УДК 517.948

О РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ[1]

Е.В. Табаринцева[2], Л.Д. Менихес[3], А.Д. Дрозин[4]

Рассматривается обратная граничная задача для параболического уравнения. Для построения устойчивых приближенных решений данной задачи используется метод квазиобращения, состоящий в замене исходной задачи задачей для гиперболического уравнения с малым параметром. Получена точная по порядку оценка погрешности данного метода на одном из классов равномерной регуляризации.

Ключевые слова: обратная задача, метод приближенного решения, оценка погрешности.

Введение

В работе рассматривается одномерная постановка обратной граничной задачи теплообмена. Приближенное решение строится методом квазиобращения, который состоит в замене неустойчивой исходной задачи устойчивой задачей для гиперболического уравнения с «малым» параметром. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов корректности обратной граничной задачи. Доказана оптимальность по порядку метода квазиобращения с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева на рассмотренном классе корректности.

Вопросы теплообмена имеют особое значение в таких областях техники, как авиационная и ракетно-космическая техника, энергетика, металлургия [1]. При этом большое значение имеют экспериментальные исследования, стендовая и натурная отработка тепловых режимов, создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов по результатам экспериментов и испытаний. В основу этих методов могут быть положены решения обратных задач теплообмена, причем в ряде случаев обратные задачи являются практически единственным средством получения необходимых результатов. Методы обратных задач обладают высокой информативностью и позволяют проводить экспериментальные исследования в условиях, максимально приближенных к натурным.

Диагностика и идентификация процессов теплообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов, однако граничные обратные задачи – это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Граничные обратные задачи представляют и методический интерес, так как задачи данного типа, по сравнению с коэффициентными и геометрическими задачами, как правило, имеют большую склонность к искажению результатов, связанную с некорректностью постановок, априорная информация о точном решении граничных обратных задач бывает ограниченной.

Рассмотренная в данной работе одномерная постановка обратной граничной задачи является основной расчетной моделью, для которой должны быть построены эффективные методы обработки экспериментальных данных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обратную граничную задачу, т.е. задачу восстановления функции $v(t)=u(1,t)\in L_2[0,\infty)$ (граничного условия), где функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (0<x<1,\ t>0)\,, \tag{1}$$

[1] Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-96001.

[2] Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: eltab@rambler.ru

[3] Менихес Леонид Давидович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: leonid.menikhes@gmail.com

[4] Дрозин Александр Дмитриевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, декан механико-математического факультета, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: drozin@mail.ru

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0;\ u_x(0,t)=\varphi(t).$$

Здесь $u(x,\cdot)\in C^2(0;1)\cap C[0;1]$; $u(\cdot,t)\in W_2^1[0;\infty)$; $\varphi(t)\in L_2[0,\infty)$ – заданная функция.

Задача вычисления граничного условия для уравнения (3) поставлена некорректно [1]. Будем предполагать, что для заданной функции $\varphi(t)\in L_2[0,\infty)$ обратная граничная задача имеет решение $v(t)\in L_2[0,\infty)$, принадлежащее множеству

$$M=\{v(t):\|v(t)\|^2_{L_2[0,\infty)}+\|v'(t)\|^2_{L_2[0,\infty)}\le r^2\},$$

но точные значения функции $\varphi(t)$ не известны, а известны функция φ_δ и уровень погрешности δ такие, что $\|\varphi_\delta-\varphi\|\le\delta$. Требуется построить приближенное решение обратной граничной задачи и оценить его уклонение от точного решения.

2. Точное решение обратной граничной задачи

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $L_2[0,\infty)$ – пространство суммируемых с квадратом функций на $[0;\infty)$ (принимающих действительные значения); Φ – пространство комплекснозначных функций, заданных на $[0;\infty)$, допускающих аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость и таких, что для всех $\sigma<0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|v(t+i\sigma)|^2\,dt\le C.$$

Рассмотрим преобразование Фурье функций, суммируемых с квадратом на $[0;\infty)$.

