УДК 517.968

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О.А. Титов

В работе получен алгоритм решения второй основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана в классах кусочно-бианалитических функций, линией скачков которой является простая гладкая кривая. Указаны условия, при которых решение задачи может быть получено конструктивно и явно в интегралах типа Коши. Исследована картина разрешимости задачи и установлена ее нетеровость.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \overline{C} \setminus \left(T^+ \cup L\right)$. Для определённости будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+.

В дальнейшем, в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу (см. также [1], с. 287): *найти все бианалитические функции* $F(z)$ *класса* $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, *удовлетворяющие на* L *краевым условиям:*

$$F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)F^+(t) + G_{12}(t)\overline{F^+(t)} + g_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} - G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}} + ig_2(t), \qquad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_+}$ *– производная по внутренней нормали к* L, *а* $G_{kj}(t), g_k(t)\ (k = 1,2;\ j = 1,2)$ *– заданные на* L *функции класса* $H^{(2-k)}(L)$ *(Гёльдера),* $\alpha(t)$ *– прямой или обратный сдвиг контура* L, *удовлетворяющий условию Карлемана*

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \qquad (3)$$

и такой, что $\alpha'(t) \neq 0, \alpha'(t) \in H(L)$. Здесь в краевом условии (2) множитель (-1) при $G_{22}(t)$ и мнимая единица i при $g_2(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [1], в дальнейшем задачу (1), (2) будем называть *второй основной трёхэлементной краевой задачей типа Карлемана в классах бианалитических функций* или короче – *задачей* GK_{32}, а соответствующую ей однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ – *задачей* GK_{32}^0.

В данной работе при некоторых ограничениях на коэффициенты краевых условий (1), (2) получен конструктивный алгоритм решения задачи GK_{32}.

2. Об эквивалентности GK_{32} двухэлементной краевой задаче типа Карлемана

Известно [1], [2], что всякую бианалитическую в области T^+ функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z), \qquad (4)$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ – аналитические в T^+ функции, называемые соответственно *нулевой и первой аналитическими компонентами* функции $F(z)$.

Решение задачи GK_{32} будем искать в виде (4). Поскольку выполняется условие (3), то из краевых условий (1), (2) можно получить следующие равенства:

$$F^+(t) = G_{11}[\alpha(t)]F^+[\alpha(t)] + G_{12}[\alpha(t)]\overline{F^+[\alpha(t)]} + g_1[\alpha(t)], \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}=G_{21}[\alpha(t)]\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+}-G_{22}[\alpha(t)]\overline{\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+}}+ig_2[\alpha(t)]. \tag{6}$$

Далее, переходя в соотношениях (1), (2) к комплексно сопряжённым значениям, получим:

$$\overline{F^+[\alpha(t)]}=\overline{G_{11}(t)}\,\overline{F^+(t)}+\overline{G_{12}(t)}F^+(t)+\overline{g_1(t)}, \tag{7}$$

$$\overline{\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+}}=\overline{G_{21}(t)}\,\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}}-\overline{G_{22}(t)}\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}-i\overline{g_1(t)}. \tag{8}$$

Наконец, подставляя в (5) и (6) вместо $F^+[\alpha(t)], \frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+}$ и $\overline{F^+[\alpha(t)]}, \overline{\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+}}$ их значения из (1), (2) и (7), (8) соответственно, будем иметь:

$$A_1(t)F^+(t)=B_1(t)\overline{F^+(t)}+H_1(t), \tag{9}$$

$$A_2(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}=-B_2(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}}+iH_2(t), \tag{10}$$

где

$$A_k(t)=1-G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t)-G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)}, \tag{11а}$$

$$B_k(t)=G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t)+G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)}, \tag{11б}$$

$$H_k(t)=G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t)+G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)}+g_k[\alpha(t)],\ k=1,2. \tag{11в}$$

Равенства (9), (10) представляют собой краевые условия *двухэлементной* задачи типа Карлемана в классах бианалитических функций.

