УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

К.М. Расулов[1]

Статья посвящена разработке конструктивного алгоритма решения трехэлементной односторонней краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в единичном круге в случае, когда рассматриваемая задача не вырождается в двухэлементную краевую задачу без сдвига.

Ключевые слова: трехэлементная краевая задача, аналитическая функция, сдвиг Карлемана, интегральное уравнение.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L.

Обозначим через $A(T^+) \cap H(L)$ класс аналитических в области T^+ функций $F(z)$, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающихся на контур L.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все аналитические в области* T^+ *функции* $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ *класса* $A(T^+) \cap H(L)$, *удовлетворяющие на* L *условию*

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \tag{1}$$

где $A(t), B(t), h(t)$ *– заданные на* L *функции класса* $H(L)$ *(Гельдера),* $\alpha(t)$ *– прямой или обратный сдвиг контура* L, *удовлетворяющий условию Карлемана*

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{2}$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$ *и* $\alpha'(t) \in H(L)$.

Сформулированную задачу (1), (2) будем называть *трехэлементной односторонней задачей Карлемана* или, короче, *задачей* K_3, а соответствующую *однородную задачу* ($h(t) \equiv 0$) – *задачей* K_3^0.

В монографии Г.С. Литвинчука [1, с. 294–318] построена теория Нетера для задачи K_3 при различных предположениях относительно коэффициентов $A(t), B(t), H(t)$ и функции сдвига $\alpha(t)$. В частности, в [1] установлено, что краевое условие (1) задачи K_3 легко приводится к виду

$$A_1(t)F^+(t) = B_1(t)\overline{F^+(t)} + h_1(t), \tag{3}$$

где

$$A_1(t) = 1 - A(t) \cdot A[\alpha(t)] - \overline{B(t)} \cdot B[\alpha(t)], \tag{4}$$

$$B_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot B(t) + \overline{A(t)} \cdot B[\alpha(t)], \tag{5}$$

$$h_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot h(t) + B[\alpha(t)] \cdot \overline{h(t)} + h[\alpha(t)]. \tag{6}$$

Следовательно, если на контуре L *выполняются* условия

$$A_1(t) \neq 0, \;\; B_1(t) \neq 0, \quad h_1(t) \neq 0, \tag{7}$$

то задача K_3 «*вырождается*» в хорошо исследованную *двухэлементную краевую задачу* вида (3). Поэтому в случае *выполнения* условий (7) (мы в дальнейшем называем этот случай *вырожденным*), используя известные методы решения *двухэлементных* краевых задач вида (3) (см., например, [1, 3, 4]), устанавливаются конструктивные методы решения и исходной задачи K_3.

[1] Расулов Карим Магомедович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, физико-математический факультет, Смоленский государственный университет.
E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Предположим теперь, что на контуре L выполняются тождества $A_1(t)\equiv 0$, $B_1(t)\equiv 0$, $h_1(t)\equiv 0$, которые с учетом обозначений (4)–(6) можно переписать в следующей «развернутой» форме:

$$A(t)\cdot A[\alpha(t)]+\overline{B(t)}\cdot B[\alpha(t)]\equiv 1, \tag{8}$$

$$A[\alpha(t)]\cdot B(t)+\overline{A(t)}\cdot B[\alpha(t)]\equiv 0, \tag{9}$$

$$A[\alpha(t)]\cdot h(t)+B[\alpha(t)]\cdot \overline{h(t)}+h[\alpha(t)]\equiv 0. \tag{10}$$

Известно (см., например, [1, с. 296]), что из условий (8) и (9) следует, что коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ всюду на контуре L удовлетворяют одному из следующих неравенств:

$$|A(t)|>|B(t)| \quad \text{или} \quad |A(t)|<|B(t)|. \tag{11}$$

Общий метод решения задачи K_3 в *невырожденным* случае (т.е. при выполнении условий (8)–(10)) до сих пор не был получен. Поэтому основной целью настоящей заметки является разработка *общего конструктивного метода решения задачи* K_3 *в невырожденном случае* лишь при выполнении одного из условий: либо $A(t)\neq 0$, либо $B(t)\neq 0$. В некоторых частных случаях идея этого метода была анонсирована в работах автора [7, 8].

Всюду в дальнейшем для определенности будем предполагать, что $L=\{t:|t|=1\}$ и $T^+=\{z:|z|<1\}$, так как общий случай с помощью конформного отображения всегда можно привести к этому. Кроме того, обозначим через T^- дополнение замкнутого круга $\overline{T}^+=\{z:|z|\le 1\}$ до полной комплексной плоскости.

