

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

В.Л. Дильман¹, А.И. Носачева²

Изучается напряженно-деформированное состояние поперечного пластического слоя в растягиваемой полосе при плоской деформации на основе использования различных гипотез сечений. Получены явные аналитические выражения для вычисления напряжений в пластическом слое. Проведен сравнительный анализ влияния различных гипотез на результаты.

Ключевые слова: пластический слой, плоская деформация, неоднородное состояние, напряженное состояние, гипотезы сечений.

Введение. Существование участков конструкций из менее прочного (МП) материала является неизбежным следствием многих существующих технологий производства сварных соединений. Исследование возникающего в МП слоях и прослойках контактного упрочнения позволяет точнее оценить несущую способность неоднородных соединений, содержащих такие слои. В работе рассматривается дискретно-неоднородная полоса, состоящая из однородного изотропного идеально пластического материала, содержащая прямоугольную вставку из менее прочного материала, т.е. имеющего меньший предел текучести. Напряженное состояние полосы – плоская деформация, внешняя нагрузка – растяжение в направлении полосы. Результаты могут быть перенесены на упрочняемые материалы с заменой предела текучести на пластическую постоянную, характеризующую момент потери общей пластической устойчивости, так как в критическом состоянии поведение упрочняемого материала является близким к идеально пластическому.

При математическом моделировании напряжённо-деформированного состояния (НДС) МП слоя возникают недоопределённые краевые задачи для систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Один из подходов к решению таких задач предложен и применялся в работах [1–3]. Он состоит из двух пунктов.

1. Находится решение в окрестности свободной поверхности, где оно однозначно определяется граничными условиями, для чего вычисляются вдоль характеристик, точно или приближенно, инварианты Римана, с помощью которых решается задача сопряжения для напряжений на контактной поверхности. Найденные напряжения используются для вычисления критической нагрузки и для доопределения задачи из следующего пункта.

2. Находится решение в окрестности поперечной оси симметрии слоя с использованием граничных условий на контактной поверхности, полученных в предыдущем пункте, и ограничений на классы решений на основе частичного предугадывания внутреннего состояния материала.

Естественным ограничением такого вида является гипотеза плоских поперечных сечений (ГППС) $v_y = W(y)$, где v_y – скорость перемещения точек слоя в поперечном направлении. В работах [1–4] на основе ГППС проведено исследование НДС поперечного МП слоя полосы при растягивающей нагрузке в случае плоской деформации. Уточнением ГППС являются гипотезы, учитывающие прогиб плоских сечений при поперечном растяжении слоя $v_y = W(y) \cdot (1 + \varphi(x, \delta))$, где φ – некоторая «малая» величина, характеризующая малым параметром δ . Например, в гипотезе параболических сечений, использованной при математическом моделировании напряжённо-го состояния прослоек в стержнях [5], $\varphi(x, \delta) = \pm \delta x^2$ (минус – при растяжении). При плоской деформации аппроксимация $\varphi(x, \delta) = -\delta x^2$ не вполне удобна [6]. В работе применяется гипотеза

$\varphi(x, \delta) = -2 \sin^2 \frac{\delta x}{2}$, то есть предполагается, что

$$v_y = W(y) \cos(\delta x). \quad (1)$$

¹ Дильман Валерий Лейзерович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: dilman49@mail.ru

² Носачева Алия Исламовна – ассистент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет.

E-mail: alika@74.ru

Математика

Цель работы – исследование напряжённого состояния МП слоя при гипотезе (1) и сравнение результатов с результатами, основанными на ГППС.