Таким образом, при выполнении условий (3) *трехэлементная краевая задача* GK_{32} приводится к эквивалентной *двухэлементной задаче* вида (9), (10).

Из структуры равенств (9) и (10) вытекает, что далее целесообразно различать следующие *четыре случая:*

1) либо выполняются условия:

$$A_k(t)\neq 0, B_k(t)\neq 0, H_k(t)\neq 0, t\in L, k=1,2; \tag{12а}$$

2) либо выполняются условия:

$$\begin{cases}A_1(t)\neq 0, B_1(t)\neq 0, H_1(t)\neq 0, t\in L,\\ A_2(t)\equiv 0, B_2(t)\equiv 0, H_2(t)\equiv 0, t\in L;\end{cases} \tag{12б}$$

3) либо выполняются условия:

$$\begin{cases}A_1(t)\equiv 0, B_1(t)\equiv 0, H_1(t)\equiv 0, t\in L,\\ A_2(t)\neq 0, B_2(t)\neq 0, H_2(t)\neq 0, t\in L;\end{cases} \tag{12в}$$

4) либо выполняются условия:

$$A_k(t)\equiv 0, B_k(t)\equiv 0, H_k(t)\equiv 0, t\in L, k=1,2. \tag{12г}$$

3. О решении задачи GK_{32}. В данной заметке ограничимся рассмотрением *случая 2)*, т. е. всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия (12б).

Заметим, что если перейти в формуле (9) к комплексно сопряжённым значениям, то получим:

$$\overline{A_1(t)}\,\overline{F^+(t)}=\overline{B_1(t)}F^+(t)+\overline{H_1(t)}. \tag{13}$$

Далее, исключая из равенств (9), (13) выражение $\overline{F^+(t)}$, будем иметь:

$$\left(|A_1(t)|^2-|B_1(t)|^2\right)\cdot F^+(t)=\overline{A_1(t)}H_1(t)+B_1(t)\overline{H_1(t)}, \tag{14}$$

Так как выполняются условия (12б), вместо соотношения (10) будем пользоваться краевым условием (2). Учитывая формулу (см., например, [2], с. 304)

$$\frac{\partial}{\partial n_+}=i\left(t'\frac{\partial}{\partial t}-\overline{t'}\frac{\partial}{\partial \overline{t}}\right), \tag{15}$$

а также представление (4), равенства (2), (14) можно переписать в виде:

$$\left(|A_1(t)|^2-|B_1(t)|^2\right)\left(\varphi_0^+(t)+\overline{t}\varphi_1^+(t)\right)=\overline{A_1(t)}H_1(t)+B_1(t)\overline{H_1(t)}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\alpha'(t)t'\left(\frac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt}+\overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+(\alpha(t))}{dt}\right)-\overline{\alpha'(t)t'}\varphi_1^+(\alpha(t))=\\&=G_{21}(t)\left(t'\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}+\overline{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}\right)-\overline{t'}\varphi_1^+(t)\right)+\\&+G_{22}(t)\overline{\left(t'\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}+\overline{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}\right)-\overline{t'}\varphi_1^+(t)\right)}+g_2(t),\end{aligned} \tag{17}$$

В силу равенства (16) нетрудно заметить, что если $|A_1(t)|=|B_1(t)|$, но $\overline{A_1(t)}H_1(t)+B_1(t)\overline{H_1(t)}\neq 0$, $t\in L$, то, очевидно, *задача* GK_{32} *будет неразрешима*. Поэтому при дальнейшем исследовании задачи GK_{32} следует отдельно рассматривать следующие *два подслучая*:

а) $|A_1(t)|\neq|B_1(t)|$, $\quad t\in L$; (18а)

б) $|A_1(t)|=|B_1(t)|$, $\overline{A_1(t)}H_1(t)+B_1(t)\overline{H_1(t)}=0$, $\quad t\in L$. (18б)

