Математика

УДК 517.53

О ЗАДАЧЕ А.А. ГОНЧАРА ДЛЯ ПРЕДПОСЛЕДНЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТРОКИ ТАБЛИЦЫ ПАДЕ

В.М. Адуков

Пусть $a(z)=b(z)+r(z)$, где $b(z)$ – аналитическая в круге $|z|<R$ функция, а $r(z)$ – рациональная дробь, имеющая в данном круге точно λ полюсов. В работе изучается задача А.А. Гончара о влиянии возмущения аналитической функции $b(z)$ рациональной дробью $r(z)$ на сходимость аппроксимаций Паде для $(\lambda-2)$-й строки таблицы Паде мероморфной функции $a(z)$. Оказалось, что в устойчивом случае асимптотическое поведение аппроксимаций Паде для $a(z)$ полностью определяется $r(z)$.

1. Введение

В работе [1] А.А. Гончаром была сформулирована следующая задача: требуется ответить на вопрос о том, *как влияет на сходимость аппроксимаций Паде переход от аналитической функции $b(z)$ к мероморфной функции $a(z)=b(z)+r(z)$, где $r(z)$ – рациональная функция.* Там же отмечено, что в общем случае задача не поддается анализу ввиду того, что конструкция аппроксимаций Паде является существенно нелинейной.

Однако, если $b(z)$ является марковской функцией конечной положительной борелевской меры с носителем, компактно принадлежащем вещественной оси, то, при некоторых ограничениях на меру, А.А. Гончаром эта задача была полностью исследована для последовательности аппроксимаций Паде в бесконечно удаленной точке [1]. При $r(z)\equiv 0$ имеется теорема о равномерной сходимости последовательности аппроксимаций Паде для $b(z)$ – это классическая теорема Маркова (см., например, [2]). В данном случае все полюсы $\pi_n(z)$ принадлежат к минимальному отрезку Δ вещественной оси, содержащему носитель меры. Добавление рациональной функции $r(z)$ можно рассматривать, как своего рода возмущение $b(z)$. Оказалось, что, если носитель меры есть отрезок Δ вещественной оси и производная меры относительно меры Лебега положительна почти всюду на этом отрезке, а $r(z)$ не имеет полюсов на нем, то каждый полюс $r(z)$ «притягивает» столько полюсов аппроксимаций Паде $\pi_n(z)$, какова его кратность; остальные полюсы $\pi_n(z)$ «притягиваются» отрезком Δ [1].

Если носитель меры состоит из нескольких отрезков, то при $r(z)\equiv 0$ предельные точки множества полюсов диагональных аппроксимаций Паде для $b(z)$ могут принадлежать лакунам между отрезками. Более того, при выполнении некоторых условий «общего положения» (подробнее см. [4, 5]) множество предельных точек совпадает с Δ. Поведение аппроксимаций Паде для возмущенной функции $a(z)$ при комплексных возмущений $r(z)$ становится теперь значительно сложнее (теорема Гончара остается справедливой, если коэффициенты $r(z)$ вещественны) [3]. Подробно был исследован случай, когда носитель меры состоит из двух непересекающихся отрезков E_1 и E_2. Тогда множество «лишних» (т.е. отличных от полюсов $r(z)$) предельных точек полюсов аппроксимаций Паде либо совпадает с $E_1\cup E_2\cup\Gamma$, где Γ – аналитическая дуга, которая зависит только от $E_1\cup E_2$ и полюсов $r(z)$ и концы которой принадлежат отрезкам E_1, E_2; либо «лишние» предельные точки множества полюсов $\pi_n(z)$ лежат на $E_1\cup E_2$ и лишь конечное число предельных точек лежит на дуге Γ. Это направление исследования множества «лишних» предельных точек в настоящее время продолжает интенсивно развиваться [6, 7].

Задача А.А. Гончара может быть также решена для некоторых строчных последовательностей аппроксимаций Паде мероморфных функций [8, 9]. В отличие от диагональных аппроксимаций Паде оказалось, что асимптотическое поведение этих последовательностей полностью определяется рациональной частью $r(z)$ мероморфной функции $a(z)$, а аналитическую функцию $b(z)$ следует рассматривать как возмущение $r(z)$. Изложим подробнее эти результаты.

