

# ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Т.К. Юлдашев<sup>1</sup>

Предлагается методика изучения разрешимости обратной задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. С помощью нелинейного метода характеристик, основанного на введении дополнительного параметра, задача Коши сводится к изучению системы для нелинейных интегральных уравнений. Для решения обратной задачи восстанавливаемые функции находятся из системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с помощью нелинейного интегрального преобразования.

*Ключевые слова:* обратная задача, система квазилинейных уравнений, дополнительный параметр, нелинейное интегральное преобразование, метод сжимающих отображений.

**1. Постановка задачи.** В области  $D$  рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1(t, x, u, \vartheta) \frac{\partial u}{\partial x} = f_1(t, x, u, \vartheta, \sigma(t)), & u = u(t, x), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + A_2(t, x, u, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = f_2(t, x, u, \vartheta, \eta(t)), & \vartheta = \vartheta(t, x) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными

$$u(t, x)|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \quad (2)$$

$$\vartheta(t, x)|_{t=t_0} = \varphi_2(x) \quad (3)$$

и дополнительными условиями

$$u(t, x)|_{x=x_0} = \psi_1(t), \quad (4)$$

$$\vartheta(t, x)|_{x=x_0} = \psi_2(t), \quad (5)$$

где  $A_i(t, x, u, \vartheta) \in C(D \times R^2)$ ,  $f_i(t, x, u, \vartheta, \omega(t)) \in C(D \times R^2 \times [t_0; T])$ ,  $\omega(t) = (\sigma(t), \eta(t))$ ,

$\frac{dt}{d\tau} = 1, \frac{dx}{d\tau} = A_1(t, x, u, \vartheta), \frac{dt}{d\tau} = 1, \frac{dx}{d\tau} = A_2(t, x, u, \vartheta)$ .  $\tau \quad i = 1, 2, \quad \sigma(t), \eta(t) \in C[t_0; T]$ ,

$D \equiv [t_0; T] \times R, \quad 0 < t_0 < T < \infty, \quad x_0 \in R, \quad R \equiv (-\infty; \infty)$ .

Системы уравнений вида (1) встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точные (частные) решения квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка при конкретных случаях нелинейных функций, входящих в данное уравнение [1]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективным является метод, который позволяет заменить поставленную задачу эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

В данной работе изучается обратная задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений, где восстанавливаемые функции  $\sigma(t), \eta(t)$  находятся в нелинейной правой части данной системы уравнений. При решении обратной задачи (1)–(5) относительно восстанавливаемых функций получаем систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которую с помощью нелинейного интегрального преобразования сводим к специальному виду системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

<sup>1</sup> Юлдашев Турсун Камалдинович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, кафедра высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Отметим, что изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиография основных публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, приведена в [2, 3].

**Определение.** Решением обратной задачи (1)–(5) называется четверка непрерывных функций  $\{u(t, x), \vartheta(t, x); \sigma(t), \eta(t)\}$ , удовлетворяющая систему уравнений (1) и условиям (2)–(5).

## 2. Сведение задачи Коши (1)–(3) к системе нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим параметрическое задание характеристик как решения систем:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = A_1(t, x, u, \vartheta), \quad (6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = A_2(t, x, u, \vartheta). \quad (7)$$

Изменение переменной  $\tau$  перемещает точку с координатами  $t, x$  по характеристике. Интегрируя уравнения в (6) и (7) по  $\tau$ , получаем:

$$x = p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}), \quad x = p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}),$$

где  $p_i (i = \overline{1, 2})$  определяются из следующих систем:

$$p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}) = x - \int_{\tau}^t A_1(s, p_1, \bar{u}, \bar{\vartheta}) ds, \quad p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}) = x - \int_{\tau}^t A_2(s, p_2, \bar{u}, \bar{\vartheta}) ds;$$

$$\bar{u} = \bar{u}(\tau, t, x) = \bar{u}(\tau, t, p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})), \quad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(\tau, t, x) = \bar{\vartheta}(\tau, t, p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})).$$

Отсюда очевидно, что 
$$\begin{cases} \bar{u}(\tau, t, x)|_{t=\tau=t_0} = \varphi_1(x), \\ \bar{\vartheta}(\tau, t, x)|_{t=\tau=t_0} = \varphi_2(x). \end{cases} \quad \bar{\vartheta}(t, t, x) = \vartheta(t, x).$$