2. Метод решения невырожденной задачи K_3 в случае прямого сдвига и $B(t)\neq 0$. Пусть $\alpha(t)$ – *прямой* сдвиг контура L, выполняются условия (8)–(10) и $B(t)\neq 0$. При указанных предположениях, краевое условие (1) можно переписать в следующем виде

$$F^+[\alpha(t)]=B(t)\overline{F^+(t)}+g(t), \tag{12}$$

где

$$g(t)=h(t)+A(t)F^+(t).$$

Если временно предположить, что $g(t)$ – известная функция, то равенство (12) представляет собой краевое условие *двухэлементной задачи типа Карлемана,* теория которой изложена, например, в монографии [1, §14].

Известно (см. например, [1, с. 172]), что при исследовании и решении двухэлементной задачи (12) представляет интерес следующие три случая:

а) $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\equiv 0$;

б) $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\neq 0, \quad t\in L$;

в) когда $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L (как, например, в случае $\alpha(t)=-t$, $A(t)=i\sqrt{2}\cdot\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, $B(t)=2-\dfrac{1}{t^2}$ и $h(t)=\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{t}+i\sqrt{2}-t-i\sqrt{2}\cdot t^2$).

2.1. О решении задачи K_3 в случае $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\equiv 0$. Очевидно, что при выполнении условия (8) из тождества $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\equiv 0$ вытекает $A(t)\equiv 0$. Следовательно, в случае $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\equiv 0$ исходная задача K_3 равносильна хорошо изученной (см., например, [1, §14]) двухэлементной краевой задаче типа Карлемана вида

$$F^+[\alpha(t)]=B(t)\overline{F^+(t)}+h(t). \tag{13}$$

2.2. Метод «интегральных ловушек» для решения задачи K_3 в случае $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1\neq 0,\ t\in L$. В этом случае в силу (8) имеем $A(t)\neq 0$ всюду на L, т.е. во всех точках контура L имеет место одно из следующих соотношений:

$$|A(t)|>|B(t)|>0 \tag{14}$$

или

$$|B(t)| > |A(t)| > 0. \tag{15}$$

Прежде чем построить общий конструктивный алгоритм решения задачи K_3 (при выполнении любого из неравенств (14) или (15)), заметим (см. также [1, с. 298]) одно важное в дальнейших рассуждениях и очевидное

Утверждение 1. *Все решения краевой задачи K_3 можно получить, если решить краевую задачу*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L, \tag{16}$$

для двух неизвестных аналитических функций $F^+(z)$ и $\Phi^+(z)$ из класса $A(T^+) \cap H(L)$, а затем потребовать, чтобы $F^+(z) \equiv \Phi^+(z), \ z \in T^+ \cup L$.

Следуя [1], в дальнейшем краевую задачу (16) для пары аналитических функций $F^+(z)$ *и* $\Phi^+(z)$ назовем *вспомогательной,* и обозначим для краткости символом GK_3, а соответствующую ей *однородную задачу* ($h(t) \equiv 0$) – GK_3^0.

Важно отметить, что основное «родство» между задачами K_3 и GK_3 определяется следующими двумя леммами.

Лемма 1. *Если для коэффициентов $A(t), B(t)$ выполняются условия (8), (9) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15), то для любых комплексных функций $F^+(t)$ и $\Phi^+(t)$, определенных на L, и любого $\alpha(t)$, удовлетворяющего условию (2), равенства*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)}, \quad t \in L \tag{17}$$

и

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)\Phi^+(t) + B(t)\overline{\Phi^+(t)}, \quad t \in L \tag{18}$$

равносильны, т.е. $(17) \Leftrightarrow (18)$.

Доказательство. Предположим, что для пары функций $(\Phi^+(t), F^+(t))$ имеет место равенство (17). Тогда, с учетом (2), из (17) будем иметь:

$$\Phi^+(t) = A[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)] + B[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]}, \quad t \in L,$$

$$A(t)\Phi^+(t) = A(t)A[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)] + A(t)B[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]}, \quad t \in L,$$

$$B(t)\overline{\Phi^+(t)} = B(t)\overline{A[\alpha(t)]}\,\overline{F^+[\alpha(t)]} + B(t)\overline{B[\alpha(t)]}F^+[\alpha(t)], \quad t \in L.$$