Пусть $a(z)$ – функция, мероморфная в круге $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ и аналитическая в начале координат. Пусть $z_1,...,z_\ell$ – ее различные полюсы кратностей $s_1,...,s_\ell$, соответственно, и $\lambda = s_1 + ... + s_\ell$ – число полюсов функции $a(z)$ в круге D_R. Предположим, что $\rho := |z_1| = ... = |z_\mu| > |z_{\mu+1}| \ge ... \ge |z_\ell|$, пусть $q = s_1 + ... + s_\mu$ – число полюсов максимального модуля. Без ограничения общности можно считать, что $R > 1$, $\rho < 1$.

Если номер m строки таблицы Паде совпадает с λ или $m = \lambda - q$, то вопрос о сходимости последовательности аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$ при $n \to \infty$ полностью решается теоремой Монтессу де Болора (см., например, [10]). В этих случаях $\pi_{n,m}(z)$ сходится к $a(z)$ равномерно на компактных подмножествах области $D_R \setminus \{z_1,...,z_\ell\}$ (при $m = \lambda$) или $D_\rho \setminus \{z_{\mu+1},...,z_\ell\}$ (при $m = \lambda - q$).

Строка таблицы Паде с номером m таким, что $\lambda - q < m < \lambda$, называется *промежуточной строкой*. Достаточные условия сходимости всей промежуточной строки были получены в [11].

Представим $a(z)$ в виде $a(z) = b(z) + r(z)$, где $b(z)$ – аналитическая в круге $|z| < R$ функция, а $r(z)$ – рациональная дробь, являющаяся суммой главных частей рядов Лорана $a(z)$ в окрестности полюсов $z_1,...,z_\ell$. В работе [8] для строки с номером $m = \lambda - 1$ (*последняя промежуточная строка*) вначале были явно получены знаменатели аппроксимаций Паде рациональной функции $r(z)$. Это позволило затем изучить их асимптотическое поведение и найти все предельные точки полюсов аппроксимаций Паде для $r(z)$. Оказалось, что асимптотика знаменателей в основном определяется арифметической природой *доминирующих полюсов* $r(z)$ на окружности $|z| = \rho$, то есть полюсов, имеющих максимальную кратность. Далее $b(z)$ рассматривалось как малое возмущение дроби $r(z)$, и соображения устойчивости позволили сделать вывод о том, что асимптотическое поведение знаменатели аппроксимаций Паде функций $a(z)$ и $r(z)$ одинаково. Тем самым для данной строки построена полная теория равномерной сходимости: явно найдено множество всех предельных точек полюсов аппроксимаций Паде и описаны области, внутри которых равномерно сходится вся последняя промежуточная строка (последний факт установлен в [9]).

Соображения устойчивости без каких-либо ограничений на функцию $a(z)$ можно применять только к строкам с номерами $m = \lambda$, $m = \lambda - 1$. Однако в некоторых случаях метод оказался эффективным и для других промежуточных строк. Это было продемонстрировано в работе [12] на примере предпоследней промежуточной строки для мероморфной функции с одним доминирующим полюсом. Этот случай также оказался устойчивым. В данной работе для предпоследней промежуточной строки мы рассмотрим случай, когда число доминирующих полюсов больше одного.

2. Явная формула для знаменателей аппроксимаций Паде *r(z)*

В работе [8] показано, что в задаче аппроксимаций Паде естественно возникают понятия индексов и существенных многочленов, впервые введенные в [13]. (Определения и обозначения из этих работ мы часто будем использовать без напоминания.) Там показано, что знаменатели аппроксимаций Паде функции *a(z)* - это первые существенные многочлены подходящей конечной последовательности, составленной из тейлоровских коэффициентов *a(z)*. При этом, соображения устойчивости применимы, когда индексы данной последовательности устойчивы. Для того, чтобы свести изучение сходимости строки таблицы Паде мероморфной функции *a(z)* к такой же задаче для рациональной функции $r(z)$ (рациональной части $a(z)$) потребуется второй существенный многочлен последовательности.

Поэтому при $m=\lambda-2$ (*предпоследняя промежуточная строка*) мы начнем с установления критерия устойчивости и нахождения индексов и существенных многочленов последовательности $r_{n-m+1}^{n+m}=\{r_{n-m+1},\ldots,r_{n+m}\}$, составленной из коэффициентов Тейлора правильной рациональной и аналитической в $z=0$ функции $r(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$. Именно эта последовательность необходима для определения знаменателя аппроксимации Паде типа (n,m) (см. [8], §3).

