УДК 517.956.22

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Карачик

Основываясь на полученных ранее оценках для G-функций и О-нормированных систем функций относительно оператора Лапласа, найдено новое разложение аналитических функций в обобщенную формулу Альманси.

Введение

Рассмотрим полиномы следующего вида [3]

$$G_k^s(x_{(n)}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{|x_{(n-1)}|^{2i} x_n^{k-2i,!}}{(2,2)_i (n-1+2s,2)_i}, \tag{1}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)...(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера, причем $(a,b)_0 = 1$, $t^{m,!}$ – факториальная степень $t^{m,!} = t^m/m!$, а $[a]$ – целая часть числа a. Полиномы $G_k^s(x_{(n)})$ вида (1) называются G-полиномами степени k, порядка s и рода n. В [7] установлено, что произведение однородного гармонического полинома от $n-1$ переменных $H_s(x_{(n-1)})$ на G-полином $G_k^s(x_{(n)})$ дает гармонический полином от n переменных $u(x) = G_k^s(x_{(n)})H_s(x_{(n-1)})$. Более того, всякий гармонический полином от n переменных может быть разложен в сумму полиномов такого вида.

Такой подход к построению гармонических полиномов позволяет получать гармонические полиномы в виде произведения различных G-полиномов

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n}(x_{(2)}) x_1^{\nu_n}, \tag{2}$$

где $\nu \in N_0^n$, $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n$ и $\nu_n = 0,1$. При рассмотрении следов G-полиномов на единичной сфере возникает понятие G-функции. Следующая функция

$$G_k^{s,n}(t) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i \frac{t^{k-s-2i,!}(1-t^2)^{i+s/2}}{(2,2)_i (n-1+2s,2)_i}$$

называется G-функцией степени k, порядка s и рода n.

Верны следующие утверждения:

Лемма 1. [4] Пусть функция $f \in C(\partial S_n)$ задана в виде $f(x) = \varphi(|\tilde{x}|, x_n) P_k(\tilde{x})$, где $P_k(\tilde{x})$ однородный гармонический полином степени k от переменной $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$ и $\varphi \in C(\partial S_n)$, тогда

$$\int_{|x|=1} f(x)\,dx = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{|x|=1} \varphi(|\tilde{x}|, x_n)\left(1-x_n^2\right)^{k/2} dx \int_{|\tilde{x}|=1} P_k(\tilde{x})\,d\tilde{x},$$

где $\omega_n = |\partial S_n|$ – площадь единичной сферы в R^n.

Теорема 1. [3] Нормированная в $L_2(-1,1)$ с весом $\rho_n(t) = (1-t^2)^{(n-3)/2}$ G-функция $\bar{G}_k^{s,n}(t)$ удовлетворяет оценке

$$|\bar{G}_k^{s,n}(t)| \leq 2^k \sqrt{(k+(n-2)/2)2^{n-3}}, \quad k \geq s, n \geq 2.$$

Основываясь на свойствах гармонических полиномов $G_{(\nu)}(x)$, в теореме 2, известное утверждение Альманси [1]: «для любого полинома $P(x)$ существуют гармонические полиномы $H_0(x), ..., H_k(x)$ такие, что

$$P(x) = H_0(x) + |x|^2 H_1(x) + \cdots + |x|^{2k} H_k(x),» \tag{3}$$

распространяется на аналитические функции действительного переменного $x \in R^n$. Затем, в теоремах 3 и 4, этот результат уточняется – даются формулы нахождения полиномов $H_k(x)$ и функций $u_k(x)=H_k(x)$, когда $P(x)$ не полином. Теорема 4 проиллюстрирована на представлении решений уравнения Гельмгольца через гармонические функции (25).

Следует заметить, что в [2] (теорема 2.2) формула Альманси была уже распространена на голоморфные функции. Оказалось, что полученная ниже формула (18) несколько отличается от формулы (2.9), найденной в [2]. Обобщения другого рода были получены в 1958 г. М. Николеску [8], где найдено разложение Альманси для класса операторов от двух переменных, который включает в себя и оператор теплопроводности. В работе [9] рассматривалось разложение Альманси для решений уравнения $\square^m u=0$, где $\square=\Delta_x+\lambda\partial^2/\partial t^2$ или $\square=\Delta_x+\lambda\partial/\partial t$ при $\lambda\in C\setminus\{0\}$.