Нахождение приближенных зависимостей для напряжений на основе гипотезы (1). Как известно, НДС пластической среды при плоской деформации в безразмерных переменных определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy} = 4; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}. \quad (6)$$

Функции, входящие в уравнения (2)–(6), определены на прямоугольнике $[-1;1] \times [-\kappa; \kappa]$, где $\kappa \in (0;1]$ – относительная толщина МП слоя. Введём обозначение:

$$Y(y) = \frac{W''(y)}{W'(y)} + \delta^2 \frac{W(y)}{W'(y)}.$$

Получим из условия (6) и гипотезы (1):

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4\delta} (\sigma_x - \sigma_y) Y(y) \operatorname{tg}(\delta x).$$

Подставив полученное для τ_{xy} выражение в (4), найдём:

$$\sigma_y - \sigma_x = \pm \frac{4}{\sqrt{4 + Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2}}} = \pm 2 \left(1 - \frac{1}{8} Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2} + \frac{3}{128} Y^4(y) \frac{\operatorname{tg}^4(\delta x)}{\delta^4} - \dots \right)$$

(знак плюс соответствует растяжению соединения, знак минус – сжатию; в работе рассматривается растяжение). Отсюда

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y) \operatorname{tg}(\delta x)}{2\delta} - \frac{Y^3(y) \operatorname{tg}^3(\delta x)}{16\delta^3} + \frac{3Y^5(y) \operatorname{tg}^5(\delta x)}{256\delta^5} - \dots \quad (7)$$

При малых значениях касательных напряжений можно считать, что

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y) \operatorname{tg}(\delta x)}{2\delta}, \quad (8)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = 2 \left(1 - \frac{1}{8} Y^2(y) \frac{\operatorname{tg}^2(\delta x)}{\delta^2} \right). \quad (9)$$

Относительную погрешность в формуле (8) можно оценить величиной

$$0,125 \tau_{xy}^2 (1 - 0,25 \tau_{xy}^2)^{-1,5}.$$

Например, если $\tau_{xy} = 0,3$, относительная погрешность формулы (8) меньше 0,011.

Исключив из (2) и (3) нормальные напряжения, получим нелинейное уравнение относительно неизвестной функции τ_{xy} :

$$-\frac{\partial^2 (\tau_{xy}^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0.$$

Подставив сюда выражения (8) и (9), получим задачу:

$$Y'' + 2YY' = 0, \quad Y(0) = 0. \quad (10)$$

Результаты будут немного точнее, если количество слагаемых увеличить на одно, воспользовавшись равенством (7). После соответствующих рассуждений и преобразований аналог дифференциального уравнения (10) будет выглядеть следующим образом:

$$Y'' + 2YY' - \delta^2 Y = 0. \quad (11)$$

Аналитическим решением данного уравнения при начальных условиях $Y(0) = 0, Y'(0) = A$, где A – некоторая положительная постоянная, является функция:

$$\begin{aligned} Y(y) = & \sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y) + \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sh}(2\sqrt{A}y) \ln \left| \operatorname{ch}(\sqrt{A}y) \right| - 2y \operatorname{ch}^2(\sqrt{A}y) + \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sh}(2\sqrt{A}y) \right) \delta^2 + \\ & + \left[\frac{2 \ln 2 - 1}{A} y + \frac{y^2}{\sqrt{A}} + \left(2 + \frac{8}{3} \ln 2(A-1) + \frac{4 \ln^2 2}{3} \right) y^3 + \right. \\ & + \left. \left(2\sqrt{A} \ln 2 - \frac{2}{\sqrt{A}} + 2A\sqrt{A} - \frac{4\sqrt{A}}{3} \right) y^4 + \left(\frac{4}{15} A \ln^2 2 - \frac{12}{5} A + \frac{8}{15} A^2 \ln 2 + \frac{16}{5} A^2 \right) y^5 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{y^2}{\sqrt{A}} + \frac{5}{2A\sqrt{A}} \right) \operatorname{sh}(2\sqrt{A}y) - \frac{3y}{2A} \operatorname{ch}(2\sqrt{A}y) - \left(\frac{1}{2A\sqrt{A}} + \frac{2y}{\sqrt{A}} \right) \operatorname{th}(\sqrt{A}y) \right] \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{A}y) \delta^4 + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