Нам потребуются некоторые результаты по строке с номером $m=\lambda-1$ (см. [8]). Для рациональной функции $r(z)$ знаменатель $Q_{n,\lambda-1}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n,\lambda-1)$ есть многочлен $V_{n+\lambda,1}(z):=V_{n+\lambda}(z)$, который находится из следующего рекуррентного соотношения

$$V_{k+1}(z)=zV_k-v_kD(z),\quad k\geq 0, \tag{1}$$

где v_k – коэффициент при старшей степени $z^{\lambda-1}$ многочлена $V_k(z)$, а $V_0(z)$ единственным образом находится из решения уравнения Безу

$$U_0(z)D(z)+V_0(z)N(z)=1,$$

при условии, что $\deg V_0(z)<\lambda$. Многочлены $V_k(z)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$V_{k+\lambda}(z)+d_{\lambda-1}V_{k+\lambda-1}(z)+\ldots+d_0V_k(z)=0,\quad k\geq 0, \tag{2}$$

где $D(z)=z^{\lambda}+d_{\lambda-1}z^{\lambda-1}+\ldots+d_0$. Отсюда можно получить явную формулу для $V_k(z)$:

$$V_k(z)=\sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{i=1}^{j}d_{\lambda-i+1}v_{k+j-i}z^{\lambda-j},\quad k\geq 0. \tag{3}$$

Отличие случая $m=\lambda-2$ от случаев $m=\lambda$, $m=\lambda-1$ в том, что теперь не для любой рациональной дроби $r(z)$ индексы последовательности будут устойчивыми. Например, функция $r(z)=\frac{z}{z^4-1}$ в круге $|z|<R, R>1$, имеет $\lambda=4$ полюса. Легко проверить, что при $m=\lambda-2$ последовательность r_{n-m+1}^{n+m} имеет устойчивые индексы только при $n=4k,\ 4k+1$. Устойчивость же индексов является необходимым условием применимости нашего метода. Поэтому прежде всего выясним условия устойчивости.

Теорема 1. *Последовательность $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$, ассоциированная с аппроксимацией Паде типа $(n,\lambda-2)$, имеет устойчивые индексы $n, n+1$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $v_{n+\lambda-1}$, $v_{n+\lambda}$ отлично от нуля. Если при выполнении этого условия определить многочлен*

$$V_{k,2}(z)=v_kV_{k-1}(z)-v_{k-1}V_k(z)$$

формальной степени $\lambda-2$, то существенные многочлены $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ последовательности $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$ находятся следующим образом: $Q_1(z)=V_{n+\lambda,2}(z)$ и

$$Q_2(z)=\begin{cases}V_{n+\lambda-1}(z), & при\quad v_{n+\lambda-1}\neq 0,\\ V_{n+\lambda+1}(z), & при\quad v_{n+\lambda}\neq 0,\\ V_{n+\lambda}(z), & при\quad v_{n+\lambda-1}\neq 0, v_{n+\lambda}\neq 0.\end{cases}$$

Тестовое число σ_0 для пары многочленов $V_{n+\lambda,2}(z)$, $V_{n+\lambda-1}(z)$ совпадает с $(v_{n+\lambda-1})^2$, для пары $V_{n+\lambda,2}(z)$, $V_{n+\lambda+1}(z)$ – с $(v_{n+\lambda})^2$, а для $V_{n+\lambda,2}(z)$, $V_{n+\lambda}(z)$ – с $v_{n+\lambda-1}v_{n+\lambda}$.

Доказательство теоремы приведено в [9].

Учитывая формулу (3) для $V_k(z)$, легко теперь получить явное выражение для многочленов $V_{k,2}(z)$:

$$V_{k,2}(z)=\sum_{j=1}^{\lambda-1}\left(\sum_{i=1}^{j}d_{\lambda-i+1}\Delta_{k,j-i}\right)z^{\lambda-j-1}. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_{k,m}=\begin{vmatrix} v_k & v_{k-1} \\ v_{k+m+1} & v_{k+m}\end{vmatrix}$. Очевидно, что $V_{k,2}(z)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $v_k=v_{k-1}=0$.

3. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде при $\nu_1>1$

Мы начнем с изучения предельного поведения знаменателей аппроксимаций Паде для рациональной части $r(z)$ мероморфной функции $a(z)$. Затем применение подготовительной теоремы 7.1 из [8] позволит получить асимптотику и в мероморфном случае.