Лемма. *Оператор* $F:L_2[0,\infty)\to\Phi$, *действующий по правилу*

$$Fv=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}v(t)e^{-i\lambda t}dt,$$

является изометрией.

Из априорных оценок решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что к исходной задаче применимо преобразование Фурье на полупрямой $t\in(0,\infty)$. Применяя к исходной обратной задаче преобразование Фурье по t, получим следующую задачу для обыкновенного линейного уравнения: требуется определить функцию $\tilde v(\lambda)=\tilde u(1,\lambda)$, где $\tilde u(x,\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$\tilde u_{xx}(x,\lambda)=i\lambda\tilde u(x,\lambda);\ \ \tilde u(0,\lambda)=0;\ \tilde u_x(0,\lambda)=\tilde\varphi(\lambda).$$

Решая полученную задачу, находим образ точного решения исходной задачи:

$$\tilde v(\lambda)=\frac{\mu_0\sqrt{\lambda}}{\mu_0\sqrt{\lambda}}\tilde\varphi.$$

Здесь $\mu_0=\frac{1+i}{\sqrt2}$; $\tilde v(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}v(t)e^{-i\lambda t}dt$ – образ Фурье функции $v(t)$ $(\lambda>0)$.

3. Построение приближенного решения обратной граничной задачи

Для построения устойчивого приближенного решения исходной обратной задачи воспользуемся методом квазиобращения, состоящим в замене неустойчивой исходной задачи устойчивой задачей для уравнения с «малым» параметром. Метод квазиобращения был предложен в [5], применение классических вариантов метода квазиобращения к решению одной из обратных граничных задач рассмотрено в [6]. Мы будем использовать вариант метода квазиобращения, предложенный в [7] и обоснуем результаты, приведенные в [7] без доказательства.

Рассмотрим вспомогательное гиперболическое уравнение с «малым» параметром:

$$\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\tag{2}$$

и следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0;\ u_x(0,t)=\tilde\varphi_\delta(t).$$

Здесь $u(x,\cdot)\in C^2(0;1)\cap C[0;1]$; $u(\cdot,t)\in W_2^2[0;\infty)$; $\varepsilon>0$ – постоянная времени (время релаксации теплового напряжения) [4]. В качестве приближенного решения задачи будем рассматривать функцию $u_\delta(t)=u_\delta^\varepsilon(1,t)$, где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

Из априорной оценки точного решения первой краевой задачи для гиперболического уравнения следует законность применения к задаче для уравнения (2) преобразования Фурье. Применяя преобразование Фурье, получаем следующую задачу Коши для линейного уравнения:

$$\tilde{u}_{xx}(x,\lambda)=i\lambda\tilde{u}(x,\lambda)-\varepsilon\lambda^2\tilde{u}(x,\lambda);$$
$$\tilde{u}(0,\lambda)=0;\ \tilde{u}_x(0,\lambda)=\tilde{\varphi}(\lambda).$$

Таким образом, в качестве приближенного решения исходной обратной задачи рассматривается функция $v_\delta^\varepsilon(t)=R_\varepsilon\varphi_\delta$, образ Фурье которой имеет вид

$$\tilde{v}_\delta^\varepsilon(\lambda)=\frac{\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}{\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}\tilde{\varphi}_\delta.$$

Здесь R_ε – оператор, регуляризующий исходную обратную задачу, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

4. Оценка погрешности приближенного решения

Рассмотрим оценку погрешности приближенного решения обратной граничной задачи на множестве M.

