УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ И С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Д.В. Гущин[1]

Найдены оптимальные управления в дифференциальной игре, в которой управляемая точка переменного состава осуществляет встречу в заданный момент времени с точкой, управляемое движение которой происходит с ограниченной по величине скоростью.

Ключевые слова: дифференциальная игра, оптимальное управление.

1. Введение

В монографии [1] рассматривается дифференциальная игра «изотропные ракеты», в которой первый игрок управляет ограниченной по величине силой, приложенной к движущейся материальной точке. Второй игрок управляет ограниченной по величине скоростью другой точки. В данной работе первый игрок, управляя реактивной силой точки переменного состава, стремится осуществить встречу со второй точкой в заданный момент времени, расходуя при этом как можно меньше ресурсов.

2. Постановка задачи

Движение точки переменного состава описывается уравнением Мещерского [2, с. 25] $\ddot{x} = -C + w\dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)},\ x \in R^n, C = \text{const}$. Считаем, что норма $\| w \|$ относительной скорости $w \in R^n$ отделяющихся частиц является постоянной, а тяга ограничена заданным числом $\gamma > 0$, т.е. $-\| w \| \dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)} \le \gamma.$ Второй игрок управляет точкой, которая движется с ограниченной скоростью $\| \dot{y} \| \le b.$ Цель первого игрока заключается в том, чтобы осуществить в заданный момент времени p встречу $\| y(p) - x(p) \| \le \varepsilon, (\varepsilon > 0)$ и израсходовать как можно меньше топлива.

Обозначим $z = y - x - (p-t)\dot{x} - C\dfrac{(p-t)^2}{2}, u = \dfrac{w}{\gamma}\dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)}, v = \dfrac{1}{b}\dot{y}.$ Получим эквивалентную дифференциальную игру

$$\dot{z} = -(p-t)\gamma u + bv, \| u \| \le 1, \| v \| \le 1, \| z(p) \| \le \varepsilon, \int_{t_0}^{p} \| u(t) \| \, dt \to \min_u . \qquad (1)$$

3. Построение оптимальных управлений

В работе [3] показано, что для дифференциальной игры вида (1) оптимальные управления игроков имеют вид $u_0(t,z) = \varphi_0(t) w(z), v_0(t,z) = w(z),$ где $w(z) = \dfrac{z}{\| z \|}$ при $z \ne 0$ и любое $\| w \| = 1$ при $z = 0.$

Достаточные условия для нахождения функции $\varphi_0(t)$ из работы [3] для рассматриваемого примера принимают вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 1 < (\psi(t) + \lambda)(p-t)\gamma, \\ 0 \text{ при } 1 > (\psi(t) + \lambda)(p-t)\gamma, \\ \forall \varphi_0 \in [0,1] \text{ при } 1 = (\psi(t) + \lambda)(p-t)\gamma. \end{cases} . \qquad (2)$$

Здесь число $\lambda \ge 0$ и неубывающая функция $\psi(t), \psi(0) = 0$ удовлетворяют условиям:

[1] Гущин Денис Васильевич – математик учебно-научной лаборатории методов оптимизации и моделирования игровых ситуаций, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет.
E-mail: off_side@mail.ru

$$\int_t^p (b-(p-r)\gamma\varphi_0(r))dr \le \varepsilon \ \text{ при } t_0 \le t \le p; \int_{t_0}^p (b-(p-r)\gamma\varphi_0(r))dr + \| z_0 \| \le \varepsilon; \tag{3}$$

$$\int_{t_0}^p \psi(r)(b-(p-r)\gamma\varphi_0(r))dr = \psi(p)\varepsilon; \ \lambda\left(\int_{t_0}^p (b-(p-r)\gamma\varphi_0(r))dr + \| z_0 \| - \varepsilon\right) = 0.$$

Обозначим $g(t) = (p-t)b - \frac{\gamma}{2}(p-t)^2, G(t) = \max_{t \le r \le p} g(r)$. Условия совместности первых двух связей в (3) принимают вид $G(t_0) \le \varepsilon, \| z_0 \| \le \varepsilon - g(t_0)$.