Полигармонические функции

Имеет место следующее свойство гармонических полиномов $G_{(\nu)}(x)$ (2).

Лемма 2. Для нормированного в $L_2(\partial S_n)$ гармонического полинома $\bar{G}_{(\nu)}(x)$ верна формула

$$\bar{G}_{(\nu)}(x)=|x|^{\nu_1}\prod_{i=1}^{n-1}\bar{G}_{\nu_i}^{\nu_{i+1},n-i+1}(\cos\varphi_{n-i+1}),$$

где G-функция $\bar{G}_k^{s,n}(t)$ нормированная в $L_2(-1,1)$ с весом $\rho_n(t)=(1-t^2)^{(n-3)/2}$.

На основании данной леммы нетрудно доказать

Теорема 2. Для любой функции $f(x)$, аналитической в начале координат, существуют гармонические функции $u_0(x),\dots,u_n(x),\dots$, определенные в некоторой окрестности начала координат D такие, что

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}|x|^{2i}u_i(x),\quad x\in D. \tag{4}$$

Замечание 1. Доказательство теоремы не является конструктивным так же как и формула Альманси. Оно опирается лишь на оценку теоремы 1 и не позволяет строить гармонические функции $u_i(x)$ по известной функции $f(x)$. Формулу для нахождения гармонических функций $u_i(x)$ дает теорема 4.

Рассмотрим область $D\subset R^n$, обладающую свойством звездности $\forall x\in D$, $\forall t\in[0,1]$ $tx\in D$ и определим на ней следующую последовательность функций:

$$G_k(x;u)=\begin{cases} u(x), & k=0\\ \dfrac{1}{4^k}\dfrac{|x|^{2k}}{k!}\displaystyle\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}u(\alpha x)\,d\alpha, & k>0,\end{cases}$$

где $u(x)$ некоторая гармоническая в D функция. Система функций $\{G_k(x;u)\,|\,k=0,1,\dots\}$ является 0-нормированной относительно оператора Δ в D [5], т.е. в области D верны равенства $\Delta G_k(x;u)=G_{k-1}(x;u)$ и $\Delta G_0(x;u)=0$.

Лемма 3. Для всякой полигармонической функции $P(x)$ существуют такие гармонические функции $v_0(x),\dots,v_m(x)$, что имеет место равенство

$$P(x)=G_0(x;v_0)+G_1(x;v_1)+\dots+G_m(x;v_m). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим полигармоническую функцию $P(x)$ порядка m т.е. такую функцию, что $P\in C^\infty(D)$ и $\Delta^m P(x)=0$. Согласно формуле Альманси (3), найдутся такие гармонические функции $u_k(x)$, что

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}|x|^{2k}u_k(x). \tag{6}$$

Из определения функции $G_k(x;v)$ видно, что ее можно представить в виде произведения некоторой гармонической функции на полином $|x|^{2k}$. Записывая функцию $u_k(x)$ из (6), при $k\ge 1$, в виде

$$u_k(x)=\frac{1}{4^k k!}\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}v_k(\alpha x)d\alpha, \tag{7}$$

формулу (6) можно записать в форме (5). Покажем, что уравнение (7) можно однозначно разрешить относительно $v_k(x)$, причем функция $v_k(x)$ получается при этом гармонической. Это и докажет утверждение леммы.

Введем следующий оператор $\Lambda=\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. При $q\in N$ и $s\ge 0$, верно равенство

$$(\Lambda+s+1)\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^q}{q!}\alpha^s v(\alpha x)d\alpha=\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{q-1}}{(q-1)!}\alpha^{s+1}v(\alpha x)d\alpha, \tag{8}$$

а также при $q=0$

$$(\Lambda+s+1)\int_0^1 \alpha^s v(\alpha x)d\alpha=v(x). \tag{9}$$

Пусть $k=1$. В силу равенства (9) взятого при $s=n/2-1$ получим

$$4\left(\Lambda+\frac{n}{2}\right)u_1(x)=\left(\Lambda+\frac{n}{2}\right)\int_0^1 \alpha^{n/2-1}v_1(\alpha x)d\alpha=v_1(x). \tag{10}$$