В качестве характеристики точности построенного приближенного решения используется величина

$$\Delta(\varepsilon,\delta)=\sup\{\left\|v_\delta^\varepsilon-v\right\|:v\in M;\left\|\varphi-\varphi_\delta\right\|\le\delta\}.$$

Используем очевидную оценку

$$\Delta(\varepsilon,\delta)\le\Delta_1(\varepsilon)+\Delta_2(\varepsilon,\delta),$$

где

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta)=\sup_{\|\varphi-\varphi_\delta\|\le\delta}\left\|R_\varepsilon(\varphi-\varphi_\delta)\right\|;$$
$$\Delta_1(\varepsilon)=\sup_{v\in M}\left\|R_\varepsilon\varphi-v\right\|.$$

Оценим величину $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$:

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta)\le\delta\sup_{\lambda>0}\left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}{\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}\right|\le\delta\sup_{\lambda>0}\frac{\operatorname{sh}^2a+\sin^2b}{\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2\lambda^4}},$$

где

$$a^2=\frac{1}{2}(\lambda\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}-\varepsilon\lambda^2);\quad b^2=\frac{1}{2}(\lambda\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}+\varepsilon\lambda^2).$$

Оценим сначала величину $A(\lambda)=a^2(\lambda)$. Рассмотрим уравнение

$$A'(\lambda)=0. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$(\varepsilon\lambda-\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2})^2=0. \tag{4}$$

Уравнение (4), очевидно, не имеет решений на луче $\lambda\in[0;\infty)$, т.е. функция $A(\lambda)$ не имеет критических точек. Вычислим предел функции $A(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$:

$$\lim_{\lambda\to\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2}(\lambda\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}-\varepsilon\lambda^2)=\frac{1}{4\varepsilon}.$$

Следовательно, $a^2(\lambda)\le\frac{1}{4\varepsilon}$ при $\lambda\ge0$.

Рассмотрим функцию

$$p(\lambda)=\left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}{\sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}}\right|.$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 0} p(\lambda) = \lim_{z\to 0}\left|\frac{\operatorname{sh} z}{z}\right| = \left|\operatorname{sh}'(0)\right| = \left|\operatorname{ch}(0)\right| = 1,$$

то существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $0 \le \lambda \le \lambda_0$ выполняется неравенство $\left|p(\lambda)\right| \le 2$. Следовательно,

$$\sup_{\lambda\ge 0}\left|p(\lambda)\right| \le \sup_{0\le\lambda\le\lambda_0}\left|p(\lambda)\right| + \sup_{\lambda\ge\lambda_0}\left|p(\lambda)\right| \le Ce^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}, \tag{5}$$

где C – постоянная, не зависящая от ε. Из (5) следует, что

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) \le C\delta e^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Оценим величину $\Delta_1(\varepsilon)$. Из определения множества M и изометричности преобразования Фурье следует, что для образа Фурье функции $v(t)$ выполняется условие

$$\left\|\sqrt{1+\lambda^2}\,\tilde{v}(\lambda)\right\|_{L_2[0;\infty)} \le r.$$

Следовательно,

$$\Delta_1(\varepsilon) = \sup_{v\in M}\left\|\left(\frac{\mu_0\sqrt{\lambda}\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}}{\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\mu_0\sqrt{\lambda}} - 1\right)\tilde{v}(\lambda)\right\| \le r\sup_{\lambda\ge 0}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left|\frac{\mu_0\sqrt{\lambda}\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}}{\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\mu_0\sqrt{\lambda}} - 1\right|. \tag{6}$$

Из неравенства (6) следует

$$\Delta_1(\varepsilon) \le r\sup_{\lambda\ge 0}\frac{\left|\left(\mu_0\sqrt{\lambda}\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right) - \mu_0\sqrt{\lambda}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|} + r\sup_{\lambda\ge 0}\frac{\left|1-\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|}. \tag{7}$$

Оценим второе слагаемое в (7). Рассмотрим равенство

$$\frac{\left|1-\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|} = \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2}\left|1+\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|}. \tag{8}$$

Воспользуемся неравенствами:

$$\sqrt{1+\lambda^2} > \lambda;\ \sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2} > 1 \text{ при } \lambda \ge 0;\ \left|1+\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right| > 1,$$

