

# О РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

*Н.М. Япарова*<sup>1</sup>

Рассмотрены некоторые задачи тепловой диагностики, сводящиеся к обобщенной задаче, для решения которой был использован метод проекционной регуляризации. Построен алгоритм численного решения задачи. Полученные результаты проверены на модельных примерах.

*Ключевые слова:* метод решения операторных уравнений, метод регуляризации, метод проекционной регуляризации, уравнение теплопроводности, обратные задачи теплопроводности.

При экспериментальном исследовании нестационарных процессов тепломассообмена, возникает необходимость в решении обратных граничных задач теплопроводности. К таким задачам относится задача об определении плотности потоков жидкости и газов к телу, возникающие при взаимодействии этих потоков с твердыми телами, а также задача об определении границы твердой и жидкой фаз потока. Как правило, эти задачи являются неустойчивыми относительно погрешности исходных данных. Для решения подобного рода задач используют методы теории регуляризации [1–5]. Одним из таких методов является метод проекционной регуляризации.

## 1. Метод проекционной регуляризации. Постановка задачи и основные определения

Пусть  $H$  – гильбертово пространство.  $A: H \rightarrow H$  линейный, инъективный, ограниченный оператор. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \quad u, f \in H. \quad (1)$$

Известно, что при некотором  $f = f_0$  существует точное решение  $u_0 \in M_r$ , где  $M_r \subset H$ . Но вместо  $f_0$  известны некоторые приближения  $f_\delta$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$ .

Требуется по исходным данным задачи  $M_r$ ,  $f_\delta$  и  $\delta$  построить приближенное решение  $u_\delta$  для уравнения (1) и оценить его уклонение от точного.

Определим  $M_r$  следующим образом. Пусть оператор  $A_1 = A^*A$ , а  $Sp(A_1) = [0, \|A\|^2]$ . Рассмотрим  $S_r = \{v: v \in H, \|v\| \leq r\}$  и линейный, ограниченный оператор  $B: H \rightarrow H$  такой, что для оператора  $B_1 = BB^*$  выполнено соотношение

$$B_1^{1/2} = G(A_1^{1/2}), \quad (2)$$

где функция  $G(\sigma)$  – непрерывна, строго возрастает на  $[0, \|A\|]$  и  $G(0) = 0$ , тогда  $M_r = BS_r$ .

**Определение 1.** Семейство непрерывных операторов  $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$  называют методом решения уравнения (1) на множестве  $M_r$ , если  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$  оператор  $T_\delta: H \rightarrow H$  и при  $\delta \rightarrow 0$

$$T_\delta f_\delta \rightarrow u_0$$

равномерно на множестве  $M_r$  при условии, что  $\|f_\delta - Au_0\| \leq \delta$ .

**Определение 2.** Элемент  $u_\delta = T_\delta f_\delta$  называют регуляризованным решением, а  $M_r$  – классом равномерной регуляризации.

Метод проекционной регуляризации, следуя [6], основан на том, что регуляризующее семейство операторов  $\{P_\alpha | \alpha \in (0, \|A\|)\}$  определено формулой:

$$P_\alpha f = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma^2} dE_\sigma A^* f, \quad f \in H, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Япарова Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: ddjy@math.susu.ac.ru

где  $\{ E_\sigma \mid \sigma \in [0, \|A\|] \}$  – спектральное разложение  $E$ , порожденное оператором  $A_1^{1/2}$ .

В качестве параметра регуляризации  $\alpha$  выбирается одно из решений уравнения

$$\|Au_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 = 9\|A\|^2 \delta^2. \quad (4)$$

**Лемма 1.** Если  $\|f_\delta\| > 3\|A\|\delta$ , то уравнение (4) имеет решение.

Заметим, что уравнение (4) может иметь множество решений. Этот факт не оказывает влияние на точность приближенного решения уравнения (1).

**Лемма 2.** Пусть семейство операторов  $\{ P_\alpha \mid \alpha \in (0, \|A\|] \}$  определено формулой (4), тогда при  $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$  и  $f_n \rightarrow f_0$  имеет место  $P_{\alpha_n}(f_n) \rightarrow P_{\alpha_0}(f_0)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство лемм 1 и 2 приведено в [6].