3.1. Пусть выполняются условия (18а). Тогда из (16) будем иметь:

$$\varphi_0^+(t)+\overline{t}\varphi_1^+(t)=q(t), \tag{19}$$

где

$$q(t)=\frac{\overline{A_1(t)}H_1(t)+B_1(t)\overline{H_1(t)}}{|A_1(t)|^2-|B_1(t)|^2}. \tag{19a}$$

Поскольку ищутся решения задачи GK_{32} класса $A_2(T^+)\cap H^{(2)}(L)$ и, кроме того, $q(t)\in H^{(1)}(L)$, то, дифференцируя по t из (19) получаем:

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}+\overline{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}+\frac{\overline{t}'}{t'}\varphi_1^+(t)=\frac{dq(t)}{dt}. \tag{20}$$

Подставив в (20) $\alpha(t)$ вместо t, перепишем соотношение (20) в виде

$$\frac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt}+\overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+(\alpha(t))}{dt}+\frac{\overline{\alpha'(t)t'}}{\alpha'(t)t'}\varphi_1^+(\alpha(t))=\frac{dq(\alpha(t))}{dt}. \tag{21}$$

Кроме того, находя из (20) комплексно сопряженные значения, получим:

$$\overline{\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}}+t\overline{\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}}+\frac{t'}{\overline{t}'}\overline{\varphi_1^+(t)}=\overline{\frac{dq(t)}{dt}}. \tag{22}$$

Наконец, подставляя в равенство (17) вместо $\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}$, $\overline{\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}}$, $\frac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt}$ их значения, найденные по формулам (20), (21) и (22) соответственно, имеем:

$$\varphi_1^+(\alpha(t)) = G_1(t)\varphi_1^+(t) + G_2(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + g(t), \tag{23}$$

где

$$G_1(t) = \frac{G_{21}(t)}{\overline{\alpha'(t)}}, G_2(t) = \frac{t'^2 G_{22}(t)}{\overline{\alpha'(t)}},$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\alpha'(t)t'^2}{\overline{\alpha'(t)}}\frac{dq(\alpha(t))}{dt} - \frac{1}{2}\frac{t'^2 G_{21}(t)}{\overline{\alpha'(t)}}\frac{dq(t)}{dt} - \tag{24}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{G_{22}(t)}{\overline{\alpha'(t)}}\frac{\overline{dq(t)}}{dt} - \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{\alpha'(t)t'}}g_2(t).$$

Соотношение (24) представляет собой краевое условие обобщенной задачи типа Карлемана относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_1(z)$. Решая указанную задачу, например, методом, изложенным в [4], получаем (в случае ее разрешимости) аналитическую функцию $\varphi_1(z)$.

Далее, подставляем в (19) вместо $\varphi_1^+(t)$ граничное значение найденной функции $\varphi_1(z)$. Соотношение (19) будет представлять собой краевое условие задачи об аналитическом продолжении относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_0(z)$. Решая ее, находим функцию $\varphi_0(z)$.

Тогда решение искомой задачи GK_{32} (в рассматриваемом случае) можно получить по формуле

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z), \tag{25}$$

где $\varphi_0(z)$ - решение задачи об аналитическом продолжении, а $\varphi_1(z)$ - решение обобщенной задачи типа Карлемана (23).

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если на контуре L выполняются условия (12б) и (18а), то решение задачи GK_{32} сводится к последовательному решению обобщенной задачи типа Карлемана (23) относительно аналитической в T^+ функции $\varphi_1(z)$ и задачи об аналитическом продолжении (19) относительно аналитической в T^+ функции $\varphi_0(z)$, причем исходная GK_{32} разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы обе эти задачи.*