Складывая последние два равенства, в силу соотношений (8) и (9) получаем равенство (18), т.е. $(17) \Rightarrow (18)$. Совершенно аналогичными рассуждениями устанавливается $(18) \Rightarrow (17)$. *Лемма доказана.*

Из леммы 1 вытекает (см. также [1, с. 298]) важное

Следствие 1. *Если пара $(\Phi^+(z), F^+(z))$ аналитических в круге T^+ функций образует решение однородной задачи GK_3^0, то и пары вида $(F^+(z), \Phi^+(z))$, $\left(\dfrac{F^+(z)+\Phi^+(z)}{2}, \dfrac{F^+(z)+\Phi^+(z)}{2}\right)$, $\left(\dfrac{F^+(z)-\Phi^+(z)}{2i}, \dfrac{F^+(z)-\Phi^+(z)}{2i}\right)$ также образуют решения этой задачи.*

На основании леммы 1 и следствия 1 Г.С. Литвинчуку [1, с. 300] удалось установить следующее важное утверждение.

Лемма 2. *При выполнении условий (8), (9) и $B(t) \neq 0$ общее решение однородной краевой задачи K_3^0 содержит в два раза меньше произвольных действительных постоянных, чем общее решение однородной вспомогательной задачи GK_3^0. Фундаментальные системы решений одно-*

родных задач K_3^0 *и* GK_3^0 *всегда можно выбрать одинаковыми; тогда общее решение задачи* K_3^0 *или* GK_3^0 *выражается формулой*

$$(F^+(z), \Phi^+(z)) = \sum_{k=1}^{l}\left(c_k F_k^+(z),\ \overline{c}_k F_k^+(z)\right), \tag{19}$$

где $c_k \quad (k = 1, 2, ..., l)$ *– соответственно действительные или комплексные произвольные постоянные.*

Точно так же, как лемма 1, устанавливается

Лемма 3. *Если для коэффициентов* $A(t), B(t), h(t)$ *выполняются условия (8)–(10) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15), то для любых комплексных функций* $F^+(t)$ *и* $\Phi^+(t)$*, определенных на* L*, и любого* $\alpha(t)$*, удовлетворяющего условию (2), равенства*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \quad t \in L \tag{20}$$

и

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)\Phi^+(t) + B(t)\overline{\Phi^+(t)} + h(t), \quad t \in L \tag{21}$$

равносильны, т.е. $(20) \Leftrightarrow (21)$.

Из леммы 3 вытекает полезное в дальнейшем

Следствие 2. *Если пара* $(\Phi^+(z), F^+(z))$ *аналитических в круге* T^+ *функций образует решение неоднородной задачи* GK_3*, то и пара вида* $(F^+(z), \Phi^+(z))$ *также образует решения этой задачи.*

Общая идея предлагаемого ниже метода решения задачи K_3 состоит в следующем. Сначала строится интегральное уравнение типа Фредгольма («первая интегральная ловушка»), позволяющее среди всех аналитических функций класса $A(T^+) \cap H(L)$ выделить («выловить») те, которые являются решениями вспомогательной задачи GK_3. Затем строится второе интегральное уравнение типа Фредгольма («вторая интегральная ловушка»), позволяющее выделить («выловить») среди решений первого интегрального уравнения лишь те, которые являются граничными значениями решений исходной задачи K_3.

Переходим теперь к построению основного алгоритма решения задачи K_3 в рассматриваемом случае.

Так как в рассматриваемом случае $A(t) \neq 0$ и $B(t) \neq 0$ на L, то краевое условие (16) задачи GK_3 можно переписать в виде

$$F^+(t) = G(t)\overline{F^+(t)} + G_1(t)\Phi^+[\alpha(t)] + h_1(t), \tag{22}$$

где

$$G(t) = -\frac{B(t)}{A(t)},\ G_1(t) = \frac{1}{A(t)},\ h_1(t) = -\frac{h(t)}{A(t)}. \tag{23}$$

Предположим, что задача GK_3 разрешима и пара аналитических функций $(F^+(z), \Phi^+(z))$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ образует некоторое ее решение. Далее выясним, каким образом можно восстановить значения аналитической в круге T^+ функции $F^+(z)$, если известны граничные значения функции $\Phi^+(z)$. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в области T^- функцию

$$F^-(z) = \overline{F^+}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in T^-, \tag{24}$$

граничные значения которой во всех точках окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ удовлетворяют условию «симметрии» (см., например, [3, с. 97]):

$$F^{-}(t)=\overline{F^{+}(t)}, \quad t\in L. \tag{25}$$

С учетом (25) краевое условие (22) можно переписать так:

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+g(t), \tag{26}$$

где

$$g(t)=G_1(t)\Phi^{+}[\alpha(t)]+h_1(t). \tag{27}$$

Очевидно, что для любой функции $\Phi^{+}(z)$ из $A(T^{+})\cap H(L)$ функция $g(t)=G_1(t)\Phi^{+}[\alpha(t)]+h_1(t)$ будет принадлежать классу Гельдера $H(L)$. Следовательно, если временно предположим, что $g(t)$ – известная функция, то равенство (26) представляет собой обычную скалярную задачу Римана («*задачу сопряжения*») относительно кусочно-аналитической функции $F(z)=\{F^{+}(z), F^{-}(z)\}$ (см., например, [3, с. 106]).

Пусть $\chi=Ind\,G(t)=\chi_2-\chi_1$, где $\chi_1=Ind\,A(t)$ и $\chi_2=Ind\,B(t)$. Тогда, как известно (см., например, [3, с. 111]), при $\chi\geq 0$ (т.е. $\chi_2\geq\chi_1$) задача Римана (26) безусловно разрешима и ее общее решение задается формулами:

$$F^{+}(z)=\frac{X^{+}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{G_1(\tau)\Phi^{+}[\alpha(\tau)]+h_1(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X^{+}(z)P_{\chi}(z), \quad z\in T^{+}, \tag{28}$$

$$F^{-}(z)=\frac{X^{-}(z)}{2\pi i}\int_L \frac{G_1(\tau)\Phi^{+}[\alpha(\tau)]+h_1(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X^{-}(z)P_{\chi}(z), \quad z\in T^{-}, \tag{29}$$

где $X^{\pm}(z)$ – канонические функции задачи Римана (26), а $P_{\chi}(z)=\sum_{k=0}^{\chi}C_k z^k$ – произвольный многочлен степени не выше χ.

Если же $\chi=Ind\,G(t)<0$, то при выполнении $-\chi-1$ условий вида

$$\int_L \frac{G_1(t)\Phi^{+}[\alpha(t)]}{X^{+}(t)}t^{k-1}dt=-\int_L \frac{h_1(t)}{X^{+}(t)}t^{k-1}dt, \quad k=1,2,...,-\chi-1 \tag{30}$$

единственное решение задачи Римана (26) задается формулами (28) и (29), где нужно положить $P_{\chi}(z)\equiv 0$.

Из формул (28) и (30) с учетом леммы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть для коэффициентов* $A(t), B(t)$, $h(t)$ *выполняются условия (8)–(10) и хотя бы одно из неравенств (14) или (15). Тогда в случае* $\chi=Ind\,G(t)\geq 0$ *для любого решения* $(F^{+}(z),\Phi^{+}(z))$ *задачи* GK_3 *значения аналитической функции* $F^{+}(z)$, $z\in T^{+}$ *выражаются через граничные значения* $\Phi^{+}[\alpha(t)]$ *функции* $\Phi^{+}(z)$ *по формуле (28). Если же* $\chi=Ind\,G(t)<0$, *то для любого решения* $(F^{+}(z),\Phi^{+}(z))$ *задачи* GK_3 *такого, что функция* $\Phi^{+}[\alpha(t)]$ *удовлетворяет* $-\chi-1$ *условиям вида (30), значения аналитической функции* $F^{+}(z)$, $z\in T^{+}$, *выражаются через граничные значения* $\Phi^{+}[\alpha(t)]$ *функции* $\Phi^{+}(z)$ *по формуле (28), где нужно положить* $P_{\chi}(z)\equiv 0$.

Поскольку $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L, причем $\alpha'(t)\in H(L)$, то для любой функции $\Phi^{+}(z)\in A(T^{+})\cap H(L)$ справедливы равенства (см., например, [3, с. 40]):

$$\frac{1}{2}\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^{+}(\tau)d\tau}{\tau-t}, \quad \frac{1}{2}\Phi^{+}[\alpha(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^{+}[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau. \tag{31}$$

Теперь с учетом равенств (31) и формул Сохоцкого (см., например, [5, с. 38]), из формул (28) и (29) находим предельные значения $F^{+}(z)$ и $F^{-}(z)$ при $z\to t\in L$:

$$F^{+}(t)=\frac{1}{A(t)}\varphi(t)+\int_L K^{+}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+q^{+}(t), \quad t\in L, \tag{32}$$

$$F^{-}(t)=\int_{L}K^{-}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+q^{-}(t),\quad t\in L, \tag{33}$$