При использовании предложенного подхода к построению метода проекционной регуляризации приближенное решение уравнения (1) будет определено формулой

$$u_{\bar{\alpha}} = \hat{T}_\delta f_\delta = \begin{cases} P_{\bar{\alpha}} f_\delta & \text{при } \|f_\delta\| > 3\|A\|\delta, \\ 0 & \text{при } \|f_\delta\| \leq 3\|A\|\delta, \end{cases} \quad (5)$$

где оператор  $P_\alpha$  задан формулой (3), а  $\bar{\alpha}$  – одно из решений уравнения (4).

Имеют место следующие результаты [6].

**Теорема 1.** Оператор  $\hat{T}_\delta$ , определенный в (5), непрерывен на всем пространстве  $H$ .

Из леммы 2 и теоремы 1 следует, что семейство операторов  $\{ \hat{T}_\delta : \delta \in (0, \delta_0] \}$ , удовлетворяющее (5), будет являться методом решения уравнения (1) в смысле определения 1.

**Теорема 2.** Пусть  $u_0 \in M_r$ ,  $\bar{\alpha}$  – решение уравнения (4), а функция  $G(\sigma)$  определяет соотношение (2), тогда

$$\|\hat{T}_\delta f_\delta - u_0\| \leq 6\|A\| r G(\bar{\alpha}(\delta)).$$

В статье метод проекционной регуляризации был применен для решения обобщенной обратной задачи теплопроводности.

## 2. Обратная задача тепловой диагностики

Многие задачи тепловой диагностики сводятся к решению задачи о восстановлении функции  $u(x, t)$  – функции температуры, зависящей от времени  $t$  на одном из концов стержня единичной длины. Известно, что стержень имеет теплоизолированную боковую поверхность и вблизи одного из концов температура равна  $f(t)$ , а температура на другом конце и начальная температура равны 0. Следуя [7], математическая модель этой обратной задачи имеет вид:

$$u'_t = u''_{xx}, \quad x \in (0, 1), t \geq 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad x \in (0, 1), t \geq 0, \quad (7)$$

$$u(x_0, t) = f(t), \quad x_0 \in (0, 1), t \geq 0. \quad (8)$$

В этой задаче необходимо восстановить граничное значение  $u(1, t) = u(t)$  при  $t \geq 0$ .

Известно, что при некотором  $f(t) = f_0(t)$  существует точное решение задачи (6)–(8)  $u_0(t) \in W_2^1([0, \infty))$ , для которого справедливы следующие соотношения:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad (9)$$

$$u''(0, t) \in L_1([0, a]) \text{ при } \forall a > 0. \quad (10)$$

Но вместо  $f_0(t)$  известны приближения  $f_\delta(t)$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\|f_\delta(t) - f(t)_0\| \leq \delta$ . Требуется по  $f_\delta(t)$  и  $\delta$  построить приближенное решение  $u_\delta(t)$  для задачи (1)–(3).

Полученная задача будет неустойчивой относительно приближений  $f_\delta(t)$ , так как небольшие погрешности функции  $f_0(t)$  оказывают значительное влияние на решение задачи. Поэтому нашей целью будет построение приближенного решения  $u_\delta(t)$ , близкого в некотором смысле к точному. Для построения такого решения используют методы теории регуляризации.

### 3. Обратная задача тепломассообмена

Другим видом задач теплопроводности является задача, состоящая в определении неизвестного теплового режима, обеспечивающего заданный закон изменения границы раздела жидкой и твердой фазы в среде. Один из возможных подходов к решению этой задачи был предложен в [3].

Пусть  $T(y, t)$  – тепловая функция, характеризующая этот режим, зависящая от времени  $t$  и переменной  $y \in [0; h(t)]$ , где  $h(t)$  – непрерывная, ограниченная, строго возрастающая функция, описывающая закон изменения границы раздела,  $h(0) = y_0 > 0$ , тогда, следуя [8] задачу тепломассообмена можно сформулировать следующим образом:

$$T'_t = T''_{yy}, \quad y \in (0, h(t)), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$T(y, 0) = z(y), \quad y \in (0, y_0) \quad (12)$$

$$T(h(t), t) = 0, \quad T'_t(h(t), t) = s(t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Необходимо по этим данным восстановить граничное значение  $T(0, t) = T_0(t)$  при  $t \geq 0$ .

