УДК 517.929.21

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЩЕЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ

Д.А. Комиссарова

В работе доказаны некоторые достаточные признаки асимптотической устойчивости нулевого решения разностной системы с запаздываниями $x_n = \sum_{i=1}^{k} A_i x_{n-i}$, где A_i – действительные матрицы $(1 \le i \le k)$. Как следствия, найдены условия устойчивости разностной системы $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}$, где A, B – действительные матрицы, натуральное число k – запаздывание. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах.

Рассмотрим полную разностную систему порядка k.

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} A_i x_{n-i}, \qquad (1)$$

где A_i - действительные матрицы размера $(m \times m)$, $x_n : N \to R^m$. Наша цель - найти достаточные признаки устойчивости системы (1), легко применимые на практике.

Для аналогичного скалярного уравнения

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}, \qquad (2)$$

где $a_i \in R$ $(1 \le i \le k)$, известен результат Кона [1], из которого следует, что уравнение (2) асимптотически устойчиво, если

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i| < 1. \qquad (3)$$

В работах [2-4] найдены некоторые простые признаки устойчивости уравнения (2), основанные на ограничениях на коэффициенты a_i $(1 \le i \le k)$.

Результат, полученный Лизом [2], заключается в том, для асимптотической устойчивости уравнения (2) достаточно выполнения условия

$$|a_1 - 1| + \sum_{i=2}^{k} a_i^+ < \frac{\sum_{i=2}^{k} a_i^- \left(1 - \sum_{i=2}^{k} i a_i^-\right)}{1 + \sum_{i=2}^{k} i a_i^-}, \qquad (4)$$

где $a_i^+ = \max\{0, a_i\}$, $a_i^- = \max\{0, -a_i\}$.

Березанский и Браверман доказали, что уравнение (2) асимптотически устойчиво, если существует такое множество индексов $I \subset \{2,3,\ldots,k\}$, что

$$0 < -a_1 - \sum_{i \in I} a_i < 1,$$
$$\sum_{i \in I} i|a_i| < \frac{1 - a_1 - \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} |a_i|}{\sum_{j=1}^{k} |a_j|}. \qquad (5)$$

Наша первая задача - получить признак асимптотической устойчивости уравнения (1), аналогичный условию Кона (3). Вторая задача - перенести на систему (1) достаточные признаки устойчивости для скалярного уравнения (2). Третья задача - доказать некоторые дополнительные признаки асимптотической устойчивости, зависящие от четности или нечетности запаздывания. И, наконец, последняя задача - применить полученные результаты к исследованию асимптотической устойчивости системы

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-k}, \tag{6}$$

где A, B - действительные матрицы размера $(m\times m)$, $x_n : N \to R^m$, $k\in N$ - запаздывание.

В дальнейших рассуждениях под $\|\cdot\|$ будем понимать любую матричную норму, удовлетворяющую четырем аксиомам нормы:

1. $\|A\|\geq 0$ и $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$,
2. $\|cA\|=|c|\cdot\|A\|$ для любого $c\in R$,
3. $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$,
4. $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$ для всех матриц A,B размера $(m\times m)$;

и согласованную с некоторой векторной нормой $\|\cdot\|_*$, т.е. $\|Ax\|_*\leq\|A\|\cdot\|x\|_*$, для любого $x\in R^m$ и любой матрицы A размера $(m\times m)$.

Определим, как принято, $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$.

Следующая теорема является аналогом условия Кона (3) для линейной системы (1).

Теорема 1. *Если*

$$\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|<1, \tag{7}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим, что $\max(\|x_{-1}\|,\|x_{-2}\|,\ldots,\|x_{-k}\|)=M$ и $\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|=\alpha<1$. Следовательно, для всех $n=0,1,\ldots,k-1$

$$\|x_n\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}A_i x_{n-i}\right\|\leq\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|M=\alpha M<M.$$

Тогда для всех $n=k,k+1,\ldots,2k-1$

$$\|x_n\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}A_i x_{n-i}\right\|\leq\sum_{i=1}^{k}\|A_i\|\alpha M=\alpha^2 M<\alpha M.$$

Таким же образом, для $n\geq rk$, $r\in N$, получаем, что $\|x_n\|<\alpha^r M$.