где $\varphi(t)=\Phi^{+}[\alpha(t)]$, $K^{+}(t,\tau)=X^{+}(t)K(t,\tau),\quad K^{-}(t,\tau)=X^{-}(t)K(t,\tau),$

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{A(\tau)X^{+}(\tau)}\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{A(t)X^{+}(t)}\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right), \tag{34}$$

$$q^{+}(t)=\frac{1}{2}h_1(t)+\frac{X^{+}(t)}{2\pi i}\int_{L}\frac{h_1(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+X^{+}(t)P_{\chi}(t), \tag{35}$$

$$q^{-}(t)=-\frac{1}{2}\frac{X^{-}(t)}{X^{+}(t)}h_1(t)+\frac{X^{-}(t)}{2\pi i}\int_{L}\frac{h_1(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+X^{-}(t)P_{\chi}(t), \tag{36}$$

причем в формулах (35)–(36) в случае $\chi<0$ нужно положить $P_{\chi}(t)\equiv 0$.

Нетрудно проверить [5, 6], что при сделанных в условии задачи K_3 предположениях относительно функции сдвига $\alpha(t)$ и коэффициентов $A(t), B(t), h(t)$ краевого условия (1) ядра $K^{+}(t,\tau)$ и $K^{-}(t,\tau)$ будут фредгольмовыми, т.е. $K^{+}(t,\tau)$, $K^{-}(t,\tau)\in H_{*}(L\times L)$ (определение класса $H_{*}(L\times L)$ см., например, в [2, с. 7]), а функции $q^{+}(t)$, $q^{-}(t)\in H(L)$.

Далее среди функций $F^{+}(t)$ и $F^{-}(L)$, задаваемых формулами (32) и (33), «отбираем» те, которые удовлетворяют условию «симметрии» (25). В силу формул (32) и (33) равенство (25) можно записать в виде следующего интегрального уравнения типа Фредгольма относительно функции $\varphi(t)$:

$$(N\varphi)(t)\equiv\varphi(t)+\int_{L}n_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_{L}\overline{n_2(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}=q(t), \tag{37}$$

где $q(t)=A(t)[\overline{q^{-}(t)}-q^{+}(t)]$, $n_1(t,\tau)=A(t)K^{+}(t,\tau)$, $n_2(t,\tau)=-\overline{A(t)}K^{+}(t,\tau)$.

Вывод уравнения (37) (с учетом следствия 2) является одновременно доказательством следующего утверждения.

Лемма 5. *Если* $\left(F^{+}(z),\Phi^{+}(z)\right)$ *– решение вспомогательной задачи* GK_3, *то граничные значения* $\Phi^{+}[\alpha(t)]$ *и* $F^{+}[\alpha(t)]$ *представляют собой решения интегрального уравнения типа Фредгольма (37).*

Замечание 1. Здесь важно отметить, что теория разрешимости интегральных уравнений вида (37) хорошо известна (см., например, [4, с. 364]).

Введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение, *союзное* с уравнением (37) (см. также [4, с. 365]):

$$(N'\mu)(t)\equiv\mu(t)+\int_{L}n_1(\tau,t)\mu(\tau)d\tau+\int_{L}n_2(\tau,t)\overline{\mu(\tau)d\tau}=0. \tag{38}$$

Как известно (см., [4, с. 370]), для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (37) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\operatorname{Re}\int_{L}q(t)\mu_j(t)dt=0,\quad j=1,2,...,m, \tag{39}$$

где $\mu_1(t),\mu_2(t),...,\mu_m(t)$ – полная система линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений однородного уравнения (38).

Замечание 2. Отметим, что если $\chi\geq 0$, то некоторые из условий разрешимости (39) можно удовлетворить за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение $q(t)$.

Предположим, что интегральное уравнение (37) разрешимо (т.е. выполняются условия (39)) и уже найдено его общее решение (см., например, [4, с. 372]):

$$\varphi(t)=q(t)+\int_{L}\gamma_1(t,\tau)q(\tau)d\tau+\int_{L}\overline{\gamma_2(t,\tau)q(\tau)d\tau}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_{k0}(t), \tag{40}$$

где $\gamma_1(t,\tau)$ и $\gamma_2(t,\tau)$ – обобщенные резольвенты уравнения (37), а $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_{k0}(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $(N\varphi)(t)=0$ (т.е. здесь $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ – произвольные действительные постоянные).