Следуя [8] получим, что в задаче Стефана граница  $h(t)$  определяется формулой

$$\frac{dh(t)}{dt} = -ks(t),$$

где  $k > 0$  – известная константа. Тогда функции  $h(t)$  и  $s(t)$  связаны соотношением

$$h(t) = y_0 - k \int_0^t s(\tau) d\tau.$$

Полученная задача является задачей с подвижной границей, кроме того, она неустойчива относительно возможных погрешностей функций  $h(t)$  и  $s(t)$ , поэтому для решения этой задачи используются методы построения регуляризованного решения, устойчивого относительно погрешностей.

### 4. Сведение задач тепловой диагностики и тепломассообмена к обобщенной задаче

Решение задач тепловой диагностики и тепломассообмена будем осуществлять в несколько этапов. На первом эти задачи сводятся к обобщенной задаче с постоянной границей. На втором этапе для обобщенной задачи строится регуляризованное решение.

Сведем задачу (6)–(8) к обобщенной. Рассмотрим функцию  $g(t)$  такую, что

$$g(t) = u'_x(0, t) = \frac{1}{x_0} \left( f(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\pi^2 n^2 (t-\tau)} f'(\tau) d\tau \right).$$

Так как искомая функция  $u(t) = u(1, t)$  удовлетворяет условиям (9)–(10), то, заменив при точном значении  $f_0(t)$  условие (8) на условие  $u'_x(0, t) = g_0(t)$ , а при приближенном значении  $f_\delta(t)$  на  $g_\delta(t)$ , и используя выкладки, аналогичные приведенным в работе [7], получим, что для функций  $g_\delta(t)$  и  $g_0(t)$  выполнено  $\|g_\delta - g_0\| \leq \delta$ .

Таким образом, получим следующую задачу с постоянной границей:

$$u'_t = u''_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0,$$

$$u'_x(0, t) = g(t) \quad t \geq 0,$$

в которой необходимо найти граничное значение функции  $u(1, t)$  при  $t \geq 0$  по приближенно заданным значениям  $g_\delta(t)$  таким, что  $\|g_\delta - g_0\| \leq \delta$ .

Теперь сведем задачу тепломассообмена (11)–(13) к обобщенной задаче с постоянной границей. Для этого выполним замену переменных  $x = y/h(t)$ . Тогда  $T(y, t) = T(h(t) \cdot x, t) = V(x, t)$ , а при  $t = 0$  получим, что  $T(y_0 \cdot x, 0) = z(y_0 \cdot x)$  будет соответствовать функция  $g(x)$  и уравнение (11) примет вид:

$$h^2(t) \cdot V'_t = V''_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0,$$

а условия (12)–(13) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} V(x,0) &= g(x), \quad x \in (0,1), \\ V(1,t) &= 0, \quad V_t'(1,t) = h(t)s(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

После выполнения предложенной замены искомой граничной функции  $u(1,t)$  будет соответствовать функция  $V(0,t) = V_0(t)$  при  $t \geq 0$ .

Выполним еще одну замену переменных, положив  $\vartheta = b(t) = \int_0^t \frac{1}{h^2(\tau)} d\tau$ , тогда  $V(x,t)$  примет вид  $u_1(x,s) = V(x, b^{-1}(\vartheta))$ , а задача (11)–(13) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial^2 u_1(x, \vartheta)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad \vartheta \geq 0, \\ u_1(x, 0) &= g(x), \quad x \in (0,1), \\ u_1(1, \vartheta) &= 0, \quad \frac{\partial u_1(1, \vartheta)}{\partial \vartheta} = h(b^{-1}(\vartheta)) \cdot s(b^{-1}(\vartheta)), \quad \vartheta \geq 0. \end{aligned}$$

Если дополнительно известно, что

$$z(0) = z(y_0) = 0, \quad z(y_0 \cdot x) \in C^2[0,1], \quad (14)$$

то для построения решения можем использовать решение вспомогательной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial^2 u_2(x, \vartheta)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad \vartheta \geq 0, \\ u_2(x, 0) &= g(x), \quad x \in (0,1), \quad u_2(0, \vartheta) = u_2(1, \vartheta) = 0, \quad \vartheta \geq 0. \end{aligned}$$

