Математика

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ НЕПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП

***В.А. Антонов*[1], *Н.Н. Аминева*[2]**

Получено полное описание конечных разрешимых групп, в которых для любой непримарной подгруппы A индекс $|N(A): A\cdot C(A)|$ делит некоторое простое число.

Ключевые слова: группа, подгруппа, автоморфизм, нормализатор, централизатор.

В этой работе через $N(A)$ и $C(A)$ обозначаются нормализатор и централизатор подгруппы A во всей группе G. Если A – произвольная подгруппа группы G, то $N(A) \geq A \cdot C(A)$, а индекс $|N(A): A \cdot C(A)|$ равен порядку группы внешних автоморфизмов подгруппы A, индуцированных элементами группы G. В данной работе изучается строение конечных групп G, в которых для любой непримарной подгруппы A почти все ее автоморфизмы, индуцированные элементами из G, являются внутренними. А именно, для любой такой подгруппы A индекс $|N(A): A \cdot C(A)|$ делит некоторое простое число. Такие группы будем называть NS_{np}-группами.

В дальнейшем p, q и r – простые числа, причем $p \neq q$.

Отметим, что свойство быть NS_{np}-группой переносится на подгруппы и факторгруппы.

Неабелеву конечную p-группу G условимся называть (p,n)-группой, если G обладает абелевой максимальной подгруппой и факторгруппа $G/Z(G)$ является группой максимального класса n. В частности, $(p,1)$-группы это p-группы с условием $|G/Z(G)| = p^2$. Отметим еще, что если G является (p,n)-группой и $n > 1$, то $|G/(G' \cdot Z(G))| = p^2$ и абелева максимальная подгруппа из G является характеристической подгруппой группы G.

Лемма ([1], теорема 1). В неабелевой конечной p-группе G в том и только том случае индекс $|N(A): A \cdot C(A)|$ делит p для любой подгруппы A, когда G является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Теорема 1. Непримарная неабелева нильпотентная группа G в том и только том случае является NS_{np}-группой, когда $G = P \times H$, подгруппа H абелева, а силовская p-подгруппа P является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Доказательство. Если P и Q – неабелевы силовские p- и q-подгруппы из G, $G = P \times Q \times R$, а A и B – максимальные абелевы подгруппы из P и Q соответственно, то для подгруппы $H = A \times B \times R$ индекс $|N(H): H \cdot C(H)| = |G: H|$ делится на pq, что невозможно. Поэтому только одна силовская подгруппа группы G неабелева. Пусть P – эта подгруппа и $G = P \times R$. Если A – произвольная неединичная подгруппа из P и $H = A \times R$, то из того, что индекс $|N(H): H \cdot C(H)|$ делит p следует, что и $|N_P(A): A \cdot C_P(A)|$ тоже делит p. В силу леммы P является (p,n)-группой для некоторого числа n.

Достаточность следует из леммы.

Теорема доказана.

[1] Антонов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.
[2] Аминева Нажия Нажитовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: najiya_amineva@mail.ru

Теорема 2. Конечная ненильпотентная разрешимая группа G в том и только том случае является NS_{np}-группой, когда выполняется один из следующих случаев:

1) $G = H\lambda P$, где H – абелева холлова p'-подгруппа из G, $|P : C_p(H)| = p$, а группа P либо абелева, либо является (p,n)-группой, и если $C_P(H)$ неабелев, то $n = 1$ и для некоторого $z \in Z(P)$ $P = C_P(H) \cdot \langle z \rangle$;

2) $G = H\lambda P$, $H = Q \times K$, силовская q-подгруппа Q группы G является $(q,1)$-группой и P действует на $Q/Z(Q)$ неприводимо, подгруппа K абелева, а силовская p-подгруппа P группы G либо абелева, либо является (p,n)-группой, $C_P(H)$ абелев и $|P : C_P(H)| = p$;

3) $G = P\lambda\langle x \rangle$, P – силовская p-подгруппа, $|x| = q$ и для любой x-допустимой подгруппы A из P индекс $|(N_P(A) \cap C(x)) : (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))|$ делит p;