Для получения асимптотического поведения знаменателя $V_{n+\lambda,2}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n,\lambda-2)$ требуется асимптотика определителей $\Delta_{k,m}$, которые выражаются через коэффициент v_k. Этот коэффициент, очевидно, удовлетворяет разностному уравнению (2). По теореме о структуре общего решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеем

$$v_k=p_1(k)z_1^k+\ldots+p_\ell(k)z_\ell^k,\quad k\ge 0. \tag{5}$$

Здесь $p_j(k)=C_j^0+C_j^1k+\ldots+C_j^{s_j-1}k^{s_j-1}$ – многочлен от k степени не выше s_j-1 и старший коэффициент $C_j:=C_j^{s_j-1}$ находится по формуле:

$$C_j=\frac{1}{(s_j-1)!z_j^{s_j-1}D_j^2(z_j)A_j},$$

где $D_j(z)=\frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $1\le j\le\ell$, A_j – коэффициент при $(z-z_j)^{-s_j}$ в разложении $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z=z_j$ (см. [8]).

Пусть $\rho:=|z_1|=\ldots=|z_\mu|>|z_{\mu+1}|\ge\ldots\ge|z_\ell|$. Упорядочим полюсы $z_1,\ldots,z_\mu$ так, чтобы для их кратностей выполнялись неравенства $s_1\ge s_2\ge\ldots\ge s_\mu$. Пусть $s_1=\ldots=s_{\nu_1}>s_{\nu_1+1}=\ldots=s_{\nu_1+\nu_2}>\ldots$. Полюсы $z_1,\ldots,z_{\nu_1}$ будем называть *доминирующими полюсами первого уровня* на окружности $|z|=\rho$, $z_{\nu_1+1},\ldots,z_{\nu_1+\nu_2}$ – *второго* и т.д.

Случай $\nu_1=1$ является устойчивым, он разобран в работе [9]. Отметим, что предельное поведение знаменателей аппроксимаций Паде при $\nu_1=1$ зависит от соотношения между кратностями s_1, s_2 и от арифметической природы доминирующих полюсов второго уровня.

Пусть $\nu_1>1$, $z_j=\rho e^{2\pi i\Theta_j}, j=1,\ldots,\ell$. В этом случае асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-2}(z)$ при $n\to\infty$ определяется в основном арифметической природой доминирующих полюсов первого уровня. Так же, как в работе [8], введем группу $\mathbb{F}_1$, являющуюся замыканием циклической подгруппы $\left\{\left(e^{2\pi in\Theta_1},\ldots,e^{2\pi in\Theta_{\nu_1}}\right)\right\}_{n\in Z}$ тора $\mathbf{\Phi}^{\nu_1}$.

Структура монотетической группы $\mathbb{F}_1$ и способ ее явного построения по матрице линейных зависимостей между аргументами $\Theta_1,\ldots,\Theta_{\nu_1}$ описаны в [8]. Пусть $\tau=\left(\tau_1,\ldots,\tau_{\nu_1}\right)$ – произвольная точка группы $\mathbb{F}_1$ и Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров, т.е.

$$\left(e^{2\pi in\Theta_1},\ldots,e^{2\pi in\Theta_{\nu_1}}\right)\to\tau,\quad n\to\infty,\quad n\in\Lambda_\tau.$$

Обозначим

$$S_m(\tau)=\sum_{k=1}^{\nu_1}C_kz_k^m\tau_k,\quad \tau=\left(\tau_1,\ldots,\tau_{\nu_1}\right)\in\mathbb{F}_1,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Тогда из формулы (5) следует, что для коэффициентов v_{k+m} справедлива следующая асимптотика

$$v_{k+m} = \rho^k k^{s_1-1}[S_m(\tau)+o(1)], \quad k \to \infty, \quad k \in \Lambda_\tau.$$

Отсюда легко получить асимптотику определителей $\Delta_{k,m}$:

$$\Delta_{k,m} = \rho^{2k} k^{2s_1-2}[S_{m,2}(\tau)+o(1)], \tag{6}$$

где $S_{m,2}(\tau) = \begin{vmatrix} S_0(\tau) & S_{-1}(\tau) \\ S_{m+1}(\tau) & S_m(\tau) \end{vmatrix}$.

$S_{m,2}(\tau) = 0$ для любого m тогда и только тогда, когда $S_0(\tau) = S_{-1}(\tau) = 0$. Точку $\tau \in \mathbb{F}_1$ будем называть в этом случае *точкой вырождения второго порядка.* Если точка τ не является точкой вырождения второго порядка, то для всех достаточно больших n таких, что $n+\lambda \in \Lambda_\tau$, среди чисел $v_{n+\lambda}(\tau), v_{n+\lambda-1}(\tau)$ есть отличные от нуля. Поэтому, по теореме 1 для такой последовательности номеров n будет выполняться условие устойчивости индексов и многочлен $V_{n+\lambda,2}(z)$ является знаменателем аппроксимации Паде типа $(n, \lambda-2)$ для $r(z)$.