Положим

$$f_i(t, x, u, \vartheta, \omega(t))|_{x=p_i(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = f_i(\tau, t, p_i, \bar{u}, \bar{\vartheta}, \omega(t)), \quad i = 1, 2.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= \frac{du}{d\tau} \Big|_{x=p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} \right) \Big|_{x=p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} A_1(t, x, u, \vartheta) \right) \Big|_{x=p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = f_1(\tau, t, p_1, \bar{u}, \bar{\vartheta}, \sigma(t)), \\ \frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau} &= \frac{d\vartheta}{d\tau} \Big|_{x=p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} \right) \Big|_{x=p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = \\ &= \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} A_2(t, x, u, \vartheta) \right) \Big|_{x=p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})} = f_2(\tau, t, p_2, \bar{u}, \bar{\vartheta}, \eta(t)), \end{aligned}$$

т.е. мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = f_1(\tau, t, p_1(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}), \bar{u}, \bar{\vartheta}, \sigma(t)) \\ \frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau} = f_2(\tau, t, p_2(\tau, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}), \bar{u}, \bar{\vartheta}, \eta(t)) \end{cases}, \quad (8)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \bar{u}(\tau, t, x)|_{t=\tau=t_0} = \varphi_1(x), \\ \bar{\vartheta}(\tau, t, x)|_{t=\tau=t_0} = \varphi_2(x). \end{cases} \quad (9)$$

Интегрируя (8) по  $\tau$  и используя начальные условия (9), получаем:

$$\begin{cases} \bar{u}(\tau, t, x) = \bar{\Theta}_1(\tau, t, x; \bar{u}, \bar{\vartheta}), \\ \bar{\vartheta}(\tau, t, x) = \bar{\Theta}_2(\tau, t, x; \bar{u}, \bar{\vartheta}), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\bar{\Theta}_i(\tau, t, x; \bar{u}, \bar{\vartheta}) \equiv \varphi_i(p_i(t_0, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})) + \int_{t_0}^{\tau} f_i(\theta, t, p_i(\theta, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta}), \bar{u}, \bar{\vartheta}, \omega(\theta)) d\theta, \quad i=1,2.$$

При  $\tau=t$  из (10) получаем следующую систему нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):

$$\begin{cases} u(t, x) = \Theta_1(t, x; u, \vartheta), \\ \vartheta(t, x) = \Theta_2(t, x; u, \vartheta), \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\Theta_i(t, x; u, \vartheta) \equiv \varphi_i(p_i(t_0, t, x, u, \vartheta)) + \int_{t_0}^t f_i(s, x, u(s, x), \vartheta(s, x), \omega(s)) ds, \quad i=1,2.$$

Теперь покажем, что СНИУ (11) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1) и начальным условиям (2)–(3).

Действительно, функции

$$\varphi_i(p_i(0, t, x, \bar{u}, \bar{\vartheta})), \quad i=1,2 \quad (12)$$

являются первыми интегралами системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1(t, x, u, \vartheta) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + A_2(t, x, u, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

и они постоянны вдоль решений системы (13). Производные решений системы (13) вдоль характеристик равны нулю и функции (12) удовлетворяют системе (13). В самом деле, любые достаточно гладкие функции  $\Phi_i(x)$ ,  $i=1,2$ , постоянные вдоль характеристик системы (13), удовлетворяют ей.

СНИУ (11) удовлетворяет начальным условиям (2) и (3). Из этой СНИУ (11) получаем

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f_1(t, x, u, \vartheta, \sigma(t)), \\ \frac{d\vartheta}{dt} = f_2(t, x, u, \vartheta, \eta(t)). \end{cases}$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Так как

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t, x, u, \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = A_2(t, x, u, \vartheta),$$

то из последних четырех соотношений следует, что система уравнений (11) удовлетворяет системе уравнений (1).

Итак, мы доказали, что задача Коши (1)–(3) и система нелинейных интегральных уравнений (11) эквивалентны.

### 3. Сведение обратной задачи (1)–(5) к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

Используя условия (4) и (5) из системы (11) получаем два нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода относительно неизвестных функций  $\sigma(t)$ ,  $\eta(t)$ :

$$\int_{t_0}^t h_1(s, \sigma(s)) ds = g_1(t), \quad (14)$$

$$\int_{t_0}^t h_2(s, \eta(s)) ds = g_2(t), \quad (15)$$

где  $h_i(s, \omega(s)) = f_i(s, x_0, \psi_1(s), \psi_2(s), \omega(s))$ ,  $g_i(t) = \psi_i(t) - \varphi_i \left( x_0 - \int_{t_0}^t A_i(s, x_0, \psi_1(s), \psi_2(s)) ds \right)$ .