При малых значениях касательных напряжений можно считать, что

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y)}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\delta x)}{\delta}. \quad (13)$$

Численные эксперименты показали, что решение (12) и решения уравнений (10) и (11) при условиях $Y(0) = 0$ и $Y(\kappa) = b$ при различных подходящих значениях κ и b мало различаются (рис. 1). Поэтому точность основанных на уравнении (10) решений достаточна для приложений и позволяет получить не слишком громоздкие аналитические выражения в силу простоты решений задачи. Общее решение задачи (10) имеет вид

$$Y = \sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y).$$

Формулы (8) и (9) при $\delta \rightarrow 0$ обращаются в известные зависимости [7, 8]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{1}{2} x \sqrt{A} \operatorname{th}(\sqrt{A}y); \\ \sigma_y - \sigma_x &= 2 \left(1 - \frac{1}{8} x^2 A \operatorname{th}^2(\sqrt{A}y) \right). \end{aligned}$$

Пусть наибольшее значение τ_F касательных напряжений τ_{xy} достигается в некоторой точке F с абсциссой x_F на контактной поверхности, которая задается уравнением $y = \kappa$. Постоянная A находится из граничного условия $\tau(x_F, \kappa) = \tau_F$. Тогда для вычисления A следует решать трансцендентное уравнение

$$\sqrt{A} \kappa \operatorname{th}(\sqrt{A} \kappa) = \frac{2 \delta \tau_F \kappa}{\operatorname{tg}(\delta x_F)}. \quad (14)$$

Введём обозначение. Пусть $y = \operatorname{athd}(x)$ – функция, обратная к функции $x = y \operatorname{th} y$. Для малых значений аргумента эта функция хорошо аппроксимируется функцией

$$\psi(x) = \sqrt{x + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2},$$

которая на отрезке $[0; 1]$ даёт ошибку в несколько тысячных. Тогда уравнение (14) можно записать в виде

$$\sqrt{A} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{athd} \left(\frac{2 \delta \tau_F \kappa}{\operatorname{tg}(\delta x_F)} \right).$$

В работах [1–3] получены явные зависимости величин τ_F , σ_F и x_F от параметров κ и K , где K – коэффициент механической неоднородности, т.е. отношение пределов текучести более прочного основного материала полосы и материала менее прочного слоя. Используя их, можно находить коэффициент A . Например, при $\kappa=0,3$ и $K=1,3$ значение параметра $A=5,0024$.

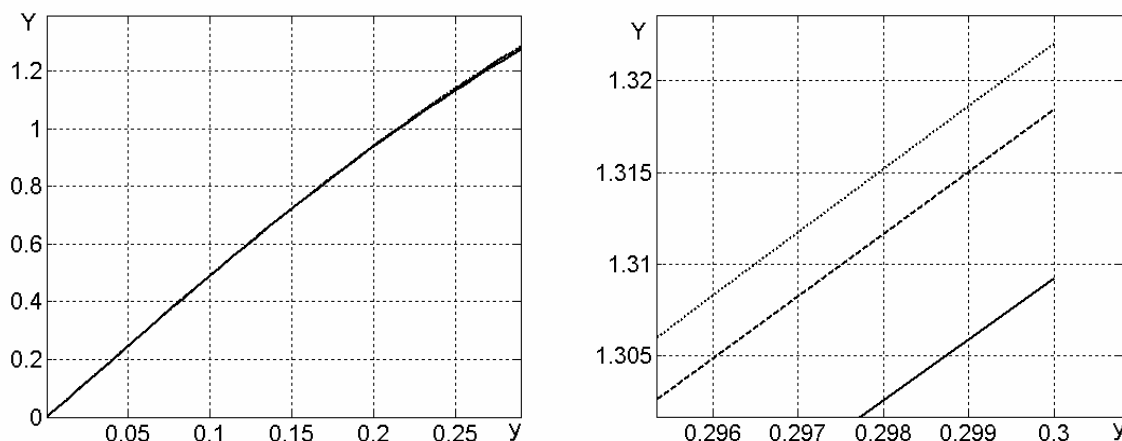


Рис. 1. Графики решения краевых задач для уравнений: (10) – сплошная, (11) – штриховая; график функции (12) – пунктирная; $\kappa=0,3$, $K=1,3$, $y \in [0;0,3]$ (справа – увеличено в окрестности значения $y=0,3$)