Пусть $k>1$. Тогда, в силу равенства (8) взятого при $s=n/2-1$ получим

$$k!4^k\left(\Lambda+\frac{n}{2}\right)u_k(x)=\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-2}}{(k-2)!}\alpha^{n/2}v_k(\alpha x)d\alpha.$$

Используя опять (8), но уже при $s=n/2$ найдем

$$k!4^k\left(\Lambda+\frac{n}{2}\right)\left(\Lambda+\frac{n}{2}+1\right)u_k(x)=\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-3}}{(k-3)!}\alpha^{n/2+1}v_k(\alpha x)d\alpha.$$

Продолжая указанный процесс, найдем

$$k!4^k\prod_{i=0}^{k-2}\left(\Lambda+\frac{n}{2}+i\right)u_k(x)=\int_0^1 \alpha^{n/2+k-2}v_k(\alpha x)d\alpha.$$

Воспользовавшись равенством (9) при $s=n/2+k-2$ и внося множитель $k!4^k$ под знак произведения, будем иметь

$$v_k(x)=\prod_{i=0}^{k-1}4(i+1)\left(\Lambda+\frac{n}{2}+i\right)u_k(x).$$

В силу (10) данное равенство верно и при $\kappa=1$. Итак, функция $v_k(x)$ найдена. Для окончательного доказательства леммы следует заметить, что оператор Λ переводит гармонические функции в гармонические. □

Таким образом, в силу леммы 3, для произвольной полигармонической функции *P(x)* имеет место равенство

$$P(x)=G_0(x;v_0)+G_1(x;v_1)+\ldots+G_m(x;v_m) \tag{11}$$

где $v_k(x)$ – неизвестные гармонические функции. Найдем зависимость этих функций от функции $P(x)$. В силу 0-нормированности системы функций $\{G_k(x;u)\,|\,k=0,1,...\}$ относительно оператора Δ в области D верно равенство

$$\Delta^r G_k(x;v_i(x))=\begin{cases} G_{k-r}(x;v_i(x)), & k>r \\ v_i(x), & k=r. \\ 0, & k<r \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\Delta^m P(x)=\Delta^m G_0(x;v_0)+\Delta^m G_1(x;v_1)+\ldots+\Delta^m G_m(x;v_m)=G_0(x;v_m)=v_m(x).$$

Далее,

$$\Delta^{m-1}P(x)=G_0(x;v_{m-1})+G_1(x;v_m)=v_{m-1}(x)+\frac{|x|^2}{4}\int_0^1 \alpha^{n/2-1}v_m(\alpha x)d\alpha$$

и значит, используя предыдущее равенство, запишем

$$v_{m-1}(x)=\Delta^{m-1}P(x)-\frac{|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2-1}\Delta^m P(\alpha x)d\alpha. \qquad (12)$$

Докажем следующую формулу для вычисления функции $v_{m-i}(x)$:

$$v_{m-i}(x)=\Delta^{m-i}P(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{m-i+s}P(\alpha x)d\alpha, \qquad (13)$$

где $i=1,...,m$. При $i=1$ она имеет вид (12). Предполагая верность (13) при некотором $j\ge 1$ и для всех $i\le j$, докажем ее справедливость и при $i=j+1$.

Из (11) нетрудно получить

$$\Delta^{m-j-1}P(x)=v_{m-j-1}+G_1(x;v_{m-j})++G_{j+1}(x;v_m),$$

откуда

$$v_{m-j-1}=\Delta^{m-j-1}P(x)-\sum_{i=1}^{j+1}\frac{1}{4^i}\frac{|x|^{2i}}{i!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{i-1}\alpha^{n/2-1}}{(i-1)!}v_{m-j-1+i}(\alpha x)d\alpha.$$

Используя предположение индукции (13) и равенство $\Delta^k P=0$ для $k\ge m$ найдем

$$v_{m-j-1}=\Delta^{m-j-1}P(x)-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\frac{|x|^{2i}}{i!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{i-1}}{(i-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{m-j-1+i}P(\alpha x)d\alpha-$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}\frac{|x|^{2i}}{i!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{i-1}\alpha^{n/2-1}}{(i-1)!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|\alpha x|^{2s}}{s!}\times \qquad (14)$$
$$\times\int_0^1\beta^{n/2-1}\frac{(1-\beta)^{s-1}}{(s-1)!}\beta^{s-1}\Delta^{m-j-1+i+s}P(\alpha\beta x)d\beta d\alpha.$$

