УДК 517.96

ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ РЕКУРСИВНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ТОПОЛОГИЕЙ МНОГОМЕРНОГО КУБА[1]

С.А. Иванов[2]

Получены критерии устойчивости дискретных нейронных сетей с топологией многомерного куба. Построены области устойчивости в пространстве параметров для таких сетей. Задача сводится к проблеме устойчивости матричных разностных уравнений высоких порядков с запаздыванием. Основным средством решения проблемы являются конусы устойчивости.

Ключевые слова: нейронные сети, разностные матричные уравнения, устойчивость разностных уравнений, многомерный куб.

Введение

Мы рассматриваем нейронные сети с топологией многомерного куба с одинаковыми запаздываниями во взаимодействии между нейронами в сети. Такие модели сетей используются при построении многопроцессорных вычислительных систем суперкомпьютеров [1].

Сеть с топологией n-мерного куба образуют нейроны с метками, являющимися n-мерными векторами компоненты, которых либо 0, либо 1. Два нейрона сети связаны тогда и только тогда, когда их метки отличаются только одной координатой. Связи для трехмерной сети изображены на рис. 1.

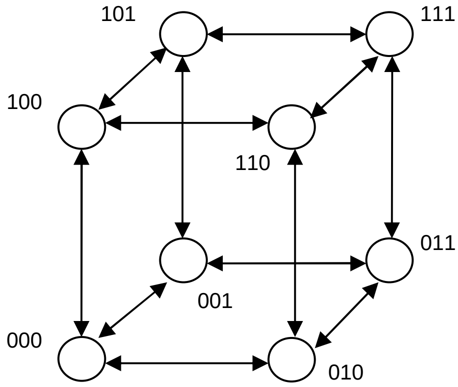

Рис. 1. Нейронная сеть с топологией трехмерного куба

В результате линеаризации вокруг стационарного решения уравнений нейронной сети с топологией n-мерного куба получается линейное матричное разностное уравнение

$$x_s = \gamma I x_{s-1} + Q_n x_{s-k},\ s = 1, 2\dots, \tag{1}$$

где x_s – вектор сигналов нейронов в момент s. Вектор x_s размерности 2^n характеризует отклонения сигналов нейронов от стационарных, I – единичная $2^n \times 2^n$ матрица, $\gamma(-1<\gamma<1)$ – коэффициент затухания колебаний нейронов, Q_n – матрица размера $2^n \times 2^n$, характеризующая взаимодействия между нейронами в сети, k – запаздывание во взаимодействии между нейронами.

Уравнение (1) принадлежит классу матричных разностных уравнений вида:

$$x_s = Ax_{s-1} + Bx_{s-k},\ s = 1, 2\dots, \tag{2}$$

которые обладают важным для нас свойством: матрицы A, B могут быть приведены к треугольному виду одним преобразованием. Поэтому мы имеем возможность применить метод конуса устойчивости [7] для устойчивости этих уравнений.

Пусть z_0 и z_1 – метки связанных между собой нейронов, и одна из координат z_0 равна 0, в то время как соответствующая координата метки z_1 равна 1. Обозначим силу воздействия нейрона с меткой z_0 на нейрон с меткой z_1 посредством a, а силу обратного воздействия посредством b. Тогда блочная $2^n \times 2^n$ матрица Q_n в (1) определяется рекуррентно равенствами:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix},\ Q_n = \begin{pmatrix} Q_{n-1} & bI \\ aI & Q_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

[1] Работа поддержана грантом Министерства образования и науки 1.1711.2011 и грантом для аспирантов Челябинского государственного педагогического университета.

[2] Иванов Сергей Александрович – аспирант, кафедра математического анализа, Челябинский государственный педагогический университет.
E-mail: ivanovlord@yandex.ru

Мы ставим задачу изучить область устойчивости системы (1) в пространстве параметров γ, a, b, k при разных значениях n.

Конус устойчивости для диагностирования устойчивости нейронных сетей

В работах [7, 8] введены конусы устойчивости для диагностирования устойчивости систем вида (2) с матрицами *A*, *B*, одновременно приводимыми к треугольному виду. Аналогичные конусы устойчивости для дифференциальных уравнений введены в [9]. Для решения задачи устойчивости нейронных сетей с топологией связей *n*-мерного куба нам понадобится техника конусов устойчивости, которую мы здесь изложим.