Из уравнений равновесия (2) и (3) и формулы (13) интегрированием получим:

$$\sigma_x = \frac{A \ln |\cos(\delta x)|}{2\delta^2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{A}y)} - \frac{\ln |\operatorname{ch}(\sqrt{A}y)|}{2} + C, \quad (15)$$

$$\sigma_y = -\frac{\ln |\operatorname{ch}(\sqrt{A}y)|}{2 \cos^2(\delta x)} + \frac{A \ln |\cos(\delta x)|}{2\delta^2} + 2 + C. \quad (16)$$

Использование условия пластичности (4) вместе с полученным в [1–3] значением σ_F позволяет найти постоянную C :

$$C = \sigma_F + \frac{\ln |\operatorname{ch} \sqrt{A}\kappa|}{2 \cos^2(\delta x_F)} - \frac{A \ln |\cos(\delta x_F)|}{2\delta^2} - 2, \quad \sigma_F = 2 + \frac{(K-1)(3-K)}{2}. \quad (17)$$

На рис. 2 показаны эпюры напряжений на контактной поверхности при гипотезе сечений данной работы при $\delta=0,5$ и ГППС. Видно, что математические модели НС на основе ГППС практически не уступают по точности вычисления напряжений моделям, более детально учитывающим особенности деформирования МП слоёв.

Выводы. Уточнение ГППС в виде гипотезы деформирования плоских поперечных сечений (1) не дает ощутимых преимуществ в точности получаемых результатов. Если при нахождении зависимости касательных напряжений от координат использовать лишь первый член разложения в степенной ряд (формула (8)), допускаемая относительная ошибка при напряжениях, реально возникающих в неоднородных соединениях, не превышает 0,01. Эти соображения позволяют находить достаточно точные приближенные аналитические выражения простого вида для вычисления напряжений как функций координат, например, формулы (15)–(17).

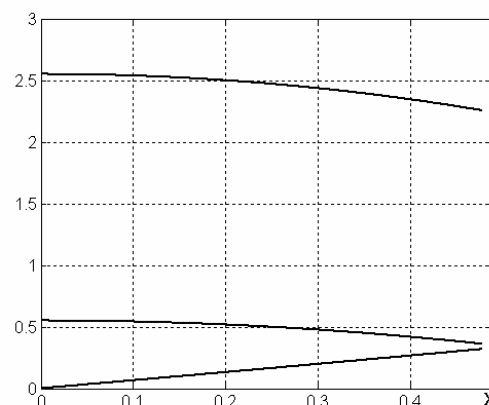


Рис. 2. Зависимость напряжений $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ от x (сверху вниз) на контактной поверхности для значения $\delta=0,5$ при $\kappa=0,3$, $K=1,3$

Литература

1. Дильман, В.Л. Математические модели напряжённого состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 202 с.
2. Дильман, В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 3. – № 17(150). – С. 36–58.
3. Дильман, В.Л. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородных тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек: автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В.Л. Дильман. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 32 с.
4. Дильман, В.Л. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Изв. РАН. МГТ. – 2001. – № 6. – С. 115–124.
5. Дильман, В.Л. Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 793–794.
6. Дильман, В.Л. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния менее прочного поперечного слоя пластической полосы при гипотезах поперечных сечений / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17. – Вып. 2. – С. 262–263.
7. Дильман, В.Л. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации / В.Л. Дильман, А.А. Остсемин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 4. – С. 38–48.
8. Дильман, В.Л. Об одной математической модели напряженного состояния пластического слоя при плоской деформации / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 6. – № 6(46). – С. 19–23.