Если же τ – точка вырождения второго порядка, то изучение сходимости последовательности $V_{n+\lambda,2}(z)$, $n+\lambda \in \Lambda_\tau$, требует отдельного рассмотрения.

К счастью, как показывает следующее предложение, такие точки встречаются не слишком часто.

Предложение 1. *Все точки группы* $\mathbb{F}_1$ *не могут быть точками вырождения второго порядка.*

При $v_1 = 2$ *точек вырождения второго порядка нет.*

Пусть $v_1 \geq 3$. *Если в группе* $\mathbb{F}_1$ *существуют точки вырождения второго порядка, то для всех* $i, j = 1, \ldots, v_1$ *выполняются неравенства*

$$2|C_j| \leq \sum_{k=1}^{v_1}|C_k|, \quad 2|C_j||z_j - z_i| \leq \sum_{k=1}^{v_1}|C_k||z_k - z_i|. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{v_1})$ – произвольная точка группы $\mathbb{F}_1$. По предложению 6.1 из работы [8] среди чисел $S_0(\tau), S_1(\tau), \ldots, S_{v_1-1}$ есть не равные нулю. Пусть $S_\delta(\tau) \neq 0$ и $\tilde{\tau} = \rho^{-\delta}\left(\tau_1 z_1^\delta, \ldots, \tau_{v_1} z_{v_1}^\delta\right)$. Очевидно, что $\tilde{\tau} \in \mathbb{F}_1$ и $S_0(\tilde{\tau}) = S_\delta(\tau) \neq 0$. Поэтому точка $\tilde{\tau}$ не является точкой вырождения второго порядка.

Если $v_1 = 2$, то по этому же предложению среди чисел $S_{-1}(\tau), S_0(\tau)$ всегда есть ненулевые, т.е. в этом случае в группе $\mathbb{F}_1$ точек вырождения второго порядка нет.

Если в группе $\mathbb{F}_1$ существует точка вырождения второго порядка $\tau = \left(\tau_1, \ldots, \tau_{v_1}\right)$, то из условия $S_0(\tau) := C_1\tau_1 + \ldots + C_{v_1}\tau_{v_1} = 0$ сразу следует первая серия неравенств (7). Аналогичным образом, исключив из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1\tau_1 & + & \ldots & + & C_{v_1}\tau_{v_1} & = & 0 \\ C_1\tau_1 z_1^{-1} & + & \ldots & + & C_{v_1}\tau_{v_1} z_{v_1}^{-1} & = & 0 \end{cases}$$

переменную $C_i\tau_i$, получим неравенство, входящее во вторую серию условий (7).

Таким образом, случай $v_1 = 2$ является устойчивым, а при $v_1 \geq 3$ нарушение хотя бы одного из неравенств (7) также влечет устойчивость.

Докажем аналог предложения 6.1 из [8].

Предложение 2. *Пусть* $v_1 > 1$ *и точка* $\tau \in \mathbb{F}_1$ *не является точкой вырождения второго порядка.*

Тогда в последовательности

$$S_{0,2}(\tau), \ldots, S_{v_1-2,2}(\tau) \tag{8}$$

и в последовательности

$$S_{-2,2}(\tau),\dots,S_{-\nu_1,2}(\tau) \tag{9}$$

есть отличные от нуля числа.

Доказательство. Это утверждение легко проверяется, если среди чисел $S_0(\tau), S_{-1}(\tau)$ есть одно равное нулю. Требует доказательства лишь случай, когда оба числа $S_0(\tau), S_{-1}(\tau)$ отличны от нуля.

Предположим, что $S_{0,2}(\tau)=\dots=S_{\nu_1-2,2}(\tau)=0$. Из этих равенств следует, что найдется число λ такое, что

$$S_0(\tau)=\lambda S_{-1}(\tau), S_1(\tau)=\lambda^2 S_{-1}(\tau),\dots, S_{\nu_1-1}(\tau)=\lambda^{\nu_1}S_{-1}(\tau).$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно $C_1,\dots,C_{\nu_1}$, мы получаем равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} z_1-\lambda & z_2-\lambda & \cdots & z_{\nu_1}-\lambda \\ z_1^2-\lambda^2 & z_2^2-\lambda^2 & \cdots & z_{\nu_1}^2-\lambda^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{\nu_1}-\lambda^{\nu_1} & z_2^{\nu_1}-\lambda^{\nu_1} & \cdots & z_{\nu_1}^{\nu_1}-\lambda^{\nu_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & z_1 & \cdots & z_{\nu_1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^{\nu_1} & z_1^{\nu_1} & \cdots & z_{\nu_1}^{\nu_1} \end{vmatrix}.$$