Пусть $\hat{\varphi}_j(t)=\hat{\Phi}_j^+[\alpha(t)]$ $(j=1,2,...,n)$, где $n\le m$ – те из функций вида (40), для которых $\hat{\varphi}_j[\alpha(t)]=\hat{\Phi}_j^+(t)\in H^+(L)$, т.е. $\hat{\Phi}_j^+(t)$ – граничные значения аналитических функций класса $A(T^+)\cap H(L)$. Тогда в силу леммы 4 пары $\left(\hat{F}_j^+(z),\hat{\Phi}_j^+(z)\right)$, где

$$\hat{F}_j^+(z)=\frac{X^+(z)}{2\pi i}\int_L\frac{G_1(\tau)\hat{\varphi}_j(\tau)+h_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X^+(z)P_\chi(z),\ z\in T^+, \tag{41}$$

$$\hat{\Phi}_j^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\hat{\varphi}_j[\alpha(\tau)]}{\tau-z}d\tau,\ z\in T^+, \tag{42}$$

образуют решения вспомогательной задачи GK_3. При этом в случае $\chi=IndG(t)<0$ в формуле (41) нужно положить $P_\chi(z)\equiv 0$, причем функция $\hat{\varphi}(t)=\hat{\Phi}^+[\alpha(t)]$ должна удовлетворять еще и $-\chi-1$ условиям вида (30).

Предположим теперь, что $\left(\tilde{F}^+(z),\tilde{\Phi}^+(z)\right)$ – общее решение вспомогательной краевой задачи GK_3. Для того чтобы выделить («выловить») среди решений $\left(\tilde{F}^+(z),\tilde{\Phi}^+(z)\right)$ задачи GK_3 функции $F^+(z)$, являющиеся решениями исходной задачи K_3, нужно потребовать, чтобы $\tilde{F}^+(z)\equiv\tilde{\Phi}^+(z),\ z\in T^+$, или $\tilde{F}^+(t)=\tilde{\Phi}^+(t)=\tilde{\varphi}[\alpha(t)],\ t\in L$. Но в силу (32) последнее равенство равносильно тому, что функции вида $\tilde{F}^+(t)=\tilde{\varphi}[\alpha(t)]$ должны быть решениями интегрального уравнения

$$\tilde{\varphi}[\alpha(t)]=\frac{1}{A(t)}\tilde{\varphi}(t)+\int_L K^+(t,\tau)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau+q^+(t),\quad t\in L. \tag{43}$$

С учетом (2), (8) и $B(t)\ne 0$ уравнение (43) легко приводится к следующему равносильному ему уравнению Фредгольма второго рода

$$(M\varphi)(t)\equiv\tilde{\varphi}(t)+\int_L M(t,\tau)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau=\omega(t),\quad t\in L, \tag{44}$$

где

$$M(t,\tau)=\frac{A(t)}{\overline{B(t)}B[\alpha(t)]}\{K^+(t,\tau)+A[\alpha(t)]K^+[\alpha(t),\tau]\},\ \omega(t)=-\frac{A(t)}{\overline{B(t)}B[\alpha(t)]}\{q^+(t)+A[\alpha(t)]q^+[\alpha(t)]\}.$$

Действительно, перепишем сначала (43) в виде

$$A(t)\tilde{\varphi}[\alpha(t)]=\tilde{\varphi}(t)+\int_L A(t)K^+(t,\tau)\tilde{\varphi}(\tau)d\tau+A(t)q^+(t). \tag{45}$$

С другой стороны, в силу (2) из уравнения (45) будем иметь

$$-\tilde{\varphi}[\alpha(t)]=-A[\alpha(t)]\tilde{\varphi}(t)+\int_L A[\alpha(t)]K^+[\alpha(t),\tau]\tilde{\varphi}(\tau)d\tau+A[\alpha(t)]q^+[\alpha(t)]. \tag{46}$$

Наконец, умножив обе части (46) на $A(t)$ и почленно складывая полученное уравнение с уравнением (45) в силу тождества (8) получим уравнение (44).

Вывод уравнения (44) является одновременно доказательством следующего утверждения.