Эта задача имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$u_2(x, \vartheta) = 2 \sum_{i=1}^n e^{-\pi^2 n^2 \vartheta} \sin \pi n x \cdot \int_0^x g(\xi) \sin \pi n \xi d\xi,$$

Отсюда следует, что будет справедливо утверждение

$$\frac{\partial u_2(x, \vartheta)}{\partial x} = \eta(\vartheta) = \sum_{i=1}^n e^{-\pi^2 n^2 \vartheta} \left( \pi n \cos \pi n x \cdot \int_0^x g(\xi) \sin \pi n \xi d\xi - g(x) \sin^2 \pi n x \right),$$

тогда, учитывая (14), получим, что  $\exists c > 0$  такое, что  $\forall \vartheta \geq 0$  выполнено  $\left| \frac{\partial u_2(1, \vartheta)}{\partial x} \right| \leq \frac{c}{e^\vartheta}$ .

Окончательно в качестве функции  $u(x, \vartheta)$  возьмем функцию  $u(x, \vartheta) = u_1(x, \vartheta) - u_2(1, \vartheta)$ , которая будет являться решением задачи:

$$\begin{aligned} u'_\vartheta &= u''_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad \vartheta \geq 0, \\ u(x, 0) &= g(x), \quad u(1, \vartheta) = 0, \\ u'_x(1, t) &= f(\vartheta), \quad \vartheta \geq 0, \end{aligned}$$

где  $f(\vartheta) = h(b^{-1}(\vartheta)) \cdot s(b^{-1}(\vartheta)) - \eta(\vartheta)$ . Граничное значение  $u(0, \vartheta)$  подлежит определению. Таким образом, исходная задача была сведена к обобщенной задаче с постоянной границей.

## 5. Использование метода проекционной регуляризации для решения обобщенной задачи в пространстве $W_2^1([0, \infty))$

Рассмотрим обобщенную задачу:

$$\begin{aligned} u'_t &= u''_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(0, t) = 0, \quad x \in (0,1), \quad t \geq 0, \\ u'_x(0, t) &= g(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В этой задаче необходимо найти граничное значение функции  $u(1, t)$  при  $t \geq 0$ . Предполагается, что при  $g(t) = g_0(t)$  существует точное решение  $u_0(t) \in W_2^1([0, \infty))$  такое, что при некотором  $T > 0$  выполнено  $u_0(t) = 0$  для  $t \geq T$ .

Вместо точного значения  $g_0$  известны  $g_\delta$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\|g_\delta - g_0\| \leq \delta$ . Требуется построить приближенное решение  $u_\delta$  уравнения (15).

Если известно, что решение прямой задачи удовлетворяет условиям

$$u(x, t), u'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap L_2([0, 1] \times [0, \infty)),$$

$$u'_t(x, t), u''_{xx}(x, t) \in L_2([0, 1] \times [0, \infty))$$

и для функции  $u(t) \in W_2^1([0, \infty))$  выполнено  $\|u(t)\|_{W_2^1([0, \infty))} \leq r$ , то в этой ситуации для решения обобщенной задачи можем применить преобразование Фурье по переменной  $t$ , а затем использовать метод проекционной регуляризации.

Будем искать приближенное решение с помощью метода проекционной регуляризации. Для этого найдем операторное изображение задачи (15), применяя преобразование Фурье  $F_t$  по переменной  $t$ . Получим, что операторное изображение этой задачи имеет вид:

$$i\lambda \tilde{u}(x, \lambda) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x, \lambda), \quad x \in (0, 1), \quad \lambda \in R, \tag{16}$$

$$\tilde{u}(0, \lambda) = 0, \quad \tilde{u}'_x(0, \lambda) = \tilde{g}_\delta(\lambda),$$

где  $\tilde{u}(x, \lambda) = F_t(u(x, t))$ , а  $\tilde{g}_\delta(\lambda) = F_t(g_\delta(t))$ .

Решая задачу (16), получим, что искомая функция  $\tilde{u}(1, \lambda)$  может быть представлена в виде

$$\tilde{u}(1, \lambda) = \frac{2 \operatorname{sh}(\mu_0 \sqrt{\lambda})}{\mu_0 \sqrt{\lambda}} \tilde{g}_\delta(\lambda), \tag{17}$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ .

Для построения приближенного решения используем метод проекционной регуляризации, регуляризовав исходные данные следующим образом.