Определение 1. Конусом устойчивости для уравнения вида (2) для данного *k* мы называем множество точек $M = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$, такое что

$$u_1 + iu_2 = \exp(ik\omega) - h\exp(i(k-1)\omega), u_3 = h, \tag{4}$$

где параметры *h*, ω связаны соотношениями:

$$0 \le h \le \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}, -\frac{\pi}{k} \le \omega \le \frac{\pi}{k}. \tag{5}$$

Теорема 1 [7]. Пусть $A, B, S \in R^{2^n \times 2^n}$ и $S^{-1}AS = A_T, S^{-1}BS = B_T$, где A_T, B_T – треугольные матрицы с диагональными элементами λ_j, μ_j соответственно $(1 \le j \le 2^n)$. Построим точки $M = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ $(1 \le j \le 2^n)$ так, что

$$u_{1j} + iu_{2j} = \mu_j \exp(-ik \arg \lambda_j),\ u_{3j} = \left|\lambda_j\right|. \tag{6}$$

Тогда уравнение (2) асимптотически устойчиво, если и только если все точки M_j лежат внутри конуса устойчивости (4), (6) для данного k. Если некоторая точка M_j лежит вне конуса устойчивости, то уравнение (2) неустойчиво.

Теорема 1 сводит задачу диагностирования устойчивости системы (2) порядка $(2^n \times 2^n)$ к геометрической задаче в R^3: асимптотическая устойчивость системы равносильна условию, что все точки $M_j (1 \le j \le 2^n)$ лежат внутри конуса устойчивости (4), (6) для данного k.

Собственные значения матрицы Q_n

Теорема 2. Собственные числа $\mu_{nj} (1 \le j \le 2^n)$ матрицы Q_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mu_{n+1,j} = \begin{cases} \mu_{nj} + \sqrt{ab}, если 1 \le j \le 2^n \\ \mu_{nj} - \sqrt{ab}, если 2^n + 1 \le j \le 2^{n+1} \end{cases}, \tag{7}$$

где $\mu_{11} = \sqrt{ab}, \mu_{12} = -\sqrt{ab}.$

Доказательство. Очевидно, $\mu_{11} = \sqrt{ab}$, $\mu_{12} = -\sqrt{ab}$. Ввиду (3) характеристический многочлен $f_n(\mu)$ для (1) имеет вид

$$f_n(\mu) = \det((\mu I - Q_{n-1})^2 - abI). \tag{8}$$

Из (7), (8) следует

$$f_{n+1}(\mu) = \det((\mu I - Q_n)^2 - abI) = \det(Q_n - I(\mu - \sqrt{ab}))\det(Q_n - I(\mu + \sqrt{ab})).$$

Ввиду (9) уравнение $f_{n+1}(\mu) = 0$ распадается на два уравнения: $f_n(\mu - \sqrt{ab}) = 0$, $f_n(\mu + \sqrt{ab}) = 0$. Теорема 2 доказана.

Диагностирование устойчивости сети с топологией многомерного куба

Определение 2. Овалом устойчивости для уравнений вида (2), для запаздывания $k > 1$ и параметра γ мы называем кривую $M(\omega) = (u_1(\omega), u_2(\omega))$ такую, что

$$u_1(\omega) + iu_2(\omega) = \exp(ik\omega) - \left|\gamma\right| \exp(i(k-1)\omega),$$

где $\omega \in (-\omega_1, \omega_1)$, ω_1 – есть наименьший положительный корень уравнения

$$|\gamma| = \frac{\sin k\omega}{\sin(k-1)\omega}.$$

Овал устойчивости для данного запаздывания k и данного γ – это сечение конуса устойчивости (см. определение 1) плоскостью $u_3 = |\gamma|$. Овалы устойчивости при $0 \le \gamma \le 1$ рассматривала Е. Каслик [4]. Благодаря теоремам 1, 2 для диагностирования устойчивости уравнения (1) достаточно проверить одну точку $M(u_1, u_2) = u_1 + iu_2 = n\sqrt{ab}$. Поэтому имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть даны произвольные $n, k \in Z_+, k > 1$. Пусть $0 \le \gamma \le 1$. Построим в R^2 овал устойчивости (см. определение 2) для данных k, γ. Построим точку $M = (u_1, u_2) \in R^2$ так, что

$$u_1 + iu_2 = n\sqrt{ab}.$$

Если точка M лежит внутри овала устойчивости, то система (1) асимптотически устойчива. В противном случае система (1) неустойчива.

Теорема 4. Если $0 < ab < \left(\frac{|1-\gamma|}{n}\right)^2$ или $0 > ab > -\left(\frac{F(\gamma)}{n}\right)^2$, то система (1) асимптотически устойчива. Здесь $F(\gamma) = \frac{\sin \omega(\gamma)}{\cos(k-1)\omega(\gamma)}$, где $\omega(\gamma)$ есть наименьший неотрицательный корень уравнения $|\gamma| = \frac{\sin k\omega}{\cos(k-1)\omega}$.

Если число ab находится вне границ указанных интервалов, то система (1) неустойчива.

Области устойчивости системы (1) отражены на рис. 2.