Лемма 6. *Если функция $F^+(z)$ – решение задачи K_3, то ее граничные значения $F^+(t)=\varphi[\alpha(t)]$, $t\in L$, представляют собой решение интегрального уравнения Фредгольма (43) (или, что то же самое, (44)).*

На основании лемм 5 и 6 нетрудно установить следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Если* $\chi = Ind\,G(t) \geq 0$, *то для того чтобы функция* $F^+(z)$ *класса* $A(T^+) \cap H(L)$ *было решением краевой задачи* K_3, *необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения* $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$ *удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма, составленной из (37) и (44), т.е. системе*

$$\begin{cases} (N\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int\limits_L n_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_L \overline{n_2(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau} = q(t), \\ \\ (M\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int\limits_L M(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \omega(t). \end{cases} \tag{47}$$

Если же $\chi = Ind\,G(t) < 0$, *то для того чтобы функция* $F^+(z)$ *класса* $A(T^+) \cap H(L)$ *было решением краевой задачи* K_3, *необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения* $F^+[\alpha(t)] = \varphi(t)$, $t \in L$ *удовлетворяли системе интегральных уравнений (47), где нужно положить* $P_\chi(t) \equiv 0$, *и кроме того функция* $F^+[\alpha(t)] = \varphi(t)$ *должна удовлетворять* $-\chi - 1$ *условиям вида*

$$\int\limits_L \frac{G_1(t)\varphi((t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = -\int\limits_L \frac{h_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, ..., -\chi - 1. \tag{48}$$

Доказательство. Необходимость вытекает из утверждений лемм 5 и 6. Установим далее достаточность.

Пусть $\chi = Ind\,G(t) \geq 0$ и предположим, что граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$ некоторой функции $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (47). Покажем, что тогда $F^+(z)$ – решение задачи K_3.

Действительно поскольку второе уравнение из системы (47) равносильно уравнению (43), то будем иметь:

$$F^+(t) = \frac{1}{A(t)} F^+[\alpha(t)] + \int\limits_L K^+(t,\tau) F^+[\alpha(\tau)] d\tau + q^+(t), \quad t \in L. \tag{49}$$

Но равенство (49), в силу соотношений (см., например, [3, с. 40])

$$\frac{1}{2} F^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F^+(\tau)d\tau}{\tau - t}, \; \frac{1}{2} F^+[\alpha(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau, \quad t \in L \tag{50}$$

и формулы (28), где в правой части вместо $\Phi^+[\alpha(t)]$ положено $F^+[\alpha(t)]$, равносильно следующему:

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{2} \frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q^+(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L. \tag{51}$$

С другой стороны, так как функция $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$ удовлетворяет первому интегральному уравнению из системы (47), то это равносильно тому, что для аналитической функции $F^-(z)$ класса $A(T^-) \cap H(L)$, задаваемой формулой

$$F^-(z) = \frac{X^-(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{G_1(\tau)F^+[\alpha(\tau)] + h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X^-(z)P_\chi(z), \quad z \in T^-, \tag{52}$$

справедливо равенство (25). Но в силу формул Сохоцкого (см., например, [5, с. 38]) из (52) имеем:

$$\frac{F^-(t)}{X^-(t)} = -\frac{1}{2} \frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F^+[\alpha(\tau)]}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q^-(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L. \tag{53}$$

Вычитая из (51) равенство (53) с учетом формул (35) и (36), получаем

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)}-\frac{F^-(t)}{X^-(t)}=\frac{F^+[\alpha(t)]}{A(t)X^+(t)}+\frac{h_1(t)}{X^+(t)},\quad t\in L\,. \qquad (54)$$

Наконец, с учетом равенства (25) и $G(t)=\dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}$, умножив обе части равенства (54) на $X^+(t)$, будем иметь:

$$F^+(t)=G(t)\overline{F^+(t)}+G_1(t)F^+[\alpha(t)]+h_1(t),\quad t\in L\,. \qquad (55)$$

Но последнее равенство означает, что функция $F^+(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{F^+(t)}{t-z}d\tau$, $z\in T^+$, является решением задачи K_3.

Пусть теперь $\chi=Ind\,G(t)<0$ и предположим, что граничные значения $F^+(t)=\varphi[\alpha(t)]$, $t\in L$ некоторой функции $F^+(z)$ класса $A(T^+)\cap H(L)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (47) и $-\chi-1$ условиям вида (48). Тогда, рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, можно убедиться, что $F^+(z)$ удовлетворяет краевому условию (55), т.е. $F^+(z)$ – решение задачи K_3. *Теорема полностью доказана.*

Итак, для решения задачи K_3 в рассматриваемом случае можно использовать следующий алгоритм:

1. Находим индекс $\chi=Ind\,G(t)$, канонические функции $X^+(z)$, $X^-(z)$ задачи Римана (26) и по формулам (34)–(36) функции $K^+(t,\tau)$, $K^-(t,\tau)$, $q^+(t)$, $q^-(t)$. Затем переходим к пункту 2.