(Напомним, что все числа C_j отличны от нуля.) Значит, λ должно совпадать с одним из чисел $z_1,\dots,z_{\nu_1}$. Если, например, $\lambda=z_1$, то мы получаем аналогичную систему уравнений относительно $C_2,\dots,C_{\nu_1}$, из которой следует, что λ должно совпадать с одним из чисел $z_2,\dots,z_{\nu_1}$. Однако это невозможно. Противоречие показывает, что среди чисел $S_{0,2}(\tau),\dots,S_{\nu_1-2,2}(\tau)$ есть отличные от нуля.

Аналогично доказывается часть предложения, относящаяся к последовательности $S_{-2,2}(\tau),\dots,S_{-\nu_1,2}(\tau)$.

Это предложение по аналогии с работой [8] позволяет ввести понятие плюс (минус)-дефекта точки $\tau\in\mathbb{F}_1$.

Определение 3.1. *Пусть* $\tau\in\mathbb{F}_1$ *не является точкой вырождения второго порядка. Если* $S_{0,2}(\tau)\neq 0$ *и* $S_{-2,2}(\tau)\neq 0$, *то точку* $\tau\in\mathbb{F}_1$ *будем называть невырожденной точкой. В этом случае положим*

$$\delta_+(\tau)=0,\quad \delta_-(\tau)=0.$$

Пусть $S_{0,2}(\tau)=0$. *Целое положительное число* $\delta_+(\tau)$ *будем называть плюс-дефектом точки* $\tau\in\mathbb{F}_1$, *если*

$$S_{0,2}(\tau)=\dots=S_{\delta_+(\tau)-1,2}(\tau)=0, S_{\delta_+(\tau),2}(\tau)\neq 0$$

Пусть $S_{-2,2}(\tau)=0$. *Целое положительное число* $\delta_-(\tau)$ *будем называть минус-дефектом точки* $\tau\in\mathbb{F}_1$, *если*

$$S_{-2,2}(\tau)=\dots=S_{-\delta_-(\tau)-1,2}(\tau)=0, S_{-\delta_-(\tau)-2,2}(\tau)\neq 0$$

Существование чисел $\delta_\pm(\tau)$ таких, что $0\le\delta_\pm(\tau)\le\nu_1-2$, гарантирует предложение 2.

Теперь мы можем исследовать асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде предпоследней промежуточной строки для мероморфной функции $a(z)=b(z)+r(z)$, $r(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$, $D(z)=(z-z_1)^{s_1}\cdots(z-z_\ell)^{s_\ell}$.

Теорема 2. *Пусть* $\nu_1>1$, τ *– произвольная точка группы* $\mathbb{F}_1$, *не являющаяся точкой вырождения второго порядка,* Λ_τ *– соответствующая ей последовательность номеров и* $\delta_\pm$ *– плюс (минус)-дефект точки* τ.

Тогда для всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau-\lambda$ *знаменатель* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *аппроксимации Паде типа* $(n,\lambda-2)$ *для мероморфной функции* $a(z)$ *можно* $(\lambda-\delta_+(\tau)-2)$*-нормировать и для после-*

довательности нормированных многочленов $Q_{n,\lambda-2}(z)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,\lambda-2}(z) = W_2(z,\tau), \quad n \in \Lambda_\tau - \lambda.$$

Здесь $W_2(z,\tau)$ – многочлен степени $\lambda-\delta_+(\tau)-2$ с единичным старшим коэффициентом, имеющий $z=0$ нулем кратности $\delta_-(\tau)$ и вычисляющийся по формуле:

$$W_2(z,\tau) = \frac{1}{S_{\delta_+,2}}\omega_2(z,\tau)\frac{D(z)}{\Delta(z)}, \tag{10}$$

$$\omega_2(z,\tau) = -\sum_{j=1}^{\nu_1-1}\sum_{i=j+1}^{\nu_1} C_i C_j \tau_i \tau_j \frac{(z_i-z_j)^2}{z_i z_j}\Delta_{ij}(z),$$

$$\Delta_{ij}(z) = \frac{\Delta(z)}{(z-z_i)(z-z_j)}, \quad \Delta(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_{\nu_1}).$$

Если в группе $\mathbb{F}_1$ нет точек вырождения второго порядка, то многочленами $W_2(z,\tau)$ исчерпываются все возможные пределы сходящихся подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_{n,\lambda-2}(z)$.