Поступила в редакцию 21 мая 2012 г.

THE ANALYSIS OF THE STRESS STRAIN STATE OF A HETEROGENEOUS PLASTIC STRIPE

V.L. Dil'man¹, A.I. Nosacheva²

The stress strain state of a cross-section plastic layer in a stretched stripe at flat deformation is studied on the basis of the use of different section hypotheses. Obvious analytic expressions for calculation of a stress state in a plastic layer are received. The comparative analysis of influence of different hypotheses on the results is carried out.

Keywords: plastic layer, flat deformation, heterogeneous joint, stress state, hypotheses of sections.

References

1. Dil'man V.L. *Matematicheskie modeli napryazhennogo sostojaniya neodnorodnih tonkostennih cilindricheskikh obolochek* (Mathematical models of the strain state of heterogeneous thin-walled cylindrical shells). Chelyabinsk: Izdatel'stvo YuUrGU, 2007. 202 p. (in Russ.).
2. Dil'man V.L. Issledovanie analiticheskimi metodami matematicheskikh modelej napryazhennogo sostoyaniya tonkostennih neodnorodnih cilindricheskikh obolochek (Research of the mathematical models of the strain state of the thin-walled heterogeneous cylindrical shells based on analytical methods). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*. 2009. Vol. 3, no. 17 (150). pp. 36–58. (in Russ.).
3. Dil'man V.L. *Matematicheskoe modelirovanie napryazhennogo sostojaniya neodnorodnih tonkostennih cilindricheskikh obolochek: avtoreferat dissertacii doktora fiziko-matematicheskikh nauk* (Mathematical modelling of the strain state of heterogeneous thin-walled cylindrical shells: dissertation theses). Chelyabinsk: YuUrGU, 2011. 32 p. (in Russ.).
4. Dil'man V.L. O napryazhenno-deformirovannom sostoyanii pri rastyazhenii plasticheskogo sloya s dvumya osyami simmetrii (About strain-deformed state at stretching of a plastic layer with two axes of symmetry). *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk, Mehanika tverdogo tela*. 2001. no. 6. pp. 115–124. (in Russ.).
5. Dil'man V.L. Ob odnoj modeli, opisivaushej napryazhennoe sostoyanie v kruglom sterzhne (About one model describing the strain state in a round core). *Obozrenie prikladnoj i promishlennoj matematiki*. 2004. Vol. 11, no. 2. pp. 793–794. (in Russ.).
6. Dil'man V.L. Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya menee prochnogo poperechnogo sloya plasticheskoy polosi pri gipotezakh poperechnikh sechenij (Mathematical modeling strain-deformed state of less strong cross-section layer of a plastic strip at hypotheses of cross-section sections). *Obozrenie prikladnoj i promishlennoj matematiki*. 2010. Vol. 17, no. 2. pp. 262–263. (in Russ.).
7. Dil'man V.L. Napryazhennoe sostoyanie i staticheskaya prochnost' plastichnoj proslojki pri ploskoj deformacii (The strain state and static strength of a plastic layer at flat deformation). *Problemi mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2005. no. 4. pp. 38–48. (in Russ.).
8. Dil'man V.L. Ob odnoj modeli napryazhennogo sostoyaniya plasticheskogo sloya pri ploskoj deformacii (About one mathematical model of the strain state of a plastic layer at flat deformation). *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika, fizika, khimiya»*. 2005. Vol. 6, no. 6(46). pp. 19–23. (in Russ.).

¹ Dil'man Valeriy Lazerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics department, South Ural State University.
E-mail: dilman49@mail.ru

² Nosacheva Aliya Islamovna is Assistant, Mathematical Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: alika@74.ru