2. Составляем интегральное уравнение типа Фредгольма (37). Решая его (в случае его разрешимости), находим все его решения $\varphi(t)$ и переходим к пункту 3. Если же интегральное уравнение (37) неразрешимо, то в силу леммы 5 неразрешима и задача K_3.

3. Если $\chi=Ind\,G(t)\ge 0$, то среди решений $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) выбираем только те $\tilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и уравнению (44) (т.е. находим решения системы уравнений (47)), а затем переходим к пункту 4. Если же $\chi=Ind\,G(t)<0$, то сначала среди решений $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) выбираем только те, для которых выполняются условия (29), а затем, из выбранных таким образом решений интегрального уравнения (37) отбираем те $\tilde{\varphi}(t)$, которые являются также решениями интегрального уравнения (44) (т.е. являются решениями системы уравнений (47)), и переходим к пункту 4. В случае, когда ни одно решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (37) не удовлетворяет уравнению (44) (т.е. когда система (47) неразрешима), задача K_3 в силу леммы 6 также неразрешима.

4. Находим общее решение искомой задачи K_3 по формуле

$$F^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{\varphi}(\tau)}{t-z}d\tau,\ z\in T^+.$$

Таким образом, в данном случае получили следующий основной результат.

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L, удовлетворяющий условию (2), всюду на этом контуре выполняются условия (8)–(10) и одно из неравенств (14) или (15). Тогда решение задачи K_3 сводится к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма (47). При этом если $\chi\ge 0$, то для разрешимости задачи K_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений (47); если же $\chi<0$, то для разрешимости задачи K_3 необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений (47) и для решений этой системы выполнялись $-\chi-1$ условий вида (48).*

В заключение отметим, что разработанный выше «метод интегральных ловушек» применим для решения задачи K_3 и в *исключительном случае*, т.е. когда выражение $B[\alpha(t)]\cdot\overline{B(t)}-1$ *обращается в нуль в отдельных точках контура* L. Отличие от рассмотренного выше случая будет лишь в том, что при построении интегрального уравнения вида (37) в исключительном случае нужно будет использовать формулы для решения задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций в исключительном случае (см., например, [3, с. 136]).

Литература

1. Литвинчук, Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

2. Расулов, К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 343 с.

3. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

4. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

5. Расулов, К.М. Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге / К.М. Расулов // Известия СмолГУ. – 2008. – № 2. – С. 94–104.

6. Расулов, К.М. О решении трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге / К.М. Расулов // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. – 2010. – № 3(102). – С. 31–37.

Поступила в редакцию 18 апреля 2012 г.

TO THE SOLUTION OF A THREE-ELEMENT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A CARLEMAN SHIFT FOR ANALYTICAL FUNCTIONS IN THE NONDEGENERATE CASE

K.M. Rasulov[1]

The article considers constructive algorithm to solve a three-element one-side boundary value problem with Carleman shift in classes of analytic functions of the unit disk in case when the problem is not reducible to a two-element boundary value problem without shift.

Keywords: three-element boundary value problem, analytic functions, Carleman shift, integral equation.

References

1. Litvinchuk G.S. *Kraevye zadachi i singuliarnye integral'nye uravneniia so sdvigom* (Boundary value problems and singular integral equations with shift). Moscow: Nauka, 1977. 448 p. (in Russ.).

2. Rasulov K.M. *Kraevye zadachi dlia polianaliticheskikh funktsii i nekotorye ikh prilozheniia* (Boundary value problems for polyanalytic functions and some applications). Smolensk: Izd-vo SGPU, 1998. 343 p. (in Russ.).

3. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). M.: Nauka, 1977. 640 p. (in Russ.).

4. Muskhelishvili N.I. *Singuliarnye integral'nye uravneniia* (Singular integral equations). M.: Nauka, 1968. 511 p. (in Russ.).

5. Rasulov K.M. *Izvestiia SmolGU.* 2008. no. 2. pp. 94–104. (in Russ.).

6. Rasulov K.M. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*. 2010. no 3(102). pp. 31–37. (in Russ.).

[1] Rasulov Karim Magomedovich is Dr.Sc (Physics and Mathematics), Professor, The Head of the Mathematical Analysis Department, Smolensk State University.
E-mail: kahrimanr@yandex.ru