Значит уравнение асимптотически устойчиво. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Если* $\|A\|+\|B\|<1$, *то уравнение (4) асимптотически устойчиво.*

Пример. Рассмотрим систему (4) с матрицами $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}1\\ 0 & 0{,}1\end{pmatrix}$. Тогда $\|A\|_\infty+\|B\|_\infty=1{,}2>1$, но $\|A\|_1+\|B\|_1=0{,}9<1$. Следовательно, согласно следствию 2, уравнение асимптотически устойчиво при любых значениях запаздывания k.

Теорема 3. *Если существует натуральное число* p $(1\leq p\leq k)$ *и множество индексов* $I\subset\{p,p+1,\ldots,k\}$, *таких, что,*

$$\left\|\sum_{i\in I}A_i\right\|+\sum_{i\notin I}\|A_i\|+\sum_{i\in I}\|A_i\|(i-p)\left(\|A_1-E\|+\sum_{j=2}^{k}\|A_j\|\right)<1, \tag{8}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Уравнение (1) можно записать в виде

$$x_n = \sum_{i\in I} A_i x_{n-p} - \sum_{i\in I} A_i \left(x_{n-p} - x_{n-i}\right) + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i}$$

$$= \left(\sum_{i\in I} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} - \sum_{i\in I} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} \left(x_{n-s} - x_{n-s-1}\right)\right) \tag{9}$$

$$= \left(\sum_{i\in I} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} - \sum_{i\in I} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} \left(\left(A_1 - E\right) x_{n-s-1} + \sum_{j=2}^{k} A_j x_{n-s-j}\right)\right).$$

Здесь E – единичная матрица.

Применяя теорему 1 к (9), получаем требуемое неравенство. Теорема 3 доказана.

Если взять $p = 1, I = \{1, k\}$, то из теоремы 3 получим следующий результат.

Следствие 4. *Если*

$$\|A + B\| + \|B\|(k-1)\left(\|A - E\| + \|B\|\right) < 1, \tag{10}$$

то уравнение (4) асимптотически устойчиво.

Этот результат удобен для применения, если $\|A - E\| \ll 1$ и $\|B\| \ll 1$.

Теорема 5. *Если существует натуральное число* p $(1 \le p \le k)$ *и множество индексов* $I \subset \{p, p+1, \ldots, k\}$, *таких, что,*

$$\left\|\sum_{i\in I} (-1)^{i+1} A_i\right\| + \sum_{i\notin I} \|A_i\| + \sum_{i\in I} \|A_i\|(i-p)\left(\|A_1 + E\| + \sum_{j=2}^{k} \|A_j\|\right) < 1, \tag{11}$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $I = I_1 \cup I_2$, где I_1 и I_2 – множества нечетных и четных индексов соответственно.

Предположим, что p – нечетное. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$x_n = \sum_{i\in I_1} A_i x_{n-p} - \sum_{i\in I_2} A_i x_{n-p} - \sum_{i\in I_1} A_i \left(x_{n-p} - x_{n-i}\right) + \sum_{i\in I_2} A_i \left(x_{n-p} + x_{n-i}\right) + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i}$$

$$= \left(\sum_{i\in I_1} A_i - \sum_{i\in I_2} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i}$$

$$- \sum_{i\in I_1} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^{s+1} \left(x_{n-s} + x_{n-s-1}\right)\right) + \sum_{i\in I_2} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^{s+1} \left(x_{n-s} + x_{n-s-1}\right)\right) \tag{12}$$

$$= \left(\sum_{i\in I} (-1)^{i+1} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} + \sum_{i\in I} (-1)^i A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^{s+1} \left(\left(A_1 + E\right) x_{n-s-1} + \sum_{j=2}^{k} A_j x_{n-s-j}\right)\right).$$

Согласно теореме 1 и (12) получаем требуемое утверждение.

