УДК 515.124.3

ПРИЗНАКИ *h*-ОДНОРОДНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

С.В. Медведев [1]

Доказан критерий *h*-однородности для метрического однородного пространства. В качестве следствия получены два признака *h*-однородности метрических пространств.

Ключевые слова: однородное пространство, h-однородное пространство, π-база, группа, гомеоморфизм.

h-однородные пространства играют важную роль в дескриптивной теории множеств. В заметке доказывается критерий, позволяющий выделить *h*-однородные пространства из класса однородных метрических пространств. С помощью этого критерия получены два признака *h*-однородности пространства.

Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y гомеоморфны. $w(X)$ – вес пространства X. Под кардиналом k понимается множество всех ординалов, которые меньше k. Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω; также $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Пространство X называется *однородным*, если для любых двух точек a и b из X найдется гомеоморфизм $f : X \to X$, для которого $f(a) = b$. Пространство X называется *h-однородным*, если каждое непустое открыто-замкнутое множество из X гомеоморфно всему пространству X. Доказано, что каждое метрическое *h*-однородное пространство является однородным. Семейство γ непустых открытых множеств называется *π-базой* пространства X, если каждое непустое открытое множество из X содержит некоторый элемент семейства γ.

Остальные используемые определения и обозначения можно найти в [1].

Теорема 1. *Пусть дано однородное, нигде не локально компактное метрическое пространство X веса k, причем $\mathrm{Ind}X = 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X – h-однородное пространство,*

2) *для каждого непустого открытого множества $U \subseteq X$ найдутся такие непустое открытое множество $V \subseteq X$ и дискретное открытое семейство $\{V_\alpha : \alpha \in k\}$, что объединение $\cup\{V_\alpha : \alpha \in k\} \subseteq U$ и каждое V_α гомеоморфно V.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Зафиксируем открытое множество $U \subseteq X$. Из *h*-однородности пространства X следует, что $w(U) = w(X) = k$. Более того, U содержит замкнутое (в X) дискретное множество D мощности k. Так как метрические пространства коллективно нормальны, найдется такое дискретное открытое семейство $\{V_\alpha : \alpha \in k\}$, что пересечение $D \cap V_\alpha$ состоит из одной точки для любого α. Тогда каждое $V_\alpha \approx X \approx V$ по определению *h*-однородного пространства.

2) $\Rightarrow$ 1). Выберем базу топологии $\mathcal{B}$ пространства X, состоящую из открыто-замкнутых множеств. Для каждого $U \in \mathcal{B}$, удовлетворяющего условию 2) из формулировки теоремы, построим открыто-замкнутое множество $U^* \subseteq U$, которое гомеоморфно X. Для этого зафиксируем точку $a \in V$. По условию пространство X однородное. Поэтому для любой точки $x \in X$ найдется такой гомеоморфизм $f_x : X \to X$, что $f_x(a) = x$. Так как $\mathrm{Ind}X = 0$, то из покрытия $\{f_x(V) : x \in X\}$ пространства X можно выделить дискретное подпокрытие $\{W_\alpha : \alpha \in k_1\}$. Из условия $w(X) = k$ вытекает неравенство $k_1 \le k$. По построению каждое множество W_α гомеоморфно открыто-замкнутому подмножеству из V_α. Следовательно, $X = \cup\{W_\alpha : \alpha \in k_1\}$ гомеоморфно некоторому открыто-замкнутому подмножеству U^* из $\cup\{V_\alpha : \alpha \in k_1\} \subseteq U$. Семейство $\{U^* : U \in \mathcal{B}\}$ образует π-базу пространства X. Тогда по теореме 2.4 из [2] пространство X будет *h*-однородным. Теорема доказана.

Рассмотрим случаи, когда существует семейство, удовлетворяющее условию 2) из теоремы 1.

---

[1] Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Теорема 2. *Пусть дано однородное, однородное по весу метрическое пространство X веса k, причем* $cf(k) > \omega$ *и* $IndX = 0$. *Тогда X – h-однородное пространство.*

Доказательство. Так как $cf(k) > \omega$, то пространство X нигде не локально компактно.