В качестве параметра регуляризации  $\bar{\alpha}(\delta)$  при  $\|g_\delta\|_{L_2} > 3\delta$  возьмем решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{-\bar{\alpha}(\delta)} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\bar{\alpha}(\delta)\infty}^{+\infty} |\tilde{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda = 9\delta^2. \tag{18}$$

Тогда при  $\|g_\delta\|_{L_2} > 3\delta$  функция  $\tilde{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta))$  будет удовлетворять соотношению

$$\tilde{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)) = \begin{cases} \tilde{g}_\delta(\lambda) & , \quad |\lambda| \leq \bar{\alpha}(\delta) \\ 0 & , \quad |\lambda| > \bar{\alpha}(\delta) \end{cases},$$

а функция  $\tilde{u}(1, \lambda)$ , определенная (18), примет вид

$$\tilde{u}(1, \lambda) = \frac{2 \operatorname{sh}(\mu_0 \sqrt{\lambda})}{\mu_0 \sqrt{\lambda}} \tilde{g}_\delta(\lambda, \bar{\alpha}(\delta)).$$

Применяя к функции  $\tilde{u}(1, \lambda)$  обратное преобразование Фурье  $F_\lambda^{-1}$ , получим функцию

$$\bar{u}_\delta(1, t) = F_\lambda^{-1}(\tilde{u}_\delta(1, \lambda)).$$

Используем для этой функции метод проекционной регуляризации, получим, что регуляризованное решение задачи (16) будет определено соотношением

$$u_\delta(t) = P(\operatorname{Re} \bar{u}_\delta(1, t)) = \begin{cases} \operatorname{Re} \bar{u}_\delta(1, t) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

На основании полученных результатов, была разработана программа, позволяющая находить регуляризованное решение задачи (15) по приближенно заданной функции  $f(t) = u'_x(0, t)$ .

В качестве тестирующих программ были решены обратные задачи для некоторых модельных функций. Решение, полученное для модельной функции  $u(1,t) = t(e^{-t} - e^{-1})$ , изображено на рис. 1, а для модельной функции  $u(1,t) = \sin(10\pi t)e^{-t}$  – на рис. 2. При этом  $\delta$  – уровень погрешности,  $\alpha$  – это значение параметра регуляризации при заданном  $\delta$ .

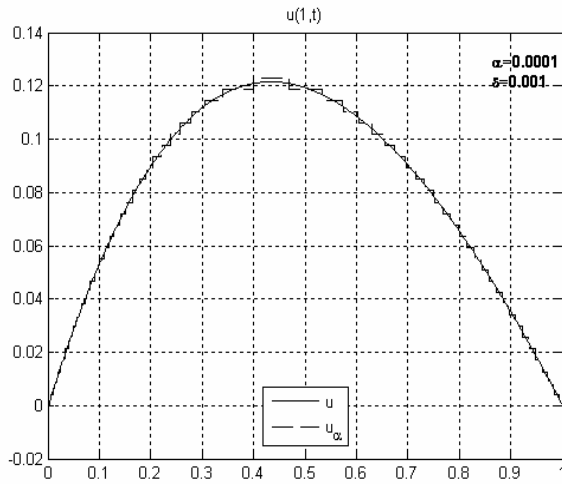


Рис. 1.  $u$  – точное решение,  $u_\delta$  – приближенное

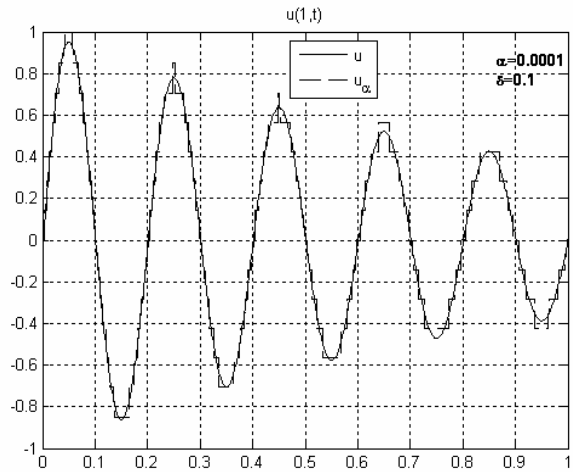


Рис. 2.  $u$  – точное решение,  $u_\alpha$  – приближенное

### 6. Моделирование обобщенной обратной задачи в пространстве $L_1([0,1] \times [0,\infty))$

При решении прикладных задач возникают ситуации, когда из априорной информации нельзя однозначно сделать вывод о возможности применения преобразования Фурье для решения задачи. Возникает необходимость в использовании других методов решения.