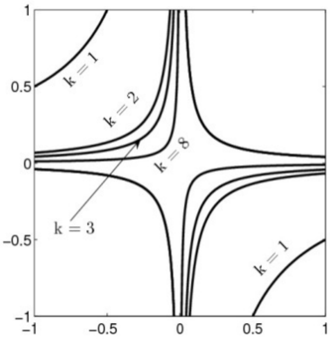

Рис. 2. Область устойчивости системы (1) в плоскости (a,b) при фиксированных $\gamma = 0,4, n = 3$ и переменном запаздывании k

Литература

1. Gonzalez, A. Executing algorithms with hypercube topology on torus multicomputers / A. Gonzalez, M. Valero-Garcia, L. Diaz de Cerio // IEEE Transactions on parallel and distributed systems – 1995. – V. 6, № 8 – P. 803–814.

2. Yuan, Y. Stability and synchronization ring of identical cells with delayed coupling / Y. Yuan, S.A. Campbell // J. of Dynamics and Differential Equations. – 2004. – V. 16. – P. 709–744.

3. Kaslik, E. Dynamics of a discrete-time bidirectional ring of neurons with delay / E. Kaslik // Proceedings of Int. Joint Conf. on neural networks, Atlanta, Georgia, USA, June 14–19. – IEEE Computer society press, 2009. – P. 1539–1546.

4. Kaslik, E. Stability results for a class of difference systems with delay / E. Kaslik // Advances in Difference Equations. – 2009. – P. 1–13. article ID 938492.

5. Botelho, F. Global analysis of planar networks / F. Botelho, V. Gaiko // Nonlinear Analysis. – 2006. – Vol. 64. – Issue 5. – P. 1002–1011.

6. Kokhlova, T.N. Stability of a ring and linear neural networks with a large number of neurons / T.N. Kokhlova, M.M. Kipnis // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – P. 1–14.

7. Ivanov, S.A. The stability cone for a difference matrix equation with two delays / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // ISRN J. Applied Mathematics. – 2011. – P. 1–19. article ID 910936.

8. Kipnis, M.M. The stability cone for a matrix delay difference equation / M.M. Kipnis, V.V. Malygina // International J. of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2011. – P. 1–15. article ID 860326.

9. Kokhlova, T.N The stability cone for a delay differential matrix equation / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // Applied Math. Lett. – 2011 – V. 24 – P. 742–745.

Поступила в редакцию 7 мая 2012 г.

THE STABILITY DOMAIN IN THE PARAMETERS SPACE OF RECURSIVE NEURAL NETWORKS WITH HYPERCUBE TOPOLOGY

***S.A. Ivanov*[1]**

The stability conditions are described for the discrete neural networks. The stability domains in the parameters space are constructed. The problem is reduced to the stability problem of finite-difference matrix equations of higher order with delay. The main method to solve the problem is the stability cone.

Keywords: neural networks, finite-difference matrix equations, finite-difference equations stability, hypercube.

References

1. Gonzalez A., Valero-Garcia M., Diaz de Cerio L. Executing algorithms with hypercube topology on torus multicomputers. *IEEE Transactions on parallel and distributed systems*. 1995. Vol. 6. no. 8. pp. 803–814.

2. Yuan Y., Campbell S.A. Stability and synchronization ring of identical cells with delayed coupling. *J. of Dynamics and Differential Equations*. 2004. Vol. 16. pp. 709–744.

3. Kaslik E. Dynamics of a discrete-time bidirectional ring of neurons with delay. *Proceedings of Int. Joint Conf. on neural networks, Atlanta, Georgia, USA, June 14–19.* IEEE Computer society press, 2009. pp. 1539–1546.

4. Kaslik E. Stability results for a class of difference systems with delay. *Advances in Difference Equations*. 2009. pp. 1–13. Article ID 938492.

5. Botelho F., Gaiko V. Global analysis of planar networks. *Nonlinear Analysis.* 2006. Vol. 64. Issue 5. pp. 1002–1011.

6. Kokhlova T.N., Kipnis M.M. Stability of a ring and linear neural networks with a large number of neurons. *Applied Mathematics and Computation*. 2012. pp. 1–14.

7. Ivanov S.A., Kipnis M.M., Malygina V.V. The stabiliry cone for a difference matrix equation with two delays. *ISRN J. Applied Mathematics.* 2011. pp. 1–19. Article ID 910936.

8. Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a matrix delay difference equation. *International J. of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2011. pp. 1–15. Article ID 860326.

9. Khokhlova T.N., Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a delay differential matrix equation. *Applied Math. Lett.* 2011. Vol. 24. pp. 742–745.

[1] Ivanov Sergey Alexandrovich is Post-graduate Student, Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State Pedagogical University.
E-mail: ivanovlord@yandex.ru