с учетом которых из (8) следует

$$\frac{\left|1-\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right|} \le \varepsilon. \tag{9}$$

Оценим первое слагаемое в (7). Из равенства

$$\operatorname{sh}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

дробь в первом слагаемом в (7) принимает вид

$$\frac{\left|\operatorname{sh}\left(\mu_0\sqrt{\lambda}\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\right) - \operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\left|\sqrt{1+i\varepsilon\lambda}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|} = \frac{2\left|\operatorname{sh} z_1\right|\left|\operatorname{ch} z_2\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2}\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|},$$

где

$$z_1 = \frac{1}{2}(\mu_0\sqrt{\lambda} - \sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2});\quad z_2 = \frac{1}{2}(\mu_0\sqrt{\lambda} + \sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}).$$

Заметим, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\left|\operatorname{sh} z_1\right|\left|\operatorname{ch} z_2\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2}\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\varepsilon\lambda^2}{\sqrt{\lambda}\left|\mu_0\sqrt{\lambda} + \sqrt{i\lambda-\varepsilon\lambda^2}\right|} = 0.$$

Следовательно, найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что при $0 \le \lambda \le \lambda_1$ выполняется неравенство

$$\frac{2\left|\operatorname{sh} z_1\right|\left|\operatorname{ch} z_2\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2}\left|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}\right|} < \varepsilon.$$

Рассмотрим оценку дроби при $\lambda \ge \lambda_1$. Заметим, что

$$\operatorname{Re} z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(1-\sqrt{\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}-\varepsilon\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-a\right);\ \operatorname{Re} z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(1+\sqrt{\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}-\varepsilon\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+a\right).$$

Следовательно,

$$2|\operatorname{sh} z_1||\operatorname{ch} z_2| \le \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-a\right)\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+a\right) \le e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}(1-e^{-(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-a)}). \tag{10}$$

Оценим величину $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-a$ сверху. Так как $\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}-\varepsilon\lambda \le 1$, то

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-a \le \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(1+\varepsilon\lambda-\sqrt{1+\varepsilon^2\lambda^2}) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\frac{2\varepsilon\lambda}{1+\varepsilon\lambda+\sqrt{1+\varepsilon^2}} \le \sqrt{2}\varepsilon bda^{3/2}. \tag{11}$$

Заметим также, что

$$|\mu_0\sqrt{\lambda}| \ge \sqrt{\lambda/2}(1-e^{-2\sqrt{2\lambda_1}}). \tag{12}$$

Из (10)–(12) следует, что при $\lambda > \lambda_1$

$$\frac{2|\operatorname{sh} z_1||\operatorname{ch} z_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt[4]{1+\varepsilon^2\lambda^2}|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}|} \le C\frac{1-e^{-\sqrt{2}\varepsilon\lambda^{3/2}}}{\lambda}. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию $F(\lambda) = \frac{1-e^{-\sqrt{2}\varepsilon\lambda^{3/2}}}{\lambda}$. Заметим, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} F(\lambda) = 0$; $\lim\limits_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = 0$. Критические точки функции $F(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$e^t = 1+\frac{3}{2}t, \tag{14}$$

где $t = \sqrt{2}\varepsilon\lambda^{3/2}$. Из уравнения (14) следует, что функция $F(\lambda)$ имеет единственную критическую точку λ_2, удовлетворяющую условию $\frac{1}{2} < \lambda_2 < 1$. Следовательно,

$$\Delta_1(\varepsilon) \le CF(\lambda_2) = C\frac{1-e^{-\sqrt{2}\varepsilon\lambda_2^{3/2}}}{\lambda_2} \le C_1\varepsilon.$$

Выберем зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ по схеме М.М. Лаврентьева, т.е. зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выбирается из условия

$$\delta e^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} = c_0 r\delta.$$

Имеем $\varepsilon \le \frac{c}{\ln^2(r/\delta)}$. Следовательно, существуют числа $C > 0$, $\delta_1 > 0$ такие, что для всех $\delta < \delta_1$ выполняется неравенство

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C}{\ln^2(r/\delta)}. \tag{15}$$

Из (15) с учетом оценки погрешности оптимального метода решения обратной граничной задачи на множестве M, полученной в работе [2], доказана следующая теорема.