Возьмем непустое открыто-замкнутое множество $U \subseteq X$. Так как $cf(k) > \omega$ и $IndX = 0$, то существует дискретное открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in k\}$ пространства X. Зафиксируем точку $a \in X$ и убывающую открыто-замкнутую базу $\{O_n : n \in \omega\}$ в точке a. Для каждого $n \in \omega$ через k_n обозначим мощность семейства $\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U} : U$ содержит открыто-замкнутое подмножество, гомеоморфное $O_n\}$. Тогда $k_0 \le k_1 \le \ldots$. Из однородности пространства X следует, что каждое $U \in \mathcal{U}$ принадлежит некоторому семейству $\mathcal{U}_n$. Тогда $\sup\{k_n : n \in \omega\} = k$. Так как $cf(k) > \omega$, то найдется такой номер j, что $k_j = k$. Поэтому $\mathcal{U}_j = \{W_\alpha : \alpha \in k\}$. По построению $O_j \approx V_\alpha$ для некоторого $V_\alpha \subseteq W_\alpha$. Положим $V = O_j$. Семейство $\{V_\alpha : \alpha \in k\}$ дискретно в X и $\cup\{V_\alpha : \alpha \in k\} \subseteq U$. Тогда пространство X будет h-однородным по теореме 1. Теорема доказана.

Топологическая группа G называется *локально вполне ограниченной*, если существует такое непустое открытое множество $U \subseteq G$, что для любой окрестности V единичного элемента e группы G выполняются условия $U \subseteq F \cdot V$ и $U \subseteq V \cdot F$ для некоторого конечного множества $F \subseteq G$.

Теорема 3. *Пусть дана сепарабельная нульмерная метризуемая топологическая группа G, которая не является локально вполне ограниченной. Тогда G – h-однородное пространство.*

Доказательство. Так как группа G не локально вполне ограничена, то она нигде не локально компактна. По теореме Биркгофа–Какутани существует левоинвариантная метрика d, совместимая с топологией группы G. Зафиксируем базу $\{O_n : n \in \omega\}$ для единичного элемента e группы G, состоящую из открыто-замкнутых множеств и удовлетворяющую условию $diam(O_n) < (n+1)^{-1}$ для любого $n \in \omega$. Возьмем непустое открыто-замкнутое множество $U \subseteq G$. Внутри U выделим непустое открыто-замкнутое множество $U^* \subseteq U$ так, чтобы расстояние $d(U^*, G \setminus U) > m^{-1}$ для некоторого $m \in \omega$. Так как группа G не локально вполне ограничена, то найдется бесконечное множество $\{a_n : n \in \omega\} \subset U^*$, которое j^{-1}-метрически дискретно для некоторого $j \in \omega$; причем, без ограничения общности, $j > m$. Положим $V = O_{2j}$ и $V_n = a_n \cdot V$. Несложно проверить, что множества $\{V_n : n \in \omega\}$ попарно не пересекаются и их объединение принадлежит U.

По теореме 1 пространство G будет h-однородным. Теорема доказана.

Литература

1. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
2. Terada, T. Spaces whose all nonempty clopen subspaces are homeomorphic / T. Terada // Yokohama Math. J. – 1993. – Vol. 40. – P. 87–93.

Поступила в редакцию 20 августа 2012 г.

CHARACTERISTICS OF *h*-HOMOGENEITY OF A SPACE

S.V. Medvedev[1]

The criterion of *h*-homogeneity of a homogeneous metric space with Ind$X$ = 0 is proved. As a consequence we obtain two characteristics of h-homogeneity for metric spaces.

Keywords: homogeneous space, h-homogeneous space, π-base, group, homeomorphism.

References

1. Engel'king, R. *Obshchaia topologiia* (General Topology). Moscow: Mir, 1986. – 752 p. [Engelking R. General Topology. Warsaw: PWN, 1977. 626 p.]
2. Terada T. Spaces whose all nonempty clopen subspaces are homeomorphic. *Yokohama Math. J.* 1993. Vol. 40. pp. 87–93.

[1] Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand.Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analysis Department, South Ural State University. E-mail: medv@math.susu.ac.ru