4) $G = P\lambda\langle x \rangle$, P – силовская p-подгруппа, $|x| = q^2$, $P\lambda\langle x^q \rangle$ является группой типа 3), для любой x-допустимой подгруппы A из P индекс $|(N_P(A) \cap C(x)) : (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))|$ делит p, и если при этом $[x, A] \neq 1$, то $C_P(x^q) = (A \cap C_P(x^q)) \cdot (C_P(A) \cap C(x^q))$;

5) $G = P\,\lambda\,(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $x^q = y^r = 1$, $r \neq p$, подгруппа $P\lambda\langle t \rangle$ является группой типа 3) для любого элемента t простого порядка из $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$, и если A – $\langle x, y \rangle$-допустимая подгруппа из P, то индекс $|(N_P(A) \cap C(\langle x, y \rangle)) : (A \cap C(\langle x, y \rangle)) \cdot (C_P(A) \cap C(\langle x, y \rangle))|$ делит p, и если, например, $x \notin C(A)$, то $C_P(y) = (A \cap C(y)) \cdot (C_P(A) \cap C(y))$;

6) $G = P\,\lambda\,(\langle x \rangle \lambda \langle y \rangle)$, $x^q = y^r = 1$, $r \neq p$, $xy \neq yx$, подгруппа $P\lambda\langle t \rangle$ является группой типа 3) для любого неединичного элемента $t \in \langle x \rangle\,\lambda\,\langle y \rangle$, и если A – $\langle x, y \rangle$-допустимая подгруппа из P, то индекс $|(N_P(A) \cap C(\langle x, y \rangle)) : (A \cap C(\langle x, y \rangle)) \cdot (C_P(A) \cap C(\langle x, y \rangle))|$ делит p, а $C_P(x) = (A \cap C(x)) \cdot (C_P(A) \cap C(x))$;

7) $G = (F\lambda\,\langle x \rangle) \cdot \langle y \rangle$, $F \cdot \langle y \rangle$ – силовская p-подгруппа G, $|x| = q$, $y^p \in F$, $[x, y] \notin F$, подгруппа $F\lambda\,\langle x \rangle$ – группа типа 3), а $(C_P(x) \times \langle x \rangle) \cdot \langle y \rangle$ – группа типа 1), и если A – $\langle x, y \rangle$-допустимая подгруппа из P и $H = A \cdot \langle x, y \rangle$, то $|C_{N(H)}(H) : C(H)|$ делит p, а

$$C_F(x) = (A \cap C(x)) \cdot (C_F(A) \cap C(x));$$

8) $G = \left(F\,\lambda(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)\right) \cdot \langle t \rangle$, F является p-группой, $x^q = y^q = 1$, $t^r \in F$, элемент t действует на $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$ неприводимо, подгруппа $F\,\lambda(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$ является группой типа 5), при этом, если $r \neq p$, то $F\lambda\langle t \rangle$ – группа типа 3, и если A – $\langle x, y, t \rangle$-допустимая подгруппа из F, то $C_F(\langle x \rangle \times \langle y \rangle) = (A \cap C(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \cdot (C_F(A) \cap C(\langle x \rangle \times \langle y \rangle))$.

Доказательство. Обозначим через F подгруппу Фиттинга группы G. Тогда, как известно, $C(F) \leq F$.

Предположим сначала, что подгруппа F не является примарной группой. Тогда F либо абелева, либо является группой из теоремы 1, а $|G : F| = p$ для некоторого простого числа p. Это означает, в частности, что $G = H\,\lambda P$, где H – нильпотентная холлова p'-подгруппа из G, а P – силовская p-подгруппа группы G.

Если A произвольная неединичная подгруппа из P и $B = H\,\lambda\,A$, то из того, что $H \cdot N_P(H) \leq N(B)$, $C(B) \leq C(A)$ и определения NS_{np}-группы следует, что индекс $|N_P(A) : A \cdot C_P(A)|$ делит p, т.е. подгруппа P либо абелева, либо является (p,n)-группой.

Предположим сначала, что подгруппы P и H абелевы. Если $|P| > p$, a – элемент простого порядка из P и $B = H\,\lambda\langle a \rangle$, то $|P : C_p(H)| = |G : B \cdot C(B)| = p$, т.е. G – группа типа 1) из условия теоремы.

