящей работе оценивается скорость сходимости на границе области суммирования.

Ключевые слова: методы суммирования, полиномы Гронуолла, скорость сходимости.

Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат. Тогда функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Обозначим n-ую частичную сумму этого ряда через $s_m^f = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, через S_f – множество особых точек функции $f(z)$ и через A_f – максимальную область, в которую продолжается $f(z)$. Частичную сумму ряда функции $\frac{1}{1-z}$ обозначим через $\sigma_n(z)$.

Определение. Линейный метод B, определяемый бесконечной матрицей $(b_{m,n})$, суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$ равномерно внутри области $D \subset \mathbb{C}$, если существует такой номер m_0, что для любого компакта $Q \subset D$ и для всех $m \ge m_0$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)$ равномерно сходятся к функции $f(z)$ на Q.

Определение. Область $U \subset A_f$ назовем *C*-областью функции $f(z)$, аналитичной в некоторой окрестности начала координат, если существует линейный метод, суммирующий последовательность $\{s_m^f(z)\}$ к $f(z)$ равномерно внутри U.

Естественно рассматривать такие линейные методы, максимальные *C*-области которых включают в себя круг сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

В работе [1] показано, что если метод $(b_{m,n})$ суммирует $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ к $1/(1-z)$ в некоторой области D, то можно описать область D_f, в которой этот метод будет суммировать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$. Поэтому изучение *C*-областей метода суммирования достаточно провести для геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Гронуолл в работе [4] описал широкий класс методов суммирования расходящихся рядов. Метод Гронуолла $\left[F(w); 1/(1-w)\right]$ задается отображающей функцией $F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \; (c_1 \ne 0)$ и весовой функцией $1/(1-w)$, и элементы его матрицы определяются по формулам

$$c_{m,n}^F = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{(1-F(w))F^n(w)}{(1-w)w^{m+1}} dw \; (m,n \ge 0),$$

где интегрирование ведется по γ – простому достаточно малому контуру вокруг начала координат. На отображающую функцию $F(w)$ в работе [1] накладываются три условия: 1) $F(w)$ анали-

[1] Матвеева Любовь Васильевна – кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: lvmatveeva@gmail.com

тична в замкнутом единичном круге $\overline{K}$, исключая, может быть, точку $w=1$, и однолистна в K; 2) $F(w)$ непрерывна в $\overline{K}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(K)\subseteq K$; 3) ряд Тейлора $F(w)$ абсолютно сходится при $w=1$.

Определение. Полином $P_m^F(z)=\sum_{n=0}^{m} c_{m,n}^F\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)$ будем называть m-м полиномом Гроноулла метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$.

Из условия $F(0)=0$ следует, что $c_{m,n}^F=0$ при $n>m$, поэтому степень m-го полинома Гроноулла не превосходит m. Область $T(F)$, ограниченную кусочно-гладкой кривой $\tau(F)=\{z:z=[F(e^{ix})]^{-1}, x\in[0;2\pi]\}$ назовем областью суммируемости метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$. Как доказано в работах [2] и [3] метод $\left[F(w);1/(1-w)\right]$ суммирует ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ к $1/(1-z)$ в области $T(F)$. Вне этой области последовательность $P_m^F(z)$ расходится. Условие $F(K)\subseteq K$ означает, что область суммируемости метода $\left[F(w);1/(1-w)\right]$ включает область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

В работе [2] рассматривается скорость сходимости полиномов Гроноулла в случае аналитической отображающей функции внутри области $T(F)$.

Легко видеть, что последовательность $P_m^F(z)$ не обязана сходится к $1/(1-z)$ на границе области $T(F)$. Для $F(w)=w$, например, последовательность $P_m^w(z)=\frac{1-z^m}{1-z}$ не сходится к $\frac{1}{1-z}$ ни для какого z, лежащего на границе области $T(F)$, равной единичному кругу. Тем не менее последовательность $\{P_m^w(z)\}$ ограничена для каждого $z\neq 1$. Аналогичный факт имеет место и в общем случае.

Теорема. Если отображающая функция $F(w)$ имеет ограниченное изменение на единичной окружности и ее производная не равна 0 на единичной окружности, то для каждого $z\in\tau(F)\setminus\{1\}$ последовательность $\{P_m^F(z)\}$ ограничена.

Доказательство. В работе [1] показано, что

$$P_m^F=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{(1-F(w))dw}{(1-zF(w))(1-w)w^{m+1}}.$$

Поэтому достаточно для оценки полинома $P_m^F(z)$ оценить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{(1-F(w))dw}{(1-zF(w))(1-w)w^{m+1}},$$

т.е. коэффициент при w^m в разложении в степенной ряд функции $\frac{1-F(w)}{(1-zF(w))(1-w)}$. Так как $z\in\tau(F)\setminus\{1\}$, то $z=1/F(w_0)$ для некоторого $w_0=e^{ix_0}$, где $x_0\in(0;2\pi)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(w)=\begin{cases}\dfrac{(1-F(w))(w_0-w)}{1-zF(w)}, \text{если } w\neq w_0,\\ \dfrac{(1-F(w))F(w_0)}{F'(w_0)}, \text{если } w=w_0.\end{cases}$$

