Расчет и конструирование

УДК 621.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ ЗАМКНУТЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МНОГОКРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ НА ОСНОВЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТРУКТУРНОГО УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

В.И. Пожбелко, Е.Н. Ермошина

MODELLING AND SYNTHESIS CLOSED MECHANICAL SYSTEMS WITH MANY-SIDED CONNECTIONS ON BASE WHOLE-NUMERATION SOLUTIONS OF STRUCTURAL EQUATION

V.I. Pozhbelko, E.N. Ermoshina

Рассматривается методика и примеры синтеза многозвенных механических систем на основе полученных целочисленных решений исходного структурного уравнения механики. Установлено, что данное алгебраическое уравнение с двумя неизвестными имеет конечное множество из девяти решений в целых числах, которые могут быть использованы для построения (на основе этих решений) возможных структур механических систем взаимосвязанных твердых тел.

Ключевые слова: механические системы, структурный синтез, целочисленное решение уравнения, диофантов анализ.

The paper presents structural synthesis of mechanical systems with many-sided connections which using in technics. Result examples of creation such systems on base whole-numeration solutions of structural equation.

Keywords: mechanical systems, structural synthesis.

1. Постановка задачи и предлагаемый путь ее решения

Математические выражения (уравнения, неравенства и другие зависимости переменных величин) являются основным средством формализации и познания при моделировании физических явлений и строения окружающего мира, представляющего собой различные механические системы [1–4], состоящие из целого числа взаимосвязанных твердых тел (рис. 1). Таким образом, в механике возникает проблема решения уравнений прикладной математики именно в целых числах, относящаяся к достаточно сложным задачам аналитической теории чисел [5–7] и получившая название «диофантов анализ уравнений» (по имени древнегреческого математика Диофанта).

В работах [5–7] отмечено, что в первую очередь такие проблемы возникают, когда приходится искать целочисленные решения уравнений, где число неизвестных *превышает* число уравнений (например, два и более неизвестных в одном уравнении) и которые содержат:

а) более простую задачу – установление существования конечного (или бесконечного) количества целочисленных решений данного уравнения или системы исходных уравнений (или полного отсутствия таких решений в целых числах);

б) более сложную задачу – определение расчетным путем точного количества этих целочисленных решений при увеличенном (два и более) числе неизвестных в рассматриваемом уравнении;

в) рассматриваемую в данной работе предельно сложную задачу – нахождение всех этих решений в целых числах для количественного описания, а также последующее моделирование и целенаправленное создание (на основе этих решений) возможных структур механических систем взаимосвязанных твердых тел:

– как уже существующих (образовавшихся в природе окружающего мира в виде различных химических соединений и живых биологических объектов);

– так и искусственно создаваемых человеком разнообразных подвижных и неподвижных механических устройств (например, движущиеся механизмы машин и неподвижные шарнирно-рычажные фермы).

Отметим, что разнообразные механические системы взаимосвязанных твердых тел могут содержать как только простые (simple joints) соединения между собой двух отдельных компонентов (звеньев) системы (это будет частный случай – обозначим его $\nu = 0$), так и сложные многократные (complex many-sided) соединения между собой трех и более отдельных компонентов (звеньев) системы (этот более общий случай ее строения обозначим $\nu \neq 0$). Некоторые примеры возможных подвижных соединений (связей) звеньев между собой в различных замкнутых механических системах даны на рис. 2 (где кратность *j* образующихся соединений будет на единицу меньше числа сходящихся в узле звеньев механической системы).