Пусть теперь H абелева, а P является (p,n)-группой. Если подгруппа H непримарна, то $|P : C_P(H)| = p$. Если же H является q-группой для некоторого простого числа q, то из непримарности F следует, что $F\cap P\neq 1$. Но тогда и $A=F\cap Z(P)\neq 1$, т.е. и в этом случае $|P:C_P(H)|=|G:H\cdot A\cdot C(H\cdot A)|=p$. Предположим, что подгруппа $C_P(H)$ неабелева. Если $n=1$, то $P=C_P(H)\cdot Z(P)$, т.е. $P=C_P(H)\cdot\langle z\rangle$, где $z\in Z(P)$ и G – группа типа 1). Пусть $n>1$ и $P=T\cdot\langle x\rangle$, где T – абелева максимальная подгруппа из P. Так как $C_P(H)$ неабелев, то можно считать, что $x\in C(H)$, т.е. $C_P(H)=C_T(H)\cdot\langle x\rangle$. Пусть $P_0=C_T(H)$ и $A=H\times P_0$. Из $H\lhd G$ следует, что $P_0\lhd P$. Так как P_0 максимальна в T, то $|P:P_0|=p^2$. Из $n>1$ следует, что $C_P(P_0)=T$ и, следовательно, $C(A)=C(H)\cap C(P_0)=\left((H\times P_0)\cdot\langle x\rangle\right)\cap(H\,\lambda\,T)=H\times P_0=A$. Но тогда $|G:A\cdot C(A)|=|P:P_0|=p^2$, что невозможно. Таким образом, при $n>1$ подгруппа $C_P(H)$ абелева и G – группа типа 1).

Предположим теперь, что подгруппа H неабелева. Тогда $H=Q\times K$, где K – абелева холлова q'-подгруппа из H, а Q является (q,n)-группой для некоторого $n\geq 1$. Если $n>1$, то абелева максимальная подгруппа T является характеристической подгруппой Q. Если при этом $K\neq 1$, то подгруппа $A=T\times K$ непримарна и инвариантна в G. Но тогда из $C_Q(A)=T$ и определения NS_{np}-групп следует, что индекс $|N(A):A\cdot C(A)|=q$, т.е. $P\leq C(A)$, и, следовательно, группа P действует приводимо на факторгруппе $Q/Q'=\langle aQ'\rangle\times\langle xQ'\rangle$, где $a\in T$ и $Q=T\cdot\langle x\rangle$. В силу теоремы Машке ([2], теорема 20.2.2) можно считать, что подгруппа $T_1=Q'\cdot\langle x\rangle$ тоже P-допустима. Как и выше, получим $P\leq C(T_1\times K)$. Отсюда следует, что $P\leq C(T_1\cdot T)=C(Q)$ и $G=Q\times(K\,\lambda\,P)$. Пусть A – произвольная подгруппа из $R=K\lambda P$ и $B=T\times A$. Так как $|N(B):B\cdot C(B)|$ делит простое число и $x\in N(B)\setminus(B\cdot C(B))$, то этот индекс равен q и, следовательно, $N_R(A)=A\cdot C_R(A)$. Из произвольности A и леммы 2 из [3] следует, что группа R абелева и G нильпотентна, что невозможно.

Таким образом, в случае $n>1$ подгруппа K тривиальна. Но тогда из непримарности F следует, что $P\cap F\neq 1$. Заменяя в предыдущих рассуждениях подгруппу K подгруппой $P\cap F$, снова получим противоречие. Следовательно, Q является $(q,1)$-группой и P действует на $Q/Z(Q)$ неприводимо. Если A – произвольная неединичная подгруппа из P и $B=H\,\lambda\,A$, то из того, что $|N(B):B\cdot C(B)|$ делит p, следует, что и $|N_P(A):A\cdot C_P(A)|$ тоже делит p, т.е. P либо абелева, либо является (p,n)-группой. Если $C_P(H)$ неабелев, то F является нильпотентной NS_{np}-группой, содержащей две неабелевы силовские подгруппы Q и $C_P(H)$, что невозможно. Таким образом, в этом случае G является группой типа 2).