Приведем вид функции $\varphi_0(t)$ в зависимости от начальных условий $\| z_0 \|$ и $t_0 < p$.

Случай 1. Пусть $\frac{\varepsilon}{b} \ge \frac{b}{\gamma}$. Разобьем полуплоскость с координатами $t, \| z \|$ на три области (рис. 1).

Если начальное условие $(t_0, \| z_0 \|) \in I$, то $\varphi_0(t) = 0$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in II$, то $\varphi_0(t) = 1$ при $t_0 \le t \le q_1$, $\varphi_0(t) = \frac{b}{\gamma(p-t)}$ при $q_1 \le t \le p - \frac{\varepsilon}{b}$ и $\varphi_0(t) = 0$ при $p - \frac{\varepsilon}{b} \le t \le p$. Здесь $q_1 = p - \frac{b}{\gamma} - \sqrt{\frac{2}{\gamma}\left(\frac{b^2}{2\gamma} - \| z_0 \| - g(t_0)\right)}$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in III$, то

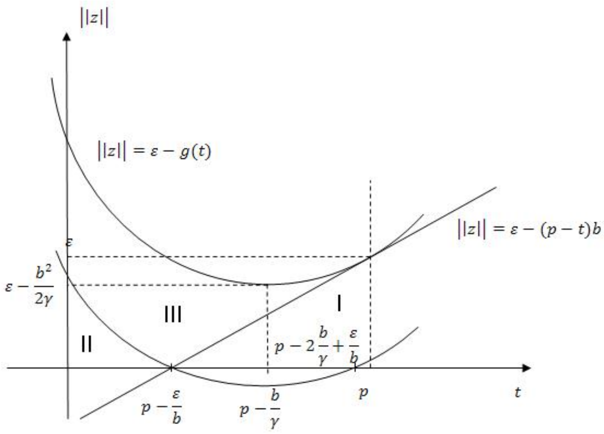

Рис. 1

$$\varphi_0(t) = 1 \text{ при } t_0 \le t \le q_2, \varphi_0(t) = 0 \text{ при } q_2 \le t \le p,\ q_2 = p - \sqrt{\frac{2}{\gamma}(\varepsilon - \| z_0 \| - g(t_0))}. \tag{4}$$

Случай 2. Пусть $\frac{b}{2\gamma} \ge \frac{\varepsilon}{b}$. Тогда из условий совместности следует, что начальное состояние принадлежит либо области I, либо области II из рис. 2.

Если $(t_0, \| z_0 \|) \in I$, то $\varphi_0(t) = 0$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in II$, то $\varphi_0(t)$ задается формулой (4).

Случай 3. Пусть $\frac{b}{\gamma} > \frac{\varepsilon}{b} > \frac{b}{2\gamma}$. Полуплоскость $(t, \| z \|)$ разделим на четыре области (рис. 3).

Если начальное условие $(t_0, \| z_0 \|) \in I$, то $\varphi_0(t) = 0$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in II$, то $\varphi_0(t) = 1$ при $t_0 \le t \le q_3$, $\varphi_0(t) = \frac{b}{\gamma(p-t)}$