Теперь предположим, что p - четное. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$x_n = -\sum_{i\in I_1} A_i x_{n-p} + \sum_{i\in I_2} A_i x_{n-p} + \sum_{i\in I_1} A_i \left(x_{n-p} + x_{n-i}\right) - \sum_{i\in I_2} A_i \left(x_{n-p} - x_{n-i}\right) + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} =$$

$$= -\left(\sum_{i\in I_1} A_i - \sum_{i\in I_2} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} +$$

$$+ \sum_{i\in I_1} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^s \left(x_{n-s} + x_{n-s-1}\right)\right) - \sum_{i\in I_2} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^s \left(x_{n-s} + x_{n-s-1}\right)\right) = \tag{13}$$

$$= -\left(\sum_{i\in I} (-1)^{i+1} A_i\right) x_{n-p} + \sum_{i\notin I} A_i x_{n-i} + \sum_{i\in I} (-1)^{i+1} A_i \left(\sum_{s=p}^{i-1} (-1)^s \left(\left(A_1 + E\right) x_{n-s-1} + \sum_{j=2}^{k} A_j x_{n-s-j}\right)\right).$$

Как и в предыдущем случае, получаем требуемое утверждение.
Теорема 5 доказана.

Замечание. Если $I=\varnothing$ или $I=\{p\}$, то условия (8) и (11) совпадают с условием (7). Если $I=\{l\}, l\neq p$, то получаем более сильные ограничения чем (7).

Если взять $p=1, I=\{1,k\}$, то теорема 5 дает следующий результат, зависящий от четности или нечетности запаздывания.

Следствие 6. *Если*

$$\left\|A+(-1)^{k+1}B\right\|+\|B\|(k-1)\left(\|A+E\|+\|B\|\right)<1, \tag{14}$$

то уравнение (4) асимптотически устойчиво.

Этот результат удобен для применения, если $\|A+E\|\ll 1$ и $\|B\|\ll 1$.

Пример. Рассмотрим систему (4) с матрицами $A=\begin{pmatrix}-0{,}95 & 0{,}01\\ 0 & -0{,}96\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-0{,}2 & 0\\ 0 & -0{,}18\end{pmatrix}$.

Для любой матричной нормы $\|A\|+\|B\|\geq \rho(A)+\rho(B)=1{,}16>1$. Здесь $\rho(A)$ и $\rho(B)$ – спектральные радиусы матриц. Следовательно, следствие 2 неприменимо к исследованию асимптотической устойчивости данной системы.

Следствие 4 тоже не дает ответа об устойчивости, поскольку $\|A+B\|\geq \rho(A+B)=1{,}15>1$.

При нечетных значениях запаздывания k неравенство (14) не выполняется, а при четных значениях k имеем $\|A-B\|_\infty+\|B\|_\infty(k-1)\left(\|A+E\|_\infty+\|B\|_\infty\right)=0{,}78+(k-1)0{,}052$. Отсюда получаем, что уравнение асимптотически устойчиво при $k=2$ и $k=4$, согласно следствию 6.

Литература

1. Cohn, A. Uber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise / A. Cohn //Mathematische Zeitschrift. - 1922. - V.14, Jfsl.-P.1 10-148.

2. Liz, E. On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations / Liz E. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2005. - V. 303. - P. 492-498.

3. Berezansky, L. On exponential dichotomy, Bohl-Perron type theorems and stability of difference equations / L. Berezansky, E. Braverman // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2005.-V. 304.-P. 511-530.

4. Berezansky, L. Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations / L. Berezansky, E. Braverman, E. Liz // Journal of Difference Equations and Applications. - 2005. - V.11, № 9. - P. 785-798.

5. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. - М.: Наука, 1978. - 280 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2007 г.