Кроме того,  $g_i(t_0) = 0$ , так как  $\psi_i(t_0) = \varphi_i(x_0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Уравнения (14) и (15) с помощью классических методов невозможно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, к которому мы могли бы применять метод последовательных приближений и метод сжимающих отображений. Поэтому здесь применяем другую методику. Уравнение (14) запишем в виде

$$0 < M_{01} = \text{const}, \quad (16)$$

где  $0 < L_{01}(t) \in C[t_0; T]$ ; произвольная функция такая, что  $\rho_{01} = \max_t \{ P_1(t) \cdot Q(t) \} < 1$ .

Применяя к (16) интегральное преобразование из [4, гл. 1], получаем

$$\begin{aligned} \sigma(t) = I_1(t; \sigma) \equiv & \left\{ \sigma(t) + \int_{t_0}^t [K(s)\sigma(s) - h_1(s, \sigma(s))] ds + g_1(t) \right\} \times \\ & \times \exp(-\mu(t)) + \int_{t_0}^t K(s) \cdot \exp(-\mu(t, s)) \cdot \left\{ \sigma(t) - \sigma(s) + g_1(t) - g_1(s) + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t [K(s)\sigma(s) - h_1(s, \sigma(s))] ds - \int_{t_0}^s [K(\theta)\sigma(\theta) - h_1(\theta, \sigma(\theta))] d\theta \right\} ds, \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\mu(t, s) = \int_s^t K(\theta) d\theta$ ,  $\mu(t, t_0) = \mu(t)$ .

Аналогичным путем из (15) приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \eta(t) = I_2(t; \eta) \equiv & \left\{ \eta(t) + \int_{t_0}^t [K(s)\eta(s) - h_2(s, \eta(s))] ds + g_2(t) \right\} \times \\ & \times \exp(-\mu(t)) + \int_{t_0}^t K(s) \cdot \exp(-\mu(t, s)) \cdot \left\{ \eta(t) - \eta(s) + g_2(t) - g_2(s) + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t [K(s)\eta(s) - h_2(s, \eta(s))] ds - \int_{t_0}^s [K(\theta)\eta(\theta) - h_2(\theta, \eta(\theta))] d\theta \right\} ds. \quad (18) \end{aligned}$$

Уравнения (14) и (17) являются эквивалентными. Аналогично уравнения (15) и (18) также являются эквивалентными.

#### 4. Разрешимость нелинейных интегральных уравнений (14) и (15)

Сначала изучаем разрешимости уравнения (14). Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} \sigma_0(t) = \left( \int_{t_0}^t h_1(s, 0) ds + g_1(t) \right) \cdot \exp(-\mu(t)), \\ \sigma_{k+1}(t) = I_1(t; \sigma_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (19)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $h_1(t, \sigma(t)) \in \text{Bnd}(M_{01}) \cap \text{Lip}(L_{01}(t)|_\sigma)$ , где  $0 < M_{01} = \text{const}$ ,  $0 < L_{01}(t) \in C[t_0; T]$ ;
2.  $\rho_{01} = \max_t \{ P_1(t) \cdot Q(t) \} < 1$ , где

$$P_1(t) = 1 + \mu(t) + \int_{t_0}^t L_{01}(s) ds, \quad Q(t) = \exp(-\mu(t)) \cdot \left\{ 1 + 2 \int_{t_0}^t K(s) \cdot \exp(\mu(s)) ds \right\}.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (14) имеет единственное решение на отрезке  $[t_0; T]$ .

**Доказательство.** Для произвольной непрерывной на отрезке  $[t_0; T]$  функции  $a(t)$  примем норму следующим образом:  $\|a(t)\| = \max_{t_0 \leq t \leq T} |a(t)|$ .

Пусть

$$\|\sigma_0(t)\| \leq (M_{01}T + \|g_1(t)\|) \cdot \exp(-\mu(t)) < 1. \quad (20)$$

Тогда для разности

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) - \sigma_0(t) = & \left\{ \sigma_0(t) + \int_{t_0}^t [K(s)\sigma_0(s) + h_1(s, 0) - h_1(s, \sigma_0(s))] ds \right\} \exp(-\mu(t)) + \\ & + \int_{t_0}^t K(s) \exp(-\mu(t, s)) \left\{ \sigma_0(t) - \sigma_0(s) + \int_{t_0}^s [K(\theta)\sigma_0(\theta) + h_1(\theta, 0) - h_1(\theta, \sigma_0(\theta))] d\theta \right\} ds, \end{aligned}$$

в силу первого условия теоремы и оценки (20), получаем оценку

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)\| \leq \|\sigma_0(t)\| P_1(t) Q(t) \leq \max_t \{ P_1(t) \cdot Q(t) \} = \rho_{01} < 1, \quad (21)$$

где  $P_1(t) = 1 + \mu(t) + \int_{t_0}^t L_{01}(s) ds$ ,  $Q(t) = \exp(-\mu(t)) \cdot \left\{ 1 + 2 \int_{t_0}^t K(s) \cdot \exp(\mu(s)) ds \right\}$ .