Теорема. *Метод квазиобращения с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева оптимален по порядку на множестве* M.

Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

2. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 130–142.

3. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

4. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности: учеб. пособие для вузов: в 2-х ч. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: Высшая школа, 1982. – Ч. 1. – 327 с.; Ч. 2. – 304 с.

5. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

6. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 782 с.

7. Табаринцева, Е.В. Один численный метод решения обратной задачи тепловой диагностики / Е.В. Табаринцева, А.С. Кутузов // Наука ЮУрГУ. – 2009. – Т. 2. – С. 161–164.

Поступила в редакцию 28 февраля 2012 г.

ON SOLVING AN INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION BY THE QUASI-REVESIBILITY METHOD

***E.V. Tabarintseva*[1], *L.D. Menikhes*[2], *A.D. Drozin*[3]**

An inverse boundary problem for a parabolic equation is analyzed in the article. For the stable approximate solutions of the given problem the quasi-reversibility method is used. It consists in changing the original problem with a problem for hyperbolic equation with a small parameter. A sharp order error estimation of the method at one of the uniform regularization set is obtained.

Keywords: inverse problem; approximate method; error estimation.

References

1. Alifanov O.M., Artjukhin E.A., Rumjancev S.V. *Ehkstremal'nye metody reshenija nekorrektnykh zadach* (Extreme methods for solving incorrect problems). Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russ.).

2. Tanana V.P., Tabarinceva E.V. Ob odnom podkhode k priblizheniju razryvnogo reshenija nekorrektno postavlennojj zadachi (An approach to the approximation of discontinuous solutions of ill-posed problem) // *Sibirskijj zhurnal industrial'nojj matematiki*. 2005. Vol. 8, no. 1(21). pp. 130–142. (in Russ.).

3. Fridman A. *Uravnenija s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* (Partial differential equations of parabolic type). Moscow, Mir, 1968. 428 p. (in Russ.). [Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Krieger Pub Co. 1983. 347 p.]

4. Beljaev N.M., Rjadno A.A. *Metody teorii teploprovodnosti: ucheb. posobie dlja vuzov: v 2-kh ch.* (Methods of the theory of heat conduction: studies manual for high schools in 2 parts). Moscow, Vysshaja shkola, 1982. Part 1. 327 p.; Part 2. 304 p. (in Russ.).

5. Lattes R., Lions Zh.-L. *Metod kvaziobrashhenija i ego prilozhenija* (The Method of Quasi-reversibility and its applications). Moscow, Mir, 1970. 336 p. [Lattes R., Lions J.-L. The Method of Quasi-reversibility. American Eisevier, New York, 1969. 388 p.]

6. Samarskijj A.A., Vabishhevich P.N. *Vychislitel'naja teploperedacha* (Computational Heat Transfer). Moscow, Editorial URSS, 2003. 782 p. (in Russ.).

7. Tabarinseva E.V., Kutuzov A.S. *Odin chislennyjj metod reshenija obratnojj zadachi teplovojj diagnostiki* (A numerical method for solving the inverse problem of thermal diagnostics). Nauka JuUrGU. 2009. T. 2. pp. 161–164.

[1] Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: eltab@rambler.ru
[2] Menikhes Leonid Davidovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Functional Analysis Department, South Ural State University.
E-mail: leonid.menikhes@gmail.com
[3] Drozin Aleksandr Dmitrievich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Mathematical Analysis Department, Head of the Faculty of Mathematics and Mechanics, South Ural State University.
E-mail: drozin@mail.ru