Обозначим последнее слагаемое в полученной сумме через $I(x)$. Тогда

$$I(x)=-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{|x|^{2l}}{4^l}\int_0^1\sum_{s=1}^{l-1}J(x)\beta^{n/2-1}\Delta^{m-j-1+l}P(\beta x)d\beta,$$

где обозначено

$$J(x)=\frac{(1-\beta)^l}{l!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-1)^s\beta^{s-1}}{(l-s)!(s-1)!}+\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-1)^s\beta^s}{(l-s)!s!}.$$

Вычисления показывают, что $J(x)=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!}\left[(-\beta)^{l-1}-1\right]$ и значит

$$I(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2l}}{s!}\int_0^1\frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{m-j-1+s}P(\alpha x)d\alpha+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{m-j-1+s}P(\alpha x)d\alpha. \qquad (15)$$

Подставляя вычисленное значение I(x) - последнего слагаемого в (14), будем иметь

$$v_{m-j-1}=\Delta^{m-j-1}P(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{m-j-1+s}P(\alpha x)d\alpha,$$

что совпадает с формулой (13) при i $=j+1$. Индукция доказана.

Таким образом, основываясь на (13), мы имеем для $v_k(x)$ общее выражение

$$v_k(x)=\Delta^k P(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k+s}P(\alpha x)d\alpha, \qquad (16)$$

где $k=0,...,m$. Таким образом, доказана теорема, уточняющая лемму 3. □

Теорема 3. Для любой полигармонической функции $P(x)$ имеет место равенство (5)

$$P(x)=G_0(x;v_0)+G_1(x;v_1)+\ldots+G_m(x;v_m),$$

где гармонические функции $v_0(x),...,v_m(x)$ находятся из равенства (16).

Замечание 2. При $k=0$ формула (16) принимает вид

$$v_0(x)=P(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s P(\alpha x)d\alpha$$

и задает гармоническую составляющую произвольного полинома $P(x)$ в формуле Альманси $P(x)=v_0(x)+|x|^2 Q(x)$. Заметим, что в [6] получено другое – «дифференциальное» представление гармонического полинома $v_0(x)$.

Докажем теперь, что для аналитической в начале координат функции $f(x)$ имеет место формула (5) с бесконечным значением параметра m т.е.

$$f(x)=v_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}v_k(\alpha x)d\alpha,\quad x\in D. \tag{17}$$

Теорема 4. Для любой функции $f(x)$ аналитической в начале координат имеет место равенство (17), в котором гармонические функции $v_0(x),...,v_n(x),...$ определены в некоторой звездной области D с центром в начале координат и задаются формулой

$$v_k(x)=\Delta^k f(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k+s}f(\alpha x)d\alpha. \tag{18}$$

Замечание 3. Формула (18) несколько отличается от аналогичной формулы (2.9), полученной ранее в [2].

Доказательство. Покажем сначала, что функции $v_k(x)$, найденные из равенства (18) являются гармоническими (этого не требовалось при доказательстве теоремы 3, поскольку там мы исходили из леммы 3) и при подстановке в (17) обращают его в тождество. Применим оператор Λ к обеим частям равенства (18), считая законным дифференцирование под знаком суммирования. Если использовать равенство

$$\Delta\left(|x|^{2s}u(x)\right)=4s|x|^{2s-2}\left(\Lambda+s+\frac{n}{2}-1\right)u(x)+|x|^{2s}\Delta u(x),$$

а также формулы (8) и (9), то можно убедиться, что $\Delta v_k(x)=0$.