Доказательство. Схема доказательства этой теоремы такая же, как теоремы 2.2 из [8]. Асимптотика (6) вместе с явной формулой (4) для $V_{k,2}(z)$ позволяет явно найти $\lim_{k\to\infty} V_{k,2}(z)$, $k \in \Lambda_\tau$, а следовательно и предел знаменателя $Q_{n,\lambda-2}(z) = V_{n+\lambda,2}(z)$ аппроксимации Паде для рациональной дроби $r(z)$. Применение подготовительной теоремы 7.1 из [8] закончит доказательство.

Прежде всего покажем возможность $(\lambda-\delta_+-2)$-нормировки многочлена $V_{k,2}(z)$. Поскольку $\Delta_{k,\delta_+} = \rho^{2k}k^{s_1-1}[S_{\delta_+,2}+o(1)] \neq 0$ при достаточно больших k, $k\in\Lambda_\tau$, то

$$\frac{\Delta_{k,j}}{\Delta_{k,\delta_+}} \to \frac{S_{j,2}(\tau)}{S_{\delta_+,2}(\tau)} \tag{11}$$

при $k\to\infty, k\in\Lambda_\tau$. Из формулы (4) и определения плюс-дефекта точки τ следует, что коэффициент $\alpha_{k,\lambda-\delta_+-2}$ многочлена $V_{k,2}(z)$ при $z^{\lambda-\delta_+-2}$ представляется в виде $\alpha_{k,\lambda-\delta_+-2} = \Delta_{k,\delta_+}\beta_{k,\lambda-\delta_+-2}$, где $\beta_{k,\lambda-\delta_+-2} \to 1$. Это и означает, что $\alpha_{k,\lambda-\delta_+-2} \neq 0$ при достаточно больших $k, k\in\Lambda_\tau$. После $(\lambda-\delta_+-2)$-нормировки многочлена $V_{k,2}(z)$, учитывая (11), получаем

$$\lim_{k\to\infty} V_{k,2}^{(\lambda-\delta_+-2)}(z) = \sum_{j=1}^{\lambda-1}\sum_{i=1}^{j} d_{\lambda-i+1}\frac{S_{j-i,2}(\tau)}{S_{\delta_+,2}(\tau)} z^{\lambda-j-1}, \quad k\in\Lambda_\tau.$$

Обозначим этот многочлен через $W_2(z,\tau)$. Легко проверить, что его степень совпадает с $\lambda-\delta_+-2$, старший коэффициент равен 1 и он имеет корень $z=0$ кратности δ_-.

Используя формулу для $S_{m,2}(\tau)$ можно показать, что

$$W_2(z,\tau) = \frac{1}{S_{\delta_+,2}}\frac{D(z)}{\Delta(z)}\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\nu_1} C_j\tau_j\left(S_0(\tau)-S_{-1}(\tau)z_j\right)\frac{\Delta(z)}{z-z_j}.$$

Отсюда уже легко следует формула (10). Таким образом, в рациональном случае теорема доказана.

Для перехода к мероморфному случаю необходимо проверить условия 1) – 4) подготовительной теоремы 7.1 из [8].

Условия 1) – 3) проверяются легко. Проверим выполнимость условия 4). Предположим вначале, что для точки τ выполняется условие $S_0(\tau)\neq 0$. Тогда $\nu_{n+\lambda}\neq 0$ для всех достаточно больших n, $n+\lambda\in\Lambda_\tau$, и по теореме 2.1 в качестве второго существенного многочлена последовательности r_{n-m+1}^{n+m} можно взять $Q_2(z) = V_{n+\lambda+1}(z)$. По теореме 6.1 из [8] многочлен $V_{n+\lambda}(z)$ допускает $(\lambda-1)$-нормировку и нормированный многочлен $\frac{1}{v_{n+\lambda}}V_{n+\lambda}(z)$ имеет предел $W_1(z,\tau)$ при $n\to\infty, n+\lambda\in\Lambda_\tau$. Из рекуррентного соотношения (1) тогда следует, что многочлен $\frac{1}{v_{n+\lambda}}V_{n+\lambda+1}(z)$ также имеет предел при $n\to\infty, n+\lambda\in\Lambda_\tau$, совпадающий с $zW_1(z,\tau)-D(z)$.