Докажем, что степенной ряд функции $\varphi(w)$ абсолютно сходится при $w=1$. Выберем такое число $\beta>0$, что $x_0\in(\beta,2\pi-\beta)$. Так как функция $F(w)$ имеет ограниченное изменение на единичной окружности, то и $\mathrm{Re}\left(\varphi(e^{ix})\right)$, и $\mathrm{Im}\left(\varphi(e^{ix})\right)$ также имеют ограниченное изменение на отрезках $[0,\beta]$ и $[2\pi-\beta,2\pi]$ как дробно-рациональные функции от функций с ограниченным изменением. Так как $(1-zF(w))'_{w=w_0}=-zF'(w_0)\neq 0$, то функция $\frac{1-F(w)}{1-zF(w)}$ имеет в w_0 простой полюс, и функция $\varphi(w)$ аналитична в w_0. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Re}\left(\varphi(e^{ix})\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\varphi(e^{ix})\right)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[\beta,2\pi-\beta]$. Следовательно, $\mathrm{Re}\left(\varphi(e^{ix})\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\varphi(e^{ix})\right)$ имеют ограниченное изменение на всем отрезке $[0,2\pi]$ и по теореме Харди–Литлвуда степенной ряд $\varphi(w)$ абсолютно сходится при $w=1$. Представим функцию $\frac{1-F(w)}{(1-zF(w))(1-w)}$ в виде произведения $\varphi(w)$ на $\frac{1}{(w_0-w)(1-w)}$. Перемножим степенные ряды $\frac{1}{(w_0-w)}=\frac{1}{w_0}\sum_{k=0}^{\infty}w^k$ и $\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n$:

$$\frac{1}{(w_0-w)(1-w)}=\frac{1}{w_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{w_0^k}\right)w^n=\frac{1}{w_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{w_0^{n+1}}}{1-w_0}w^n .$$

Перемножим степенные ряды

$$\varphi(w)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nw^n \ \text{ и } \ \frac{1}{(w_0-w)(1-w)}=\frac{1}{w_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{w_0^{n+1}}}{1-w_0}w^n .$$

Получим

$$\frac{\varphi(w)}{(w_0-w)(1-w)}=\frac{1}{w_0-1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k-\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{w_0^{m+1-k}}\right)w^m .$$

Обозначим $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|=C$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{(1-F(w))dw}{(1-zF(w))(1-w)w^{m+1}}\right|=\left|\frac{1}{w_0-1}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k-\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{w_0^{m+1-k}}\right)\right|\le\frac{2c}{|w_0-1|} .$$

Таким образом, $\left|P_m^F(z)\right|\le\left|\frac{1}{1-z}\right|+\left|\frac{z}{1-z}\right|\frac{2C}{|w_0-1|}$. И правая часть выражения не зависит от m. Теорема доказана.

Литература

1. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла / Л.В. Матвеева // Исслед. по функцион. анализу: сб. науч. тр. – Свердловск: Ур. гос. ун-т. – 1978. – С. 49–64.

2. Матвеева, Л.В. Полиномы Гронуолла с аналитической отображающей функцией / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2009. – Т. 2. – С. 153–156.

3. Матвеева Л.В. Области равномерной сходимости и теорема Окада / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ: сб. науч. тр. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2011. – Т. 3. – С. 149–152.

4. Gronwall, T.H., Summation of series and conformal mapping / T.H. Gronwall // Ann. Math. – 1932. – Т. 33, № 2. – P. 101–117.

5. Birindelli, C. Contributo all’ analisi dei metodi di sommazione di Gronwall / C. Birindelli // Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo. – 1937. – V. 61. – P. 157–176.

Поступила в редакцию 2 октября 2012 г.

BEHAVIOR OF GRONWALL POLYNOMIALS ON THE BOUNDARY OF SUMMABILITY DOMAIN

L.V. Matveeva[1]

Linear summation methods can analytically continue the function outside the region of convergence of the power series. To practice is useful to know the rate of convergence obtained sequence of polynomials Gronwall. In this paper we estimated the rate of convergence on the boundary of the summation.

References

1. Matveeva L.V. *Issled. po funktsion. analizu: sb. nauch. tr.* Sverdlovsk: Ur. gos. un-t. 1978. pp. 49–64. (in Russ.).

2. Matveeva L.V. *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* Cheliabinsk: Izdatel'stvo YuUrGU. 2009. Vol. 2. pp. 153–156. (in Russ.).

3. Matveeva L.V. *Nauka YuUrGU: sb. nauch. tr.* Cheliabinsk: Izdatel'stvo YuUrGU. 2011. Vol. 3. pp. 149–152. (in Russ.).

4. Gronwall T.H. Summation of series and conformal mapping. *Ann. Math.* 1932. Vol. 33, no. 2. pp. 101–117.

5. Birindelli C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall. *Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo.* 1937. Vol. 61. pp. 157–176.

[1] Matveeva Liubov Vasilievna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: lvmatveeva@gmail.com