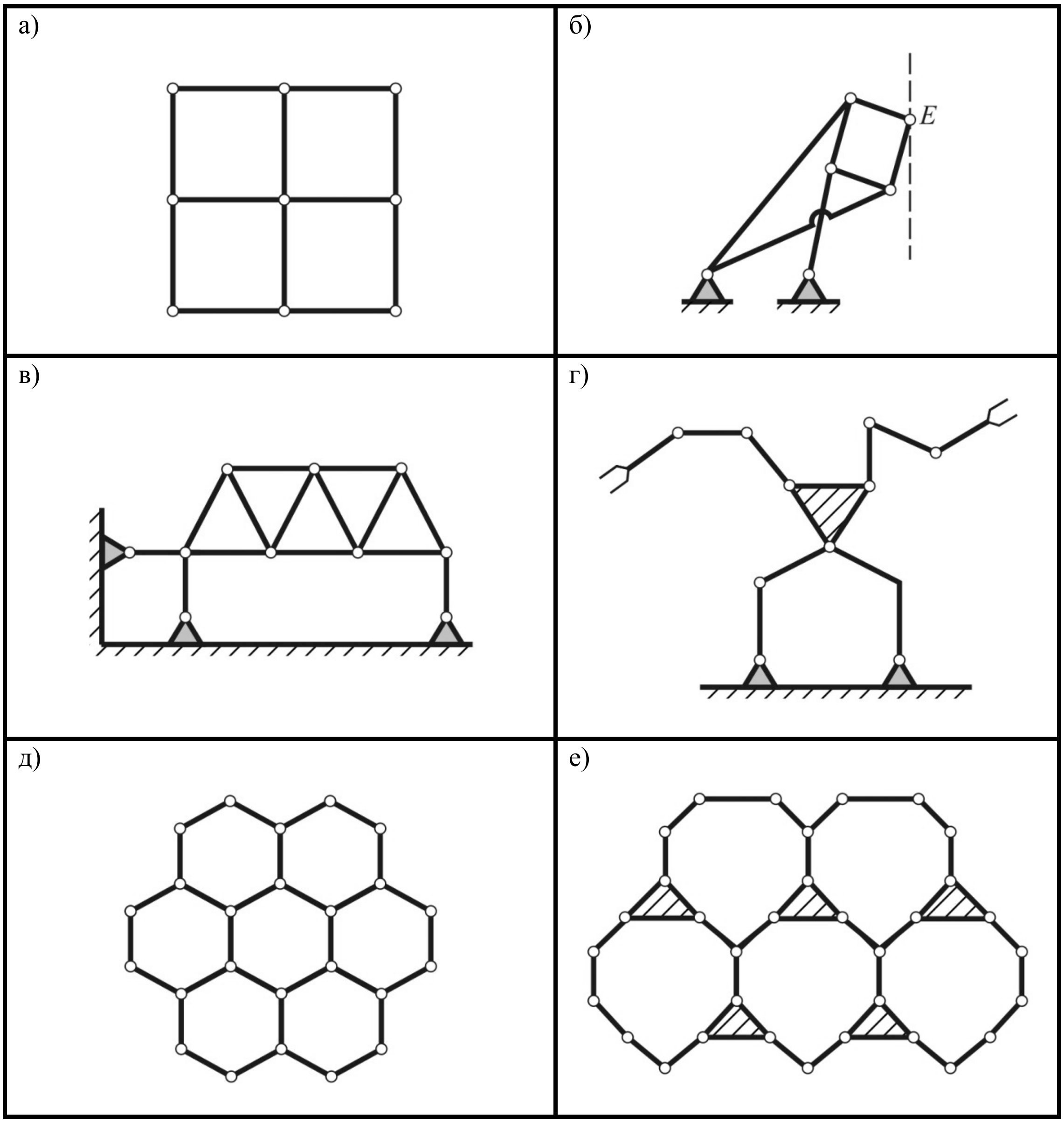

Рис. 1. Примеры механических систем с многократными связями, созданных природой и изобретенных человеком (на основе познания закономерностей окружающего мира): а – кристаллическая решетка твердых веществ [3]; б – шарнирный прямолинейно направляющий механизм [1]; в – стержневая ферма однопролетного моста [1]; г – человекоподобный робот-манипулятор; д – сотовые конструкции пчелиных ульев (с ячейками шестигранной формы); е – сотовые конструкции решеток охлаждения современных ядерных реакторов (с ячейками девятигранной формы) [4]

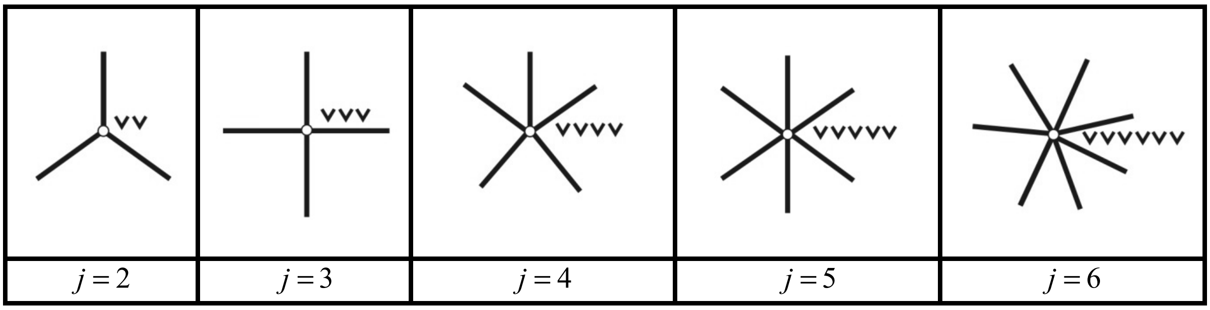

Рис. 2. Варианты многократных связей элементов механических систем (узлов с кратностью $j \geq 2$)