В дальнейшем считаем, что F является p-группой для некоторого простого числа p. Пусть A/F – минимальная нормальная подгруппа группы G/F. Тогда A/F является элементарной абелевой q-группой, $q\neq p$. Если a – элемент порядка q из A и $B=F\,\lambda\langle a\rangle$, то из $C(B)\leq C(F)\leq F\leq B$ и определения NS_{np}-группы следует, что индекс $|A:B|$ делит q, т.е. $|A/F|\leq q^2$. Так как $|G:A\cdot C(A)|=|G:A|$ делит простое число, то возможен только один из следующих случаев: *а*) $|G/F|=q$; *б*) $|G/F|=qr$; *в*) $|G/F|=q^2r$. Рассмотрим каждый из этих случаев:

а) $G=F\,\lambda\langle x\rangle$, $x^q=1$. Пусть A – x-допустимая подгруппа из F и $H=A\lambda\langle x\rangle$. В силу леммы Фраттини ([2], лемма 17.1.8)

$$N(H)=A\cdot N_{N(H)}(\langle x\rangle)=A\cdot C_{N(H)}(x)=\left(A\cdot C_{N_F(A)}(x)\right)\lambda\langle x\rangle,$$

а $H\cdot C(H)=A(C_F(A)\cap C(x))\lambda\langle x\rangle$. Поэтому

$$N(H)/H\cdot C(H)=A\cdot(N_F(A)\cap C(x))/A\cdot\left(C_F(A)\cap C(x)\right)\cong$$
$$(N_F(A)\cap C(x))\big/(C_F(A)\cap C(x))\cdot\left(A\cap C(x)\right),$$

т.е. индекс $|(N_F(A)\cap C(x)):(C_F(A)\cap C(x))\cdot\left(A\cap C(x)\right)|$ делит p и G – группа типа 3);

б) Предположим, сначала, что $G = F\lambda\langle x\rangle$, $|x| = q^2$. Тогда $F\lambda\langle x^q\rangle$ – группа типа 3). Пусть A – неединичная x-допустимая подгруппа из F и $H = A\lambda\langle x\rangle$. Как и в пункте *а*) получим, что $|(N_F(A)\cap C(x))/(C_F(A)\cap C(x))\cdot(A\cap C(x))|$ делит p. Рассмотрим подгруппу $K = A\lambda\langle x^q\rangle$. Если $x\notin C(A)$, то из $x\in N(K)$ следует, что $|N(K):K\cdot C(K)| = q$. Но тогда $N_F(A)\cap C(x^q) = (C_F(A)\cap C(x^q))\cdot\left(A\cap C(x^q)\right)$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях подгруппу A на x-допустимую подгруппу $N_F(A)$, будем иметь

$$N_F(N_F(A))\cap C(x^q) = (C_F(N_F(A))\cap C(x^q))\cdot(N_F(A)\cap C(x^q)) = (C_F(A)\cap C(x^q))\cdot(A\cap C(x^q)).$$

Продолжая этот процесс и учитывая, что F удовлетворяет нормализаторному условию, через конечное число шагов получим $C_F(x^q) = C_A(x^q)\cdot C_{C_F(A)}(x^q)$, т.е. G – группа типа 4).

Случай $G = F\lambda(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)$, где $x^q = y^r = 1$, $r\neq p$, рассматривается аналогично. При этом получим группу типа 5).

Пусть теперь $G = F\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$, $x^q = y^r = 1$, $r\neq p$ и $xy\neq yx$. Тогда для любого неединичного элемента $t\in\langle x,y\rangle$ подгруппа $F\lambda\langle t\rangle$ является группой типа 3). Пусть A – $\langle x,y\rangle$-допустимая подгруппа из F и $H = A\lambda\langle x,y\rangle$. Как и выше, несложно получить, что индекс $\left|(N_F(A)\cap C(\langle x,y\rangle)):(C_F(A)\cap C(\langle x,y\rangle))\cdot\left(A\cap C(\langle x,y\rangle)\right)\right|$ делит p. Если же $H = A\lambda\langle x\rangle$, то из $y\in N(H)\setminus C(H)$ следует, что $|N(H):H\cdot C(H)| = r$. Как и выше, это приводит к равенству $C_F(x) = C_A(x)\cdot C_{C_F(A)}(x)$, т.е. G – группа типа 6).