Теперь легко можно проверить, что условие равномерной ограниченности $\frac{1}{|\sigma_0|}\|Q_2(z)\|$ при $n+\lambda\in\Lambda_\tau$ действительно выполняется. Тестовое число σ_0 для пары $V_{n+\lambda,2}^{(\lambda-\delta_+-2)}(z), V_{n+\lambda+1}(z)$ по теореме 1 совпадает с $\frac{v_{n+\lambda}^2}{\Delta_{n+\lambda,\delta_+}}\beta_{n+\lambda,\lambda-\delta_+-2}$. Тогда из асимптотики для $v_{n+\lambda}$, $\Delta_{n+\lambda,\delta_+}$ и условия $\rho<1$ следует, что величина

$$\frac{\|Q_2(z)\|}{|\sigma_0|}=\frac{|\Delta_{n+\lambda,\delta_+}\beta_{n+\lambda,\lambda-\delta_+-2}|}{|v_{n+\lambda}|}\left\|\frac{V_{n+\lambda+1}(z)}{v_{n+\lambda}}\right\|\to 0$$

при $n\to\infty, n+\lambda\in\Lambda_\tau$ и, значит, равномерно по n ограничена. Аналогично проверяется условие 4), если $S_{-1}(\tau)\neq 0$.

Для завершения доказательства осталось применить подготовительную теорему 7.1 из [8].

При $v_1=2$ из теоремы легко следует сходимость всей последовательности знаменателей для данной строки.

Следствие 1. *Пусть $v_1=2$. Тогда для всех достаточно больших n знаменатель $Q_{n,\lambda-2}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n,\lambda-2)$ для мероморфной функции $a(z)$ можно $(\lambda-2)$-нормировать и для последовательности нормированных многочленов $Q_{n,\lambda-2}(z)$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}Q_{n,\lambda-2}(z)=\frac{D(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Таким образом, асимптотика знаменателей $Q_{n,\lambda-2}(z)$, когда в группе нет точек вырождения второго порядка, получена и в этом случае мы знаем все предельные точки полюсов аппроксимаций Паде. При наличии точек вырождения второго порядка мы можем найти лишь часть множества предельных точек полюсов, соответствующую невырожденным точкам $\tau\in\mathbb{F}_1$.

Как и в работе [8] можно теперь исследовать равномерную сходимость подпоследовательностей аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-2}$, что в свою очередь методом работы [12] позволяет найти множество, внутри которой предпоследняя промежуточная строка сходится равномерно.

Итак, для предпоследней промежуточной строки в устойчивом случае ответ на вопрос А.А. Гончара выглядит следующим образом: *асимптотическое поведение аппроксимаций Паде $a(z)$ полностью определяется рациональным возмущением $r(z)$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

Литература

1. Гончар, А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций / А.А. Гончар // Матем. сборник. - 1975. - Т. 97, № 4- С. 607-629.

2. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. - М.: Наука, 1988. - 256 с.

3. Рахманов, Е.А. О сходимости аппроксимаций Паде мероморфных функций / Е.А. Рахманов // Матем. сборник. - 1977. - Т. 104, № 2. - С. 271-291.

4. Суетин, С.П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций / С.П. Суетин // Матем. сборник. - 2000. - Т. 191, № 9. - С. 81-114.

5. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук - 2002. - Т. 57. - Вып. 1. - С. 45-142.

6. Суетин, С.П. Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций / С.П. Суетин // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 12. – С. 105–133.

7. Суетин, С.П. О динамике «блуждающих» нулей полиномов, ортогональных на нескольких отрезках / С.П. Суетин // Успехи матем. наук – 2002. – Т. 57. – Вып. 2. – С. 199–200.

8. Adukov, V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table / V.M. Adukov // J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P.160–207.

9. Адуков, В.М. Об асимптотическом поведении знаменателей аппроксимаций Паде для предпоследней промежуточной строки / В.М. Адуков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 3–9.

10. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Наука, 1986. – 502 с.

11. Sidi, A. Quantitative and constructive aspects of the generalized Koenig's and de Montessus's theorems for Padé approximants / A. Sidi // J. Comput. Appl. Math.– 1990. – V. 29. – P. 257–291.

12. Adukov, V.M. On the set of uniform convergence for the last intermediate row of the Padé table / V.M. Adukov // East Journal on Approximations. – 2005. – Vol. 11, № 4. – P. 375–380.

13. Adukov, V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices / V.M. Adukov // Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

Поступила в редакцию 7 февраля 2007 г.