Докажем теперь, что имеет место формула (17), где $v_k(x)$ находятся из (18). Для этого подставим $v_k(x)$ в (17). Получим

$$\begin{aligned}f(x)=f(x)&+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s f(\alpha x)d\alpha+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)d\alpha+\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^{k+s}}\frac{|x|^{2(k+s)}}{k!s!}\times\\&\times\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!}\int_0^1\frac{(1-\beta)^{s-1}\beta^{s-1}}{(s-1)!}\beta^{n/2-1}\Delta^{k+s}f(\alpha\beta x)d\beta d\alpha.\end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим последнюю сумму в полученном выражении через $I_1(x)$. Тогда

$$I_1(x)=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^{k+s}}\frac{|x|^{2(k+s)}}{k!s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!}\int_0^1\frac{(1-\beta)^{s-1}\beta^{s+n/2-2}}{(s-1)!}\Delta^{k+s}f(\alpha\beta x)d\beta d\alpha.$$

Имеет место равенство $I_1(x)=-I(x)$ при $f(x)=\Delta^{m-j-1}P(x)$. Поэтому, в соответствии с (15)

$$\begin{aligned}I_1(x)=&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^s}\frac{|x|^{2l}}{s!}\int_0^1\frac{\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s f(\alpha x)d\alpha-\\&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{4^s}\frac{|x|^{2s}}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s f(\alpha x)d\alpha.\end{aligned}$$

После подстановки полученного значения $I_1(x)$ в (19) получим тождество $f(x)=f(x)$.

Для окончательного доказательства теоремы необходимо обосновать правомерность проделанных выше действий, т.е. доказать что:

1) ряды в (18) $\forall k$ равномерно сходятся по x в некоторой звездной области D и их можно почленно дифференцировать в D, а значит их суммы гармонические в D функции (лемма 5 и следствие из нее);

2) если функц $v_k(x)$ определены в D и находятся из (18), то ряд (17) равномерно сходится в некоторой подобласти $D' \subset D$ и его можно почленно дифференцировать в D' (лемма 6).

Леммы 4-6, приведенные ниже, решают эти задачи. Поэтому, теорему 4, можно считать доказанной. □

Лемма 4. Пусть $L(D) = L(D_{x_1},...,D_{x_n})$ дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и функ $f(x)$ аналитическая в точке $x^{(0)} \in R^n$, тогда существуют такие положительные числа С и ε, что для x таких, что $|x - x^{(0)}| < \varepsilon$ имеет место оценка

$$|L(D_{x_1},...,D_{x_n})f(x)| \le \overline{L}(D_t,...,D_t)\varphi(t)_{|t=|x-x^{(0)}|},$$

где $\varphi(t) = C\varepsilon/(\varepsilon - t)$ и многочлен $\overline{L}(\xi)$ получен из многочлена $L(\xi)$ заменой его коэффициентов a_α на их модули $|a_\alpha|$.

Доказательство. Из условия леммы, функция $f(x)$ аналитическая в точке $x^{(0)} \in R^n$, а поэтому $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha$, причем ряд абсолютно сходится в D – некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(x_1^{(0)} + \varepsilon,...,x_n^{(0)} + \varepsilon) \in D$ и значит, для всех k, имеет место неравенство

$$\varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha| \le C,$$

из которого, с учетом сделанных выше обозначений и неравенства $|x_i - x_i^0| \le |x - x^{(0)}|$, следует оценка

$$|f(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha| \left|(x - x_0)^\alpha\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x - x^{(0)}|}{\varepsilon}\right)^k \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha| \le C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x - x^{(0)}|}{\varepsilon}\right)^k \equiv \varphi(|x - x^{(0)}|),$$

справедливая для $|x - x^{(0)}| < \varepsilon$.

Теперь оценим производную $D^\beta f(x)$ от функции $f(x)$ порядка $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$. Для этого рассмотрим множитель $C_{\alpha,\beta} = \alpha!/(\alpha - \beta)!$ при $\alpha \ge \beta$ ($\alpha \ge \beta \Leftrightarrow \forall i, \alpha_i \ge \beta_i$). Докажем, что

$$C_{\alpha,\beta} \le \frac{|\alpha|!}{(|\alpha| - |\beta|)!}. \tag{22}$$

Применим индукцию по размерности n. При $n = 1$ эта формула, очевидно, верна и в ней имеет место равенство. Пусть формула (22) верна при $n = n - 1$. Обозначим через $\overline{\alpha} \in R^{n-1}$ вектор, полученный из вектора α отбрасыванием его первой компоненты. Тогда

$$C_{\alpha,\beta} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)...(\alpha_1 - \beta_1 + 1)C_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \le |\alpha|(|\alpha| - 1)...(|\alpha| - \beta_1 + 1)C_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$$