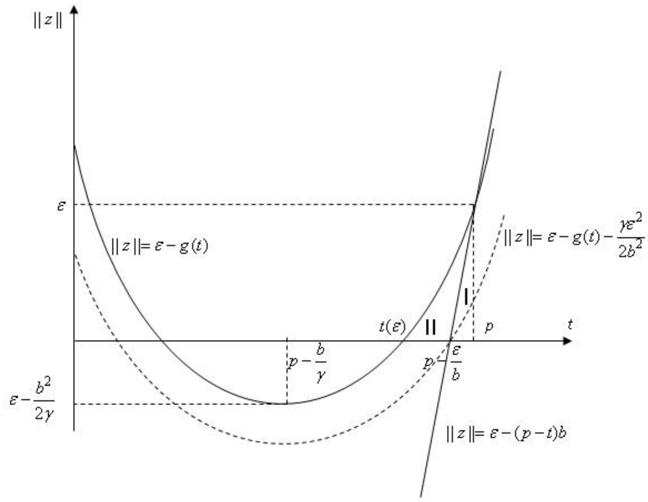

Рис. 2

при $q_3 \le t \le p - \frac{b}{\gamma}$ и $\varphi_0(t) = 0$ при $p - \frac{b}{\gamma} \le t \le p$. Здесь $q_3 = p - \frac{b}{\gamma} - \sqrt{\frac{2}{\gamma}\left(\varepsilon - \frac{b^2}{2\gamma} - \| z_0 \| - g(t_0)\right)}$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in III$, то $\varphi_0(t) = 1$ при $t_0 \le t \le q_4$, $\varphi_0(t) = \frac{b}{\gamma(p-t)}$ при $q_4 \le t \le p - \frac{b}{\gamma}$, $\varphi_0(t) = 1$ при

$p - \frac{b}{\gamma} \le t \le \tau,$ и $\varphi_0(t) = 0$ при $\tau \le t \le p.$ Здесь $q_4 = p - \frac{b}{\gamma} - \sqrt{\frac{2}{\gamma}\left(\frac{b^2}{2\gamma} - \| z_0 \| - g(t_0)\right)}$ и

$\tau = p - \sqrt{\frac{2}{\gamma}(\varepsilon - \frac{b^2}{2\gamma})}$. Если $(t_0, \| z_0 \|) \in IV$, то $\varphi_0(t)$ задается формулой (4).

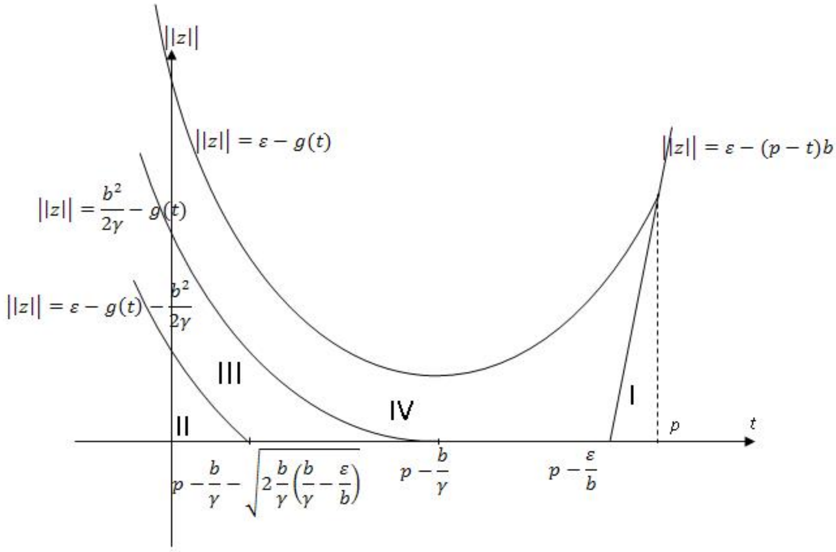

Рис. 3

Литература

1. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
2. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 175 с.
3. Ухоботов, В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой / В.И. Ухоботов, Д.В. Гущин // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 251–258.

Поступила в редакцию 28 сентября 2012 г.

ABOUT ONE DIFFERENTIAL GAME WITH FIXED TIME OF THE TERMINATION AND WITH THE INTEGRATED PRICE

***D.V. Gushchin*[1]**

Optimal controls are founded in differential games where the controlled point with variable structure meets another point on a fixed time. The controlled movement of the second point has a limited speed.

Keywords: differential game, optimal control.

References

1. Aizeks R. *Differentsial'nye igry* (Differential Games). Moscow: Mir, 1967. 479 p. (in Russ.).
2. Krasovskii N.N. *Teoriia upravleniia dvizheniem* (The Theory of Motion Control). Moscow: Nauka, 1968. 175 pp.
3. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2011. Vol. 17, no. 1. pp. 251–258.

[1] Gushchin Denis Vasilevich is mathematician on optimization methods and modeling of game situation scientific laboratory, Theory of Control and Optimization Department, Chelyabinsk State University.
E-mail: off_side@mail.ru