3.2. Предположим теперь, что выполняются условия (18б). Тогда с учётом формул (4) и (15), краевые условия (2) и (9) перепишутся в виде:

$$\varphi_0^+(t) + \bar{t}\varphi_1^+(t) = \frac{B_1(t)}{A_1(t)}\left(\overline{\varphi_0^+(t)} + t\overline{\varphi_1^+(t)}\right) + \frac{H_1(t)}{A_1(t)}, \tag{26}$$

$$\alpha'(t)t'\left(\frac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+(\alpha(t))}{dt}\right) - \overline{\alpha'(t)t'}\varphi_1^+(\alpha(t)) =$$

$$= G_{21}(t)\left(t'\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}\right) - \bar{t}'\varphi_1^+(t)\right) + \tag{27}$$

$$+ G_{22}(t)\overline{\left(t'\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}\right) - \bar{t}'\varphi_1^+(t)\right)} + g_2(t),$$

Вводя обозначения:

$$G_0(t)=\frac{B_1(t)}{A_1(t)},Q_0(t)=-\bar{t}\varphi_1^+(t)+t\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\overline{\varphi_1^+(t)}+\frac{H_1(t)}{A_1(t)}, \tag{28}$$

краевое условие (26) можно записать так:

$$\varphi_0^+(t)=G_0(t)\overline{\varphi_0^+(t)}+Q_0(t). \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что в силу условий (18б) для функций $G_0(t),Q_0(t)$ на контуре L выполняются следующие соотношения:

$$G_0(t)\overline{G_0(t)}\equiv 1, G_0(t)\overline{Q_0(t)}+Q_0(t)\equiv 0. \tag{30}$$

Следовательно, если временно предположить, что $Q_0(t)$ – известная функция, то равенство (29) представляет собой краевое условие задачи Гильберта относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_0^+(t)$ (см., например, [3], с. 174). Кроме того, при выполнении первого из соотношений (30) индекс Коши функции $G_0(t)$ является *четным числом*, т. е.

$$\kappa_0=\frac{1}{2\pi}\{\arg G_0(t)\}_L=2m_0. \tag{31}$$

Известно (см., например, [1], с. 167 или [3], с. 188), что решение задачи Гильберта (29) при $\kappa_0\ge 0$ можно задавать формулой:

$$\varphi_0(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau-z}d\tau+\Psi_0(z), \tag{32}$$

где $X_0(z)=z^{m_0}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\gamma_0(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\}$ – *каноническая функция задачи* (29), $\mu_0(t)$ – решение интегрального уравнения Фредгольма вида

$$(Z\mu_0)(t)\equiv\mu_0(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\overline{\tau^{2'}(\sigma)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right]\mu_0(\tau)d\tau=\frac{Q_0(t)}{X_0(t)}, \tag{33}$$

а $\Psi_0(z)=X_0(z)\sum_{j=0}^{\kappa_0}\beta_jW_j(z)$ – общее решение соответствующей (29) *однородной задачи* Гильберта.

Если же $\kappa_0<0$, то при выполнении следующих $-\kappa_0-1$ условий разрешимости

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau^{q+1}}d\tau=0,\qquad \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau^{j+1}}d\tau=0, \tag{34}$$

$$q=0,1,\dots,-m_0-1;\ j=1,2,\dots,-m_0-1,$$

решение задачи (29) также задаётся формулой (32), где в выражении для $\Psi_0(z)$ вместо $\sum_{j=0}^{\kappa_0}\beta_jW_j(z)$ нужно подставить постоянную $\delta_0=-\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau}d\tau\right\}$.

