Математика

УДК 532.5

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД[1]

Ю.М. Ковалев[2], В.Ф. Куропатенко[3]

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели «замороженной» газовзвеси. Показано, что математическая модель «замороженной» газовзвеси не является инвариантной относительно преобразования Галилея. Это приводит к появлению фиктивного источникового члена в уравнении энергии.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.

В связи с развитием современной вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования физических процессов, используемых в науке и технике. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений. Поэтому с особой остротой встает проблема адекватности математических моделей тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. В природе практически нет чистых веществ, поэтому активно развиваются математические модели многокомпонентных сред [1, 2]. Для верификации расчетов используют известные экспериментальные данные. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали. В настоящей статье на примере анализа математической модели замороженной газовзвеси [3, 4] покажем, к чему может привести ситуация, когда расчеты и эксперимент проведены в разных системах координат.

При решении поставленной задачи предполагалось, что частицы твердой фазы неподвижны и несжимаемы. Это означает, что вместо газовзвеси фактически рассматривается заполненная газом недеформируемая решетка. Твердые частицы имитируют ее узлы, а связи между узлами решетки не оказывают влияния на газодинамическое течение, т.е. используется модель «замороженной» газовзвеси, представленная в работах [3, 4] при изучении ослабления ударных волн. Поскольку частицы неподвижны и несжимаемы, то их объёмная концентрация и, следовательно, объёмная концентрация газа постоянны.

С учётом сказанного выше система уравнений из [3, 4], описывающая в одномерном случае течение газа через решётку, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}-F, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u E)}{\partial x}+\frac{\partial(P u)}{\partial x}=-Q. \tag{3}$$

Здесь P – давление, ρ – плотность, u – скорость, t – время, F – силы межфазного взаимодействия, E и ε – удельная полная и удельная внутренняя энергии газа; Q – интенсивность теплообмена между газом и частицами. Функция F зависит от разности скоростей газа и частиц, функция Q – от разности температур газа и частиц. Функции F и Q не изменяются при переходе в новую систему координат.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00032.

[2] Ковалёв Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: yum_kov@mail.ru

[3] Куропатенко Валентин Фёдорович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет.
E-mail: v.f.kuropatenko@rambler.ru

Проведем анализ инвариантности системы уравнений (1)–(3) относительно преобразования Галилея. С этой целью перейдем в новую систему координат, которая движется с постоянной скоростью D относительно старой системы координат. Скорость в новой системе координат будет равна

$$u_H = u + D\,, \tag{4}$$

координата определяется из уравнения

$$x_H = x + Dt\,. \tag{5}$$

Производные по координате и времени определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_н}\,,\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_н}\right) D \tag{6}$$

После перехода в движущуюся систему координат значок H будем опускать. Следовательно, уравнение неразрывности газовой фазы (1) с учетом (4)–(6) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} D + \frac{\partial(\rho(u\ - D)}{\partial x} = 0\,, \tag{7}$$

который после сокращения членов с противоположными знаками совпадает с (1).

Запишем теперь уравнение сохранения импульса газовой фазы (2) в новой системе координат:

$$\frac{\partial\rho(u-D)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(u-D)}{\partial x} D + \frac{\partial\rho(uD)^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + F = 0\,.$$

После несложных преобразований оно принимает вид

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial\rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + F = \omega_1(D)\,, \tag{8}$$

где

$$\omega_1(D) = D\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} - 2\frac{\partial\rho u}{\partial x}\right) + D^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Подставив (1) в (9) и сократив подобные члены, получим

$$\omega_1(D) = 0 \tag{10}$$

и таким образом уравнение (8) совпадает с уравнением (2).

И, наконец, перейдём в новую систему координат в уравнении для удельной энергии газовой фазы (3). Учитывая, что $E = \varepsilon + \dfrac{u^2}{2}$, запишем уравнение (3) в новой системе координат:

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial t} + \frac{\partial\rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial x} D + \frac{\partial\rho(u-D)\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{dx} + \frac{\partial P(u-D)}{\partial x} + Q = 0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим уравнение для удельной полной энергии газовой фазы в новой системе координат, распространяющейся с постоянной скоростью D,

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon + \dfrac{u^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\rho u\left(\varepsilon + \dfrac{u^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + Q = \omega_2\,, \tag{11}$$

где $\omega_2 = -DF$.