для $\overline{\alpha} \ge \overline{\beta}$. Поэтому, в силу предположения индукции и неравенства $|\overline{\alpha}| = |\alpha| - \alpha_1 \le |\alpha| - \beta_1$, получим

$$C_{\alpha,\beta} \le |\alpha|(|\alpha| - 1)...(|\alpha| - \beta_1 + 1)\frac{(|\alpha| - \beta_1)!}{(|\alpha| - \beta_1 - |\overline{\beta}|)!} = \frac{|\alpha|!}{(|\alpha| - |\beta|)!}.$$

На основании (22) при $t = |x - x^{(0)}|$ получим

$$|D^\beta f(x)| \le \sum_{\alpha \ge \beta} C_{\alpha,\beta} |f_\alpha| \left|(x - x^{(0)})^{\alpha - \beta}\right| \le \varepsilon^{-|\beta|} \sum_{k=|\beta|}^{\infty} \frac{k!}{(k - |\beta|)!} \left(\frac{|x - x^{(0)}|}{\varepsilon}\right)^{k-|\beta|} \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha| \le$$

$$\le C \sum_{k=|\beta|}^{\infty} \frac{k!}{(k - |\beta|)!} \varepsilon^{-k} t^{k-|\beta|} = C \sum_{k=|\beta|}^{\infty} \varepsilon^{-k} D_t^{|\beta|} t^k = D_t^{|\beta|} \frac{C}{1 - t/\varepsilon} = D_t^{|\beta|} \varphi(t)_{|t=|x-x^{(0)}|},$$

для $|x - x^{(0)}| < \varepsilon$. Отсюда сразу следует, что

$$|L(D_{x_1},...,D_{x_n})f(x)|\le\sum_\alpha|a_\alpha||D^\alpha f(x)|\le\sum_\alpha|a_\alpha|D_t^{|\alpha|}\varphi(t)_{|t=|x|_1}=\bar L(D_t,...,D_t)\varphi(t)_{|t=|x-x^{(0)}|}.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 5. Пусть функция $f(x)$ аналитическая в некоторой звездной области D, тогда ряд

$$F(x;f)\equiv f(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2s}}{4^s}\frac{}{s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s f(\alpha x)d\alpha,\qquad(20)$$

равномерно сходится по x в некоторой звездной подобласти $D'\subset D$ и возможно дифференцирование под знаком суммы.

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 в частном случае $L(D)=\Delta^s$ и $x^{(0)}=0$. Легко видеть, что в этом случае $\bar L(D_t,...,D_t)=L(D_t,...,D_t)=n^sD_t^{2s}$, а поэтому, существуют такие положительные C и ε, что для $|x|<\varepsilon$

$$|\Delta^s f(x)|\le n^sD_t^{2s}\varphi(t)_{|t=|x|},\qquad(24)$$

где как и выше $\varphi(t)=C\varepsilon/(\varepsilon-t)$. Отсюда, учитывая что $\alpha\in[0,1]$, получим

$$|\Delta^s f(\alpha x)|\le n^sD_t^{2s}\varphi(t)_{|t=\alpha|x|}.$$

Применяя полученное неравенство в формуле (23), найдем

$$|F(x;f)|\le\varphi(|x|)+\frac12\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(2s-1)!}{2s!!2(s-1)!!}\int_0^1(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s+n/2-2}\frac{n^s|x|^{2s}}{(2s-1)!}D_t^{2s}\varphi(\alpha|x|)d\alpha.$$

Для интегрального члена, при $n\ge2$ и $|x|<\varepsilon$ имеем оценку

$$\int_0^1(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s+n/2-2}\frac{n^s|x|^{2s}}{(2s-1)!}D_t^{2s}\varphi(\alpha|x|)d\alpha\le\frac{n^s|x|^{2s-1}}{(2s-1)!}\int_0^{|x|}D_t^{2s}\varphi(t)dt\le$$
$$\le\sqrt n\frac{(\sqrt n|x|)^{2s-1}}{(2s-1)!}\varphi^{(2s-1)}(|x|).$$