Аналогично для произвольной разности приближения (19) имеем оценку

$$\|\sigma_{k+1}(t) - \sigma_k(t)\| \leq \rho_{01} \|\sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t)\| < \|\sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t)\|.$$

Отсюда и из (21) следует, что оператор в правой части (17) является сжимающим и, следовательно, уравнение (14) имеет единственное решение на отрезке  $[t_0; T]$ .

Из интегрального уравнения (18) аналогично можно доказать, что справедлива и следующая

**Теорема 2.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $h_2(t, \eta(t)) \in \text{Bnd}(M_{02}) \cap \text{Lip}(L_{02}(t)|_\eta)$ , где  $0 < M_{02} = \text{const}$ ,  $0 < L_{02}(t) \in C[t_0; T]$ ;
2.  $\rho_{02} = \max_t \{ P_2(t) \cdot Q(t) \} < 1$ , где  $P_2(t) = 1 + \mu(t) + \int_{t_0}^t L_{02}(s) ds$ .

Тогда нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (15) имеет единственное решение на отрезке  $[t_0; T]$ .

Таким образом, мы определили функции  $\sigma(t)$ ,  $\eta(t)$  в правой части системы уравнений (1) из нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (14) и (15) соответственно.

## 5. Однозначная разрешимость системы нелинейных интегральных уравнений (11)

Так как уже определены функции  $\sigma(t)$ ,  $\eta(t)$ , то теперь мы можем приступить к изучению разрешимости системы уравнений (11).

**Теорема 3.** Пусть выполняются следующие условия:

- 1)  $\varphi_i(x) \in \text{Bnd}(\varphi_{0i}) \cap \text{Lip}(L_{1i|u, \vartheta})$ , где  $0 < \varphi_{0i}$ ,  $L_{1i} = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ ;
- 2)  $f_i(x, u, \vartheta, \omega) \in \text{Bnd}(f_{0i}) \cap \text{Lip}(L_{2i|u, \vartheta})$ , где  $0 < f_{0i}$ ,  $L_{2i} = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ ;
- 3)  $A_i(x, u, \vartheta) \in \text{Lip}(L_{3i|u, \vartheta})$ , где  $0 < L_{3i} = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ ;

$$4) \rho_1 < 1, \text{ где } \rho_1 = \max_t \left\{ L_{11} \cdot \int_{t_0}^t L_{31}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{21}(s) ds \right\} + \max_t \left\{ L_{12} \cdot \int_{t_0}^t L_{32}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{22}(s) ds \right\}.$$

Тогда система нелинейных интегральных уравнений (11) имеет единственное решение в области  $D$ .

**Доказательство.** Итерационный процесс Пикара для системы уравнений (14) определим следующим образом:

$$\begin{cases} u_0(t, x) = 0, & u_{k+1}(t, x) = \Theta_1(t, x; u_k, \vartheta_k), \\ \vartheta_0(t, x) = 0, & \vartheta_{k+1}(t, x) = \Theta_2(t, x; u_k, \vartheta_k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Для произвольной функции  $w(t, x)$  в пространстве непрерывных функций норму определим следующим образом:

$$\|w(t, x)\|_t = \max_{t_0 \leq t \leq T} |w(t, x)|,$$

где  $x$  играет роль параметра.

В силу первого условия теоремы для первого приближения из (22) имеем оценку

$$\|u_1 - u_0\|_t \leq \varphi_{01} + f_{01} \cdot T, \quad (23)$$

$$\|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_t \leq \varphi_{02} + f_{02} \cdot T. \quad (24)$$