Так как однородное уравнение Фредгольма $(Z\mu_0)(t)=0$ имеет лишь нулевое решение (см., например, [3], с. 176), то неоднородное уравнение (33) будет иметь единственное решение. Пусть

$$\mu_0(t)=\frac{Q_0(t)}{X_0(t)}+\int_L R_0(t,\tau)\frac{Q_0(\tau)}{X_0(\tau)}d\tau \tag{35}$$

есть решение уравнения (33), где $R_0(t,\tau)$ – резольвента ядра

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\overline{\tau^{2'}(\sigma)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right]. \tag{36}$$

Подставляя в правую часть равенства (32) вместо функции $\mu_0(t)$ её значение из формулы (35), получим (см. также [1], с. 169):

$$\varphi_0(z) = \mathrm{X}_0(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\mathrm{X}_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_1(z,\tau)\frac{Q_0(\tau)}{\mathrm{X}_0(\tau)}d\tau\right\} + \Psi_0(z), \tag{37}$$

где

$$R_1(z,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R_0(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - z}d\tau_1.$$

Далее, переходя к пределу при $z \to t \in L$, из (37) (с учётом обозначения (28)) будем иметь:

$$\varphi_0^+(t) = -\bar{t}\varphi_1^+(t) + \int_L D_0(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L E_0(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau + M_0(t), \tag{38}$$

где

$$D_0(t,\tau) = -\frac{\mathrm{X}_0(t)}{2\pi i}\left(\frac{\bar{\tau}}{\mathrm{X}_0(\tau)} - \frac{\bar{t}}{\mathrm{X}_0(t)}\right)\frac{1}{\tau - t} - \bar{\tau}\frac{\mathrm{X}_0(t)}{\mathrm{X}_0(\tau)}R_1(t,\tau),$$

$$E_0(t,\tau) = \frac{\mathrm{X}_0(t)}{2\pi i}\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\left(\frac{\tau}{\mathrm{X}_0(\tau)} - \frac{t}{\mathrm{X}_0(t)} - \frac{(\tau - t)\overline{\tau^{2'}(\sigma)}}{\bar{\tau} - \bar{t}}\right)\frac{1}{\tau - t} + \tau\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\frac{\mathrm{X}_0(t)}{\mathrm{X}_0(\tau)}R_1(t,\tau), \tag{38a}$$

$$M_0(t) = \Psi_0(t) + \frac{H_1(t)}{2A_1(t)} + \frac{\mathrm{X}_0(t)}{2\pi i}\int_L \frac{H_1(\tau)}{A_1(\tau)\mathrm{X}_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \mathrm{X}_0(t)\int_L R_1(t,\tau)\frac{H_1(\tau)}{A_1(\tau)\mathrm{X}_0(\tau)}d\tau.$$

Замечание 1. Важно заметить, что поскольку $L \in C_\mu^2$, а $G_{1j}(t), g_1(t) \in H^{(1)}(L)$, ядра $D_0(t,\tau), E_0(t,\tau) \in H^{(1)}(L \times L)$, а функция $M_0(t) \in H^{(1)}(L)$.

Теперь, дифференцируя по t, из (38) (с учетом замечания 1) получаем:

$$\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} = -\bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \frac{\bar{t}'}{t'}\varphi_1^+(t) + \int_L D_1(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L E_1(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau + \frac{dM_0(t)}{dt}, \tag{39}$$

где

$$D_1(t,\tau) = \frac{\partial D_0(t,\tau)}{\partial t}, E_1(t,\tau) = \frac{\partial E_0(t,\tau)}{\partial t}. \tag{39a}$$

Подставив в (39) $\alpha(t)$ всюду вместо t будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt} &= -\overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+(\alpha(t))}{dt} - \frac{\overline{\alpha'(t)t'}}{\alpha'(t)t'}\varphi_1^+(\alpha(t)) + \\ &+ \int_L D_1(\alpha(t),\alpha(\tau))\varphi_1^+(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)d\tau + \\ &+ \int_L E_1(\alpha(t),\alpha(\tau))\overline{\varphi_1^+(\alpha(\tau))}\alpha'(\tau)d\tau + \frac{dM_0(\alpha(t))}{dt}.\end{aligned} \tag{40}$$

Кроме того, переходя в (39) к комплексно сопряжённым значениям, имеем:

$$\overline{\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}} = -t\overline{\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}} - \frac{t'}{\bar{t}'}\overline{\varphi_1^+(t)} + \int_L D_1^*(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau + \int_L E_1^*(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \overline{\frac{dM_0(t)}{dt}}, \tag{41}$$