Отсюда находим

$$|F(x;f)|\le\varphi(|x|)+\frac{\sqrt n}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(2s-1)!}{2s!!2(s-1)!!}\frac{(\sqrt n|x|)^{2s-1}}{(2s-1)!}\varphi^{(2s-1)}(|x|)\le$$
$$\le\varphi(|x|)+\frac{\sqrt n}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\sqrt n|x|)^{2s-1}}{(2s-1)!}\varphi^{(2s-1)}(|x|),$$

или с учетом равенства

$$\sum_{s=1}^{\infty}t^{2s-1,!}\varphi^{(2s-1)}(|x|)=\frac{\varphi(|x|+t)-\varphi(|x|-t)}{2},$$

верного при достаточно малых t, получим

$$|F(x;f)|\le\varphi(|x|)+\sqrt n\frac{\varphi((1+\sqrt n)|x|)-\varphi((1-\sqrt n)|x|)}{4}\le$$
$$\le\varphi(|x|)+\frac{\sqrt n}{4}\varphi((1+\sqrt n)|x|)\le\left(\frac{\sqrt n}{4}+1\right)\varphi((1+\sqrt n)|x|),\qquad(25)$$

где x уже должно быть таким, что $|x|<\varepsilon/(1+\sqrt n)$. Здесь мы воспользовались неравенствами $\varphi((1-\sqrt n)|x|)>0$ и $\varphi((1+\sqrt n)|x|)>\varphi(|x|)$. Поэтому, в области $D'=\{|x|<\varepsilon'/(1+\sqrt n\}$, где $\varepsilon'<\varepsilon$ ряд из (23) сходится равномерно по x.

Из приведенных выше оценок видно, что ряд $D^\alpha F(x;f)$ сходится равномерно в D' и значит $D^\alpha F(x;f)=F(x;D^\alpha f)$. Лемма доказана. □

Следствие 1. Ряд $F(x;\Delta^m f)$ сходится равномерно по x в той же области что и ряд $F(x;f)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что согласно (22), рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 5, можно применить и к функции $\Delta^m f$. Тогда получим

$$|F(x;\Delta^m f)| \le n^m \varphi^{(2m)}(|x|) + n^m \frac{\sqrt{n}\left[\varphi^{(2m)}((1+\sqrt{n})|x|) - \varphi^{(2m)}((1-\sqrt{n})|x|)\right]}{4}.$$

Отсюда, поскольку функция $\varphi^{(m)}(t) = m! C\varepsilon/(\varepsilon - t)^{(m+1)}$ удовлетворяет неравенствам $\varphi^{(m)}((1-\sqrt{n})|x|) > 0$ и $\varphi^{(m)}((1+\sqrt{n})|x|) > \varphi^{(m)}(|x|)$, аналогично (25), получим

$$|F(x;\Delta^m f)| \le (\sqrt{n}/4+1) n^m \varphi^{(2m)}((1+\sqrt{n})|x|), \tag{26}$$

где x, также как и в (25), такое, что $|x| < \varepsilon/(1+\sqrt{n})$. □

Лемма 6. Пусть функции $v_k(x)$ определяются по формуле (18) и заданы в звездной области D, тогда ряд

$$G(x) \equiv v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_k(\alpha x) d\alpha$$

сходится равномерно по x в некоторой звездной подобласти $D' \subset D$ и позволяет дифференцирование под знаком суммы.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $v_k(x) = F(x;\Delta^k f)$. Поэтому, согласно следствия 1, все функции $v_k(x)$ определены в некоторой $D' \subset D$. Более точно, в соответствии с (23), найдутся такие положительные C и ε, что $\forall k$

$$|v_k(x)| \le (\sqrt{n}/4+1) n^k \varphi^{(2k)}((1+\sqrt{n})|x|),$$

где, как и прежде, $\varphi(t) = C\varepsilon/(\varepsilon - t)$. Обозначая $\varepsilon' = \varepsilon/(1+\sqrt{n})$ и $C' = C(\sqrt{n}/4+1)$, для новой функции $\varphi(t)$, найдем $|v_k(x)| \le n^k \varphi^{(2k)}(|x|)$. Тогда,

$$|G(x)| \le \varphi(|x|) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{(\sqrt{n}|x|)^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} \varphi^{(2k)}(\alpha|x|) d\alpha.$$