С учетом (23) и (24), в силу условий теоремы, для второго приближения из (22) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\|_t &\leq L_{11} \cdot \int_{t_0}^t L_{31}(s) \cdot \left( \|u_1 - u_0\|_t + \|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_t \right) ds + \int_{t_0}^t L_{21}(s) \cdot \left( \|u_1 - u_0\|_t + \|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_t \right) ds \leq \\ &\leq (\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T) \cdot \left( L_{11} \cdot \int_{t_0}^t L_{31}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{21}(s) ds \right) < (\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|\vartheta_2 - \vartheta_1\|_t &\leq L_{12} \cdot \int_{t_0}^t L_{32}(s) \cdot \left( \|u_1 - u_0\|_t + \|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_t \right) ds + \int_{t_0}^t L_{22}(s) \cdot \left( \|u_1 - u_0\|_t + \|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_t \right) ds \leq \\ &\leq (\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T) \cdot \left( L_{12} \cdot \int_{t_0}^t L_{32}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{22}(s) ds \right) < (\varphi_{01} + \varphi_{02} + (f_{01} + f_{02}) \cdot T). \end{aligned} \quad (26)$$

В силу условий теоремы для произвольного натурального числа  $k > 1$  из (15) получим оценку

$$\|u_{k+1} - u_k\|_t \leq L_{11} \int_{t_0}^t L_{31}(s) \left( \|u_k - u_{k-1}\|_t + \|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\|_t \right) ds + \int_{t_0}^t L_{21}(s) \left( \|u_k - u_{k-1}\|_t + \|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\|_t \right) ds,$$

$$\|\vartheta_{k+1} - \vartheta_k\|_t \leq L_{12} \int_{t_0}^t L_{32}(s) \left( \|u_k - u_{k-1}\|_t + \|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\|_t \right) ds + \int_{t_0}^t L_{22}(s) \left( \|u_k - u_{k-1}\|_t + \|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\|_t \right) ds,$$

Отсюда получаем, что

$$\|W_{k+1}(t, x) - W_k(t, x)\|_t \leq \rho_1 \|W_k(t, x) - W_{k-1}(t, x)\|_t < \|W_k(t, x) - W_{k-1}(t, x)\|_t, \quad (27)$$

где  $\|W_k - W_{k-1}\|_x = \max \left\{ \|u_k - u_{k-1}\|_x; \|\vartheta_k - \vartheta_{k-1}\|_x \right\}$ ,

$$\rho_1 = \max_t \left\{ L_{11} \cdot \int_{t_0}^t L_{31}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{21}(s) ds \right\} + \max_t \left\{ L_{12} \cdot \int_{t_0}^t L_{32}(s) ds + \int_{t_0}^t L_{22}(s) ds \right\}.$$

В силу оценок (25)–(27) следует, что согласно принципу Шаудера оператор в правой части (11) имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, система нелинейных интегральных уравнений (11) имеет единственное решение в области  $D$ .

### Литература

1. Зайцев, В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка // В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
2. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач // А.М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 285 с.
3. Романов, В.Г. Обратные задачи для математической физики // В.Г. Романов. – М.: Наука, 1984. – 264 с.
4. Юлдашев, Т.К. Нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения // Т.К. Юлдашев. – Ош: ОшГЮИ, 2010. – 107 с.

Поступила в редакцию 28 октября 2011 г.

## ON AN INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF QUAZILINEAR EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

T.K. Yuldashev<sup>1</sup>

A method of studying solubility of an inverse problem for the system of quasilinear differential equations in partial derivatives of the first order is offered. With the help of a nonlinear method of characteristics based on introduction of an additional parameter, a Cauchy problem is reduced to study the system of non-linear integral equations. For solution the inverse problem the restored functions are found from the system of Volterra non-linear integral equations of the first kind with the help of non-linear integral transformation.

*Keywords:* inverse problem, system of quasilinear equations, additional parameter, nonlinear integral transformation, method of contracting mapping.

### References

1. Zajicev V.F., Poljanin A.D. *Spravochnik po diferencial'nym uravnenijam s chastnymi proizvodnymi pervogo porjadka* (Handbook of differential equations with first-order partial). Moscow, Fizmatlit, 2003. 416 p. (in Russ.).
2. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriju obratnykh zadach* (Introduction to the theory of inverse problems). Moscow, MGU, 1994. 285 p. (in Russ.).
3. Romanov V.G. *Obratnye zadachi dlja matematicheskoy fiziki* (Inverse problems in mathematical physics). Moscow, Nauka, 1984. 264 p. (in Russ.).
4. Yuldashev T.K. *Nelinejnye integral'nye i integro-differencial'nye uravnenija* (Non-linear integral and integro-differential equations). Osh: OshGJuI, 2010. 107 p. (in Russ.).

<sup>1</sup> Yuldashev Tursun Kamaldinovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Doctoral Candidate, Department of Higher Mathematics, Siberian state aerospace university, Krasnoyarsk.  
E-mail: tursunbay@rambler.ru