Численное моделирование такой обратной граничной задачи проводилось в несколько этапов. На первом этапе задача сводится к интегральному операторному уравнению вида (1). На втором с помощью метода проекционной регуляризации для полученного уравнения строится конечномерная аппроксимация и регуляризованное решение находится в виде частичной суммы ряда.

Для того, чтобы применить метод проекционной регуляризации, сведем задачу (15) к интегральному уравнению. С этой целью найдем решение прямой задачи, предположив, что искомая функция  $u(1,t) = \varphi(t)$  нам известна точно. Таким образом, рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} u'_t &= u''_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in (0,1), \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = \varphi(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{19}$$

решив которую, получим уравнение, связывающее функции  $u'_x(0,t) = g(t)$  и  $u(1,t) = \varphi(t)$ .

Пусть  $u(x,t) \in L_1([0,1] \times [0,\infty))$ , кроме того,  $\exists C > 0, \beta_0 \geq 0$  такие, что  $\forall t \in [0,\infty)$  выполнено  $|\varphi(t)| \leq ce^{\beta_0 t}$ , а для любого  $T \neq \infty$  и  $\forall t \in [0;T]$  функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, тогда для решения задачи можно использовать преобразование Лапласа [9].

Пусть  $\bar{u}(x,p)$  – изображение функции  $u(x,t)$ , а  $\bar{\varphi}(p)$  – функции  $u(1,t) = \varphi(t)$ , тогда операторное изображение задачи (19) имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - p\bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0,p) = 0, \quad \bar{u}(1,p) = \bar{\varphi}(p),$$

откуда  $\bar{u}(x,p) = \bar{\varphi}(p) \text{sh}(\sqrt{px}) / \text{sh}(\sqrt{p})$ . Оператор  $\bar{\psi}(x,p) = \text{sh}(\sqrt{px}) / \text{sh}(\sqrt{p})$  целесообразно вычислить посредством разложения на простые дроби. Мероморфная функция  $\bar{\psi}(x,p)$  имеет простые полюсы в точках  $\sqrt{p} = \pm i\pi n, n = 1, 2, 3, \dots$ , тогда разложение примет вид

$$\bar{\psi}(x, p) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\pi n x) \frac{p}{p + n^2 \pi^2}.$$

Выполняя обратные преобразования, получаем, что оператору  $\bar{\psi}(x, p)$  соответствует функция  $\psi(x, t)$ , определяемая формулой

$$\psi(x, t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}, \quad (20)$$

а функция  $u(x, t)$  будет определена соотношением

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) \psi(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

Используя (20), (21), получим, что решение задачи (19) имеет вид

$$u(x, t) = x\varphi(t) + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau. \quad (22)$$

Используя свойство сходящихся рядов и раскрывая оператор  $\frac{d}{dt}$  в соотношении (22), имеем, что при  $x \neq 1$  функция  $u(x, t)$  определяется соотношением

$$u(x, t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau.$$

Тогда для функции  $u'_x(0, t) = g(t)$  будет выполнено

$$g(t) = u'_x(0, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi^2 n^2 e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau.$$

С другой стороны, функция  $g(t)$  нам известна и мы получаем операторное уравнение первого рода, определяемое соотношением

$$A\varphi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi^2 n^2 e^{-\pi^2 n^2 t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\pi^2 n^2 \tau} d\tau = g(t). \quad (23)$$

Для полученного уравнения (23) решаем обратную задачу относительно неизвестной функции  $\varphi(t) = u(1, t)$ , используя метод проекционной регуляризации. Сначала ортогонализуем по Шмидту систему функций  $\{e^{-k^2 \pi^2 t}\}_1^{\infty}$  для каждого  $t \geq 0$ . Обозначим через  $\{c_k e^{-k^2 \pi^2 t}\}_1^{\infty}$  полученную ортогонализованную систему функций и найдем разложение функции  $g_{\delta}(t)$  по системе  $\{c_k e^{-k^2 \pi^2 t}\}_1^{\infty}$  по следующему правилу:

$$g_k(t) = c_k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2 \pi^2 \tau} d\tau. \quad (24)$$