Для функций $\varphi^{(2k)}(t)(0 \le t < \varepsilon')$, очевидно, имеет место неравенство $\varphi^{(2k)}(\alpha t) \le \varphi^{(2k)}(t)$, где $\alpha \in [0,1]$ и поэтому

$$\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} \varphi^{(2k)}(\alpha|x|) d\alpha \le \varphi^{(2k)}(|x|) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} d\alpha \le$$

$$\le \varphi^{(2k)}(|x|) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} d\alpha = \frac{1}{k!} \varphi^{(2k)}(|x|).$$

Значит,

$$|G(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}|x|)^{2k}}{(2k!!)^2} \varphi^{(2k)}(|x|) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}|x|)^{2k}}{2k!} \varphi^{(2k)}(|x|),$$

или с учетом равенства

$$\sum_{s=0}^{\infty} t^{2s,!} \varphi^{(2s)}(|x|) = \frac{\varphi(|x|+t) + \varphi(|x|-t)}{2},$$

верного при достаточно малых t, получим

$$|G(x)| < \frac{\varphi((1+\sqrt{n})|x|) + \varphi((1-\sqrt{n})|x|)}{2},$$

где x должно быть таким, что $|x| < \varepsilon'/(1+\sqrt{n}) = \varepsilon/(1+\sqrt{n})^2$.

Аналогично проделанному, можно показать, что ряд, задающий $G(x)$, допускает почленное дифференцирование под знаком суммы, и полученный в результате этого ряд будет сходиться равномерно. Значит, функцию $G(x)$ можно дифференцировать под знаком суммы. Лемма доказана. □

Пример 1. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad \lambda \in R,$$

в звездной области Ω. Поскольку его решение $v(x)$ - аналитическая в Ω функция, то к нему применима теорема 4. Вычислим функции $v_k(x)$ из (18). В силу уравнения Гельмгольца $\Delta v(x) = -\lambda v(x)$ и значит из (18) $v_k(x) = (-\lambda)^k u(x)$, где обозначено

$$u(x) = v(x) + \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(-\lambda\alpha(1-\alpha)|x|^2\right) v(\alpha x)\alpha^{n/2-1} d\alpha, \tag{24}$$

и [5]

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(2,2)_k (m,2)_k}.$$

Поскольку, согласно теореме 4, функция $v_k(x)$ гармоническая в Ω, то и $u(x)$ гармоническая в Ω. Теперь из (17) находим

$$v(x) = u(x) - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(\lambda(1-\alpha)|x|^2\right) u(\alpha x)\alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{25}$$

Формулы (24) и (25), задающие взаимно однозначное соответствие между гармоническими в Ω функциями и решениями уравнения Гельмгольца, совпадают с ранее полученными в [5, 10].

Литература

1. Almansi, E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $A^{2n}u = 0$ / E. Almansi // Ann. Mat. Рига Appl. - 1899. -V. 3, № 2. - P. 1-51.
2. Aronszajn, N. Polyharmonic functions / N. Aronszajn, M. T. Creese, L. J. Lipkin. - Oxford Univ. Press: New York, 1983. - 265 p.
3. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of AMS. - 2004. V. 132.-P. 1049-1058.
4. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of AMS. - 1998. -V. 126, № 12. - P. 3513-3519.
5. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2003. - V. 287, № 2. - P. 577-592.
6. Karachik, V.V. Harmonic polynomials and the divisibility problem / V.V. Karachik // Proceedings of AMS. - 1997. - V. 125, №11. - P. 3257-3258.
7. Karachik, V.V. Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients / V.V. Karachik // Yokohama Mathematical Journal. - 2000. - V.47, № 2. - P.121-142.
8. Nicolescu, M. Probleme de l'analyticite par rapport a un operateur lineaire / M. Nicolescu // Stadia Math. - 1958. -V. 16. - P. 353-363.
9. Ren, G. B. Almansi decompositions for polyharmonic, polyheat, and polywave functions / G.B. Ren, U. Kahler // Stadia Math. - 2006. - V.172, № 1. - P. 91-100.
10. Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. - М.-Л.: ОГИЗ, 1948.-296 с.

Поступила в редакцию 17 марта 2007 г.