Предположим, наконец, что $|G/F| = pq$, т.е. $G = (F\lambda\langle x\rangle)\cdot\langle y\rangle$, $x^q = 1$, $y^p\in F$. Так как $\langle F,y\rangle$ не инвариантна в G, то $[x,y]\notin F$. Тогда $F\lambda\langle x\rangle$ – группа типа 3), а

$$(C_F(x)\times\langle x\rangle)\lambda\langle y\rangle = \langle x\rangle\lambda(C_F(x)\cdot\langle y\rangle)$$

является группой типа 1). Если A – $\langle x,y\rangle$-допустимая подгруппа из F, то из $y\in N(\langle A,x\rangle)\setminus C(\langle A,x\rangle)$ и определения NS_{np}-группы снова получим, что $C_F(x) = C_A(x)\cdot C_{C_F(A)}(x)$.

Если же $H = (A\lambda\langle x\rangle)\cdot\langle y\rangle$, то в силу леммы Фраттини $N(H) = H\cdot C_{N(H)}(x)$. Учитывая, что $C_{N_H}(x) = C_A(x)\cdot C_{C_{N(H)}(A)}(x)$, имеем $N(H) = H\cdot C_{C_{C_H(A)}(A)}(x)$. В то же время $H\cdot C(H) = H\cdot(C_{C(A)}(x)\cap C(y))$. Поэтому индекс $|N(H):H\cdot C(H)| = |C_{N(H)}(A\lambda\langle x\rangle):C(H)|$ делит p и G – группа типа 7);

в) Пусть $G = (F\lambda(\langle x\rangle\times\langle y\rangle))\cdot\langle t\rangle$, $x^q = y^q = 1$, $t^r\in F$. В силу леммы Фраттини можно считать, что $t\in N(\langle x,y\rangle)$. Но тогда из минимальности $\langle x,y\rangle$ следует, что t действует на $\langle x\rangle\times\langle y\rangle$ неприводимо. По уже доказанному $F\lambda(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)$ является группой типа 5) и если $r\neq p$, то $F\lambda\langle t\rangle$ – группа типа 3). Если A является $\langle x,y,t\rangle$-допустимой подгруппой из F, то полагая $B = A\lambda(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)$ из того, что $t\in N(B)\setminus(B\cdot C(B))$ как и выше, получим, что $C_F(\langle x\rangle\times\langle y\rangle) = C_A(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\cdot C_{C_F(A)}(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)$, т.е. G – группа типа 8).

Достаточность следует из приведенных выше рассуждений. Теорема доказана.

Отметим еще, что из условия $C_F(x) = \left(A\cap C(x)\right)\cdot(C_F(A)\cap C(x))$ для любой $\langle x,y\rangle$-допустимой подгруппы (пункты 4)–8) теоремы) следует в частности, что $F = [F,x]\cdot C_F([F,x])$. Кроме того, это условие выполняется автоматически, если подгруппа F абелева.

Примеры. Приведем простейшие примеры, показывающие, что все случаи из теоремы 2 реализуются.

Группы $G_1 = S_3\times\langle a\rangle$, $|a| = 5$, $G_2 = (\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\lambda\langle c\rangle$, $a^3 = b^4 = c^2 = 1$, $a^c = a^{-1}$, $b^c = b^{-1}$ и $G_3 = (\langle a\rangle\times Q_8)\lambda\langle c\rangle$, $a^3 = c^2 = 1$, $a^c = a^{-1}$, $[Q_8,c] = 1$ являются группами из пункта 1) теоремы.

Пусть $G = (Q_8 \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $a^9 = b^3 = 1$, $a^b = a^4$ и b действует на Q_8 как естественный автоморфизм порядка 3. Тогда G – группа типа 2) с неабелевой подгруппой P, а ее подгруппа $Q_8 \lambda \langle b \rangle$ – группа типа 2) с абелевой подгруппой P.

Группа $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $a^9 = b^3 = c^2 = 1$, $a^b = a^4$, $a^c = a^{-1}$, $b^c = b$ является группой типа 3). В ней для подгрупп $H_1 = \langle a \rangle \lambda \langle c \rangle$ и $H_2 = \langle b \rangle \lambda \langle c \rangle$ выполняются равенства $|N(H_1) : H_1 \cdot C(H_1)| = 3$, а $N(H_2) = H_2 \cdot C(H_2)$.