Тогда

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) e^{-k^2 \pi^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \int_0^t g(\tau) e^{-k^2 \pi^2 \tau} d\tau \right) e^{-k^2 \pi^2 t}. \quad (25)$$

Учитывая соотношение (24)–(25) получим, что параметр регуляризации, определяемый формулой (4), будет являться решением уравнения

$$\|A\varphi(t) - g_{\delta}(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N g_{\delta k} e^{-\pi^2 k^2 t} - g_{\delta}(t) \right\|^2 \leq 9\delta^2. \quad (26)$$

Метод проекционной регуляризации заключается в том, что приближенное решение задачи (19) находится в виде частичной суммы ряда (23) и параметр регуляризации, определяемый в (26), зависит от количества слагаемых в этой сумме.

## Литература

1. Иванов, В.К. О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода / В.К. Иванов // *Bull. Inst. Politech Iasi*. – 1968. – Т. 14, № 314. – С. 71–78.
2. Идентификация математических моделей теплопереноса в разлагающихся материалах / О.М. Алифанов, С.А. Будник, А.В. Ненарокомов, А.В. Нетелев // *Тепловые процессы в технике*. – 2011. – № 8. – С. 338–347.
3. Cialkowski, M.J. Trefftz method in solving the inverse problems / M.J. Cialkowski, K. Grysa // *J. Inv. Ill-Posed Problems*. – 2010. – Vol. 18. – pp. 595–616.
4. Короткий, А.И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости / А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов // *Труды ИММ УрО РАН*. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 88–97.
5. Солодуша, С.В. Приложение нелинейных уравнений Вольтера I рода к задаче управления динамикой теплообмена / С.В. Солодуша // *Автоматика и телемеханика*. – 2011. – № 6. – С. 133–140.
6. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // *Сиб. ЖВМ*. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.
7. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // *ДАН*. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316–318.
8. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации / В.П. Танана // *Сиб. ЖВМ*. – 2004. – Т. 7, № 17. – С. 117–132.
9. Дёч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Дёч. – М.: Наука – 1971. – 291 с.

*Поступила в редакцию 7 мая 2012 г.*

## DIFFERENT APPROACHES TO SOLVE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMAL DIAGNOSTICS

**N.M. Yaparova<sup>1</sup>**

The projective regularization method is applied to some problems of thermal diagnostics. This problem is reduced to the generalized one. Numerical algorithm to solve this problem is obtained. The results are approved by model examples.

*Keywords: method for the solution of operator equations, regularization method, projective regularization method, heat conduction equation, inverse problems of a thermal conduction.*

### References

1. Ivanov V.K. *Bull. Inst. Politech Iasi*. 1968. Vol. 14, no. 314. pp. 71–78.
2. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., Netelev A.V. *Teplovye protsessy v tekhnike*. 2011. no. 8. pp. 338–347. (in Russ.).
3. Cialkowski M.J., Grysa K. Trefftz method in solving the inverse problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 2010. Vol. 18. pp. 595–616.
4. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. *Trudy IMM UrO RAN*. 2006. Vol. 12, no. 2. pp. 88–97. (in Russ.).
5. Solodusha S.V. *Automation and Remote Control*. 2011. Vol. 72. no. 6. pp. 1264–1270.
6. Tanana V.P. Yaparova N.M. *Siberian J. of Numer. Mathematics*. 2006. Vol. 9, no. 4. pp. 353–368. (in Russ.).
7. Tanana V.P. *DAN*. 2006. Vol. 407, no. 3. pp. 316–318. (in Russ.).
8. Tanana V.P. *Siberian J. of Numer. Mathematics*. 2004. Vol. 7, no. 17. pp. 117–132. (in Russ.).
9. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniiu preobrazovaniia Laplasa i Z-preobrazovaniia* (Guide to the Practical Application of the Laplace transform and Z-transform). Moscow: Nauka, 1971. 288 p. (in Russ.). [Von Gustav Doetsch *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. R. Oldenbourg, 1961. 256 p.]

<sup>1</sup> Yaparova Natalia Michailovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Mathematical Analysis Department, South Ural State University. E-mail: ddjy@math.susu.ac.ru