где

$$D_1^*(t,\tau) = \overline{D_1(t,\tau)\tau'^2(\sigma)}, E_1^*(t,\tau) = \overline{E_1(t,\tau)\tau'^2(\sigma)}. \tag{41a}$$

Наконец, подставив в равенство (27) вместо $\dfrac{d\varphi_0^+(t)}{dt}, \dfrac{d\varphi_0^+(\alpha(t))}{dt}, \overline{\dfrac{d\varphi_0^+(t)}{dt}}$ их значения, найденные соответственно по формулам (39), (40), (41), получим:

$$\varphi_1^+(\alpha(t)) + G_2(t)\varphi_1^+(t) + K_2(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + \int_L D_2(t,\tau)\varphi_1^+(\alpha(\tau))d\tau +$$
$$+ \int_L E_2(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\alpha(\tau))}d\tau + \int_L D_3(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \int_L E_3(t,\tau)\overline{\varphi_1^+(\tau)}d\tau = Q_2(t), \tag{42}$$

где

$$G_2(t) = -\frac{G_{21}(t)}{\overline{\alpha'(t)}}, K_2(t) = -\frac{t'^2 G_{22}(t)}{\overline{\alpha'(t)}}, D_2(t,\tau) = -\frac{\alpha'(\tau)D_1(\alpha(t),\alpha(\tau))}{2\overline{\alpha'(t)t'}},$$

$$E_2(t,\tau) = -\frac{\alpha'(\tau)E_1(\alpha(t),\alpha(\tau))}{2\overline{\alpha'(t)t'}},$$

$$D_3(t,\tau) = \frac{1}{2\overline{\alpha'(t)t'}}\left(G_{21}(t)D_1(t,\tau) + G_{22}(t)E_1^*(t,\tau)\right), \tag{42a}$$

$$E_3(t,\tau) = \frac{1}{2\overline{\alpha'(t)t'}}\left(G_{21}(t)E_1(t,\tau) + G_{22}(t)D_1^*(t,\tau)\right),$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{2\overline{\alpha'(t)t'}}\left(G_{21}(t)\frac{dM_0(t)}{dt} + G_{22}(t)\overline{\frac{dM_0(t)}{dt}} - g_2(t)\right).$$

Соотношение (42) представляет собой условие обобщенной краевой задачи типа Карлемана. Решив ее, можно найти аналитическую функцию $\varphi_1(z)$. Далее, подставляя граничное значение $\varphi_1(t)$ найденной функции $\varphi_1(z)$ в свободный член $Q_0(t)$ обычной задачи типа Карлемана (29), а затем, решая последнюю (в случае её разрешимости), находим аналитическую функцию $\varphi_0(z)$.

Тогда решение искомой задачи GK_{32} (в рассматриваемом случае) можно получить по формуле

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z), \tag{48}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ – решения задач (29) и (42) соответственно.

Таким образом, установили следующий результат.

Теорема 2. *Если на контуре L выполняются условия (12б) и (18б), то решение задачи GK_{32} сводится к последовательному решению обобщенной задачи типа Карлемана (42) относительно аналитической в T^+ функции $\varphi_1(z)$ и обычной задачи типа Карлемана (29) относительно аналитической в T^+ функции $\varphi_0(z)$, причем исходная задача GK_{32} разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы обе эти задачи.*

Литература

1. Расулов, К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения / К.М. Расулов. - Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. - 343 с.
2. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
3. Литвинчук, Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. - М.: Наука, 1977. - 448 с.
4. Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н.П. Векуа. - М.: Наука, 1970.-379 с.
5. Примачук, Л.П. О краевой задаче с сопряжением / Л.П. Примачук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1967. - Т. 4. - С. 59-62.
6. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. -М.-Л., 1952.-540 с.

Поступила в редакцию 20 ноября 2006 г.