Группа Фробениуса порядка 20 – простейший пример группы типа 4). Более интересным примером группы типа 4) является группа $G = \big((\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times \langle c \rangle \times \langle d \rangle\big) \lambda \langle x \rangle$, $a^9 = b^3 = c^3 = d^3 = x^4 = 1$, $a^b = a^4$, $a^x = a^{-1}$, $b^x = b$, $c^x = cd$, $d^x = cd^2$. В этой группе для подгрупп $H_1 = \langle a \rangle \lambda \langle x \rangle$ и $H_2 = \langle a \rangle \lambda \langle x^2 \rangle$ выполняются равенства $|N(H_1) : H_1 \cdot C(H_1)| = 3$, а $N(H_2) = H_2 \cdot C(H_2)$.

Группа Фробениуса порядка $7 \cdot 6$ – группа типа 5) для $r \neq q$, а $S_3 \times S_3$ для $r = q$.

Группа $GL(3,2) \cong PSL(2,7)$ содержит неабелевы подгруппы H_1 и H_2 порядков 21 и 6 соответственно. Если A – элементарная абелева группа порядка 8, то $G_1 = A \lambda H_1$ и $G_2 = A \lambda H_2$, где H_1 и H_2 действуют на A как подгруппы $GL(3,2)$, являются группами типа 6) и 7) соответственно.

Пусть $p \neq 2$. Тогда группа $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \lambda ((\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \lambda \langle t \rangle)$, где $a^p = b^p = c^p = 1$, $x^2 = y^2 = t^3 = 1$, $a^x = a$, $b^x = b^{-1}$, $c^x = c^{-1}$, $a^y = a^{-1}$, $b^y = b$, $c^y = c^{-1}$, $x^t = y$, $y^t = xy$, $a^t = c$, $b^t = a$, $c^t = b$, является группой типа 8).

Литература

1. Антонов, В.А. О группах с относительно малыми нормализаторами всех (всех абелевых) подгрупп / В.А. Антонов // Теория групп и ее приложения: сб. науч. тр. 8-й междун. школы-конф., посвящ. 75-летию В.А. Белоногова. – Нальчик: Изд-во КБГУ, 2010. – С. 8–17.

2. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1996. – 288 с.

3. Антонов, В.А. Локальные конечные группы с малыми нормализаторами / В.А. Антонов // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, № 3. – С. 296–302.

Поступила в редакцию 13 марта 2012 г.

FINITE SOLVABLE GROUPS WITH RELATIVELY SMALL NONPRIMARY SUBGROUPS NORMALIZERS

***V.A. Antonov*[1], *N.N. Amineva*[2]**

Complete description of finite solvable groups, in which for every nonprimary subgroup A index |N(A): A·C(A)| divides some prime number, is obtained.

Keywords: group, subgroup, automorphism, normalizer, centralizer.

References

1. Antonov V.A. O gruppakh s otnositel'no malymi normalizatorami vsekh (vsekh abelevykh) podgrupp (Groups with relatively small normalizers of all subgroups (all abelian) subgroups). *Teoriia grupp i ee prilozheniia: sb. nauch. tr. 8-oi mezhdun. shkoly-konf., posviashch. 75-letiiu V.A. Belonogova* (Group theory and its applications: Proceedings of 8th International School-Conference dedicated to the 75 anniversary of V.A. Belonogov). Nal'chik, KBGU, 2010. pp. 8–17. (in Russ.).

2. Kargapolov M.I., Merzliakov Iu.I. *Osnovy teorii grupp* (Fundamentals of Group Theory). Moscow: Nauka, 1996. 288 p. (in Russ.).

3. Antonov V.A. Lokal'nye konechnye gruppy s malymi normalizatorami (Local finite groups with small normalizer). *Mat. Zametki*. 1987. Vol. 41, no. 3. pp. 296–302. (in Russ.).

[1] Antonov Vladimir Alexeevich is Dr. Sc.(Physics and Mathematics), Professor, General Mathematics Department, South Ural State University.
[2] Amineva Nazhiya Nazhitovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, General Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: najiya_amineva@mail.ru