Как следует из уравнений (8), (10) и (11), для модели «замороженной» газовзвеси из [3, 4] уравнение неразрывности газовой фазы и уравнение сохранения импульса газовой фазы являются инвариантными относительно преобразования Галилея, а уравнение энергии (3) не является инвариантным.

Оценим последствия неинвариантности уравнения энергии. В уравнении (11) исключим кинетическую энергию с помощью уравнения (2). Для этого умножим (2) на u и вычтем из (11). Затем умножим (1) на ε и вычтем из (11). В результате получим уравнение для внутренней энергии:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\frac{Q}{\rho}=\left(\frac{u-D}{\rho}\right)F\ . \qquad (12)$$

Перейдём к субстанциональным производным, заменим плотность удельным объёмом $V=1/\rho$ и сравним полученное уравнение с уравнением для удельной внутренней энергии, как функции энтропии и удельного объёма:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{dV}{dt}=T\frac{dS}{dt}\ . \qquad (13)$$

В результате из (12) и (13) получим уравнение производства энтропии газа

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{1}{\rho}(F(u-D)-Q\ .$$

Если разделить энтропию на две части

$$S=S_{PH}+S_G\ ,$$

где S_{PH} определяется «физикой» модели, а S_G – Галилеевой неинвариантностью, то мы получим уравнение производства энтропии S_G

$$T\frac{dS_G}{dt}=\frac{F}{\rho}(u-D)\ , \qquad (14)$$

возникшее исключительно из-за того, что авторы модели [3, 4] пренебрегли фундаментальным принципом механики.

К сожалению, принцип инвариантности к преобразованию Галилея не выполняется в ряде моделей многокомпонентных сред, публикуемых в журналах. Такие модели не способны прогнозировать результаты тех физических процессов, для моделирования которых они предназначены.

Литература

1. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // ИФЖ. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

3. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн экранирующими решётками / Б.С. Кругликов, А.Г. Кутушев // ФГВ. – 1988. – № 1. – С. 115–117.

4. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн слоями запыленного газа и решетками/ Б.С. Кругликов, А.Г. Кутушев // ПМТФ. – 1988. – № 1. – С. 51–57.

Поступила в редакцию 13 марта 2012 г.

ANALYSIS OF THE INVARIANCE SOME MATHEMATICAL MODELS OF MULTICOMPONENT MEDIA

***Yu.M. Kovalev*[1], *V.F. Kuropatenko*[2]**

The analysis of the invariance under the Galilean transformation of the mathematical model of "frozen" gas suspension is done. It is shown that the mathematical model of the "frozen" gas suspension is not invariant under the Galilean transformations. This leads to appearance of a fictitious source term in the energy equation.

Keywords: mathematical model, invariance, multi-component mixture.

References

1. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* (Fundamentals of mechanics of heterogeneous media). Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russ.).

2. Kuropatenko V.F. Novye modeli mekhaniki sploshnykh sred (New models of continuum mechanics). Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. 2011. Vol. 84, no 1. pp. 74–92. (in Russ.). [Kuropatenko V.F. New models of continuum mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2011. Vol. 84, no. 1. pp. 77–99.]

3. Kruglikov B.S., Kutushev A.G. Fizika gorenija i vzryva. 1988. no. 1. pp. 115–117. (in Russ.).

4. Kruglikov B.S., Kutushev A.G. Oslablenie vozdushnykh udarnykh voln slojami zapylennogo gaza i reshetkami (Attenuation of air shock layers of dust and gas grills). *Prikladnaja mekhanika i tekhnicheskaja fizika*. 1988. no. 1. pp. 51–57. (in Russ.).

[1] Kovalev Yury Mikhailovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: yum_kov@mail.ru
[2] Kuropatenko Valentin Fedorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Computational Continuum Mechanics Department, South Ural State University.
E-mail: v.f.kuropatenko@rambler.ru