Для формализации строения многозвенных механических систем используем полученное в работе [2] уравнение многократных связей замкнутых механических систем (исходное структурное уравнение механики), которое в общем случае ($\nu \neq 0$) имеет вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + ... + (k-1)\nu_k = \nu\,;\;\; \nu \leq C = 2(K-1), \qquad (1)$$

где ν_j – число j-кратных соединений звеньев замкнутой механической системы ($j_{\max} = K$); K – число образуемых звеньями системы взаимно независимых замкнутых контуров ($K \geq 1$); ν – приведенное число многократных соединений звеньев (узлов) механической системы; параметр k в последнем слагаемом данного уравнения зависит от величины K и равен $k = K + 1$ (при $C \leq K$ в области $K \leq 2$) или равен $k = K$ (при $C > K$ в области $K > 2$).

Решение исходного уравнения (1) заключается в определении всех целочисленных значений неизвестных ($\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, ..., \nu_k$) при заданной целой величине K = 1; 2; 3;… и соответствующей ей целой константе $C = 2(K-1)$, задающей диапазон изменения $\nu \leq C$. На рис. 3 даны примеры разнообразных механических систем, структура которых удовлетворяет граничному $\nu = C$.

С математической точки зрения исходная зависимость (1) представляет собой линейное алгебраическое уравнение 1-й степени с целой константой C и постоянными целыми коэффициентами c_i, образующих арифметическую прогрессию (число слагаемых которой зависит от задаваемой величины K = 1; 2; 3;…):

$$(c_0 y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + c_3 y_4 + c_4 y_5 ... + c_i y_i) - C = 0, \qquad (2)$$

где $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$,…, $c_i = (k-1)$;

$y_2 = \nu_2$, $y_3 = \nu_3$, $y_4 = \nu_4$, $y_5 = \nu_5$,…, $y_i = \nu_k$.

Предлагаемый алгоритм поиска всех решений уравнения (1) состоит из трех этапов;

а) определение диапазона возможных целочисленных значений неизвестных (I этап);

б) составление аналитической зависимости между неизвестными (II этап);

в) определение всех решений искомого уравнения в целых числах – из совместного рассмотрения пунктов а и б (III этап).

2. Решение структурного уравнения механики в целых числах

Применим предлагаемый трехэтапный алгоритм для решения в целых числах исходного структурного уравнения механики (1) при K = 1, K = 2, K = 3.

I. *K* = 1

Исходное структурное уравнение механики (1) при K = 1 вырождается ($\nu = \nu_2$, $C = 0$) и имеет единственное решение

$$\nu_2 = \nu = 0,$$

которое представлено на рис. 4 в виде одноконтурной замкнутой механической системы.

II. *K* = 2

Исходное структурное уравнение механики (1) при K = 2 примет вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu\,;\;\; \nu \leq 2(K-1) = 2$$

и в диапазоне возможных целочисленных значений неизвестных $0 \leq \nu_2 \leq 2$, $0 \leq \nu_3 \leq 1$ имеет следующие 4 решения в четных и нечетных числах:

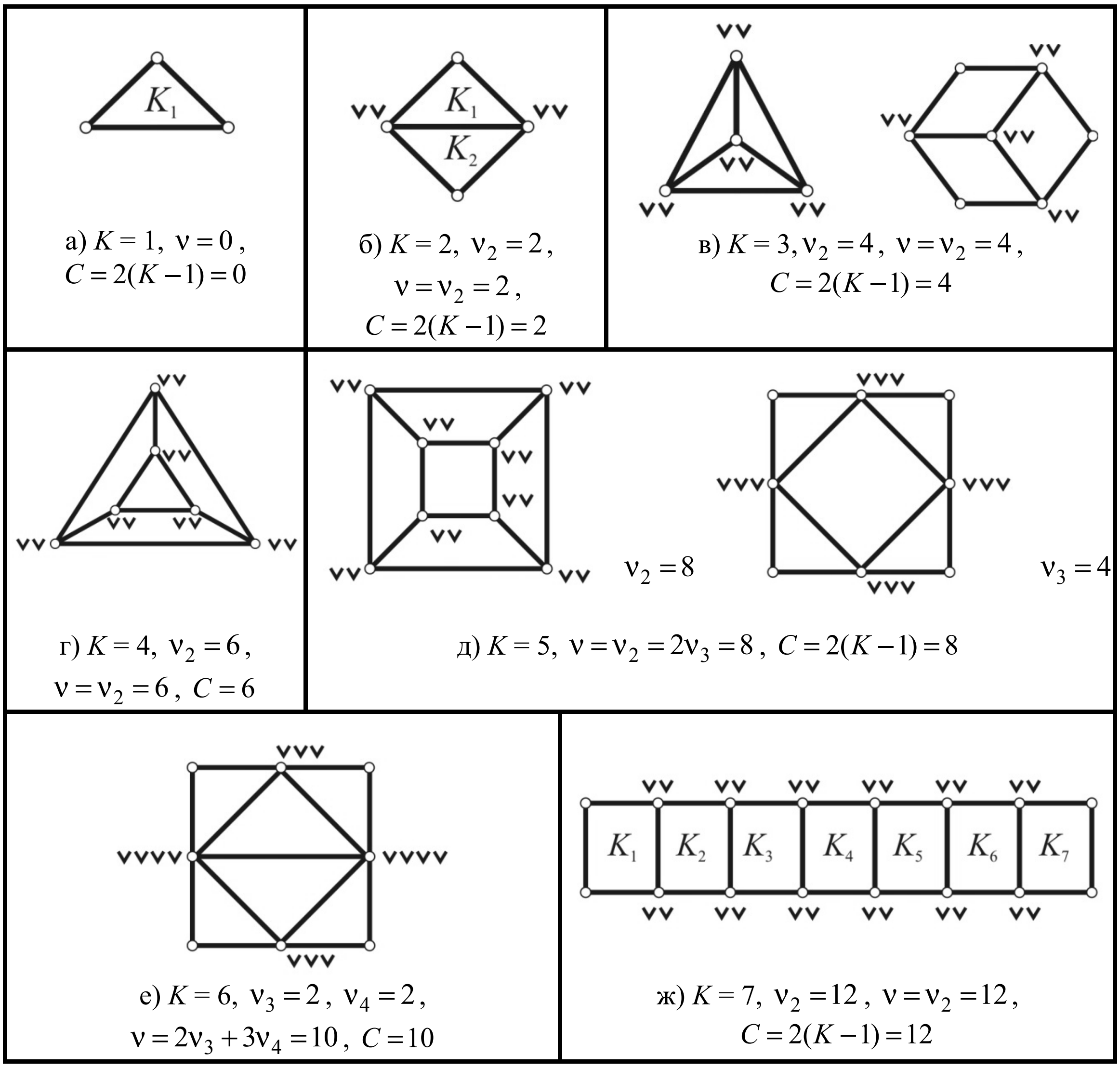

Рис. 3. Моделирование строения замкнутых одноконтурных (K = 1) и многоконтурных ($K \geq 2$) шарнирно-рычажных структур (выполнение граничного условия структурного уравнения механики (1) вида ν = C)

$\nu_2 = 0,\ \nu_3 = 0,\ \nu_2 = 1,\ \nu_3 = 0,\ \nu_2 = 2,\ \nu_3 = 0,\ \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 1$

(представленные на рис. 4 в виде различных двухконтурных механических систем).

III. $K = 3$

Исходное структурное уравнение механики (1) при K = 3 примет вид

$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu;\ \nu \leq 2(K-1) = 4$

и в пределах $\nu \leq 4$ может иметь только 5 значений величины ν :

$\nu = C_1 = 0;\ \nu = C_2 = 1;\ \nu = C_3 = 2;\ \nu = C_4 = 3;\ \nu = C_5 = 4$,

приводящих к следующей совокупности целочисленных решений уравнения (1), определяющих возможные варианты структуры трехконтурных механических систем:

а) $C_1 = 0$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 0 \Rightarrow \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 0$ (первое решение);

б) $C_2 = 1$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 1 \Rightarrow \nu_3 = \dfrac{1-\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *нечетной* и равной $\nu_2 = 1,\ \nu_3 = 0$ (второе решение);

в) $C_3 = 2$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 2 \Rightarrow \ \nu_3 = 1 - \dfrac{\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *четной* и в пределах $\nu_2 \leq 2$ таких четных цифр только две: $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$ (третье решение); $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 0$ (четвертое решение);

г) $C_4 = 3$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 3 \Rightarrow \ \nu_3 = \dfrac{3 - \nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *нечетной* и в пределах $\nu_2 \leq 3$ таких нечетных цифр только две (1; 3): $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 1$ (пятое решение); $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 0$ (шестое решение);

д) $C_5 = 4$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 4 \Rightarrow \ \nu_3 = 2 - \dfrac{\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *четной* и в пределах $\nu_2 \leq 4$ таких четных цифр только три (это 0; 2; 4): $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 2$ (седьмое решение); $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 1$ (восьмое решение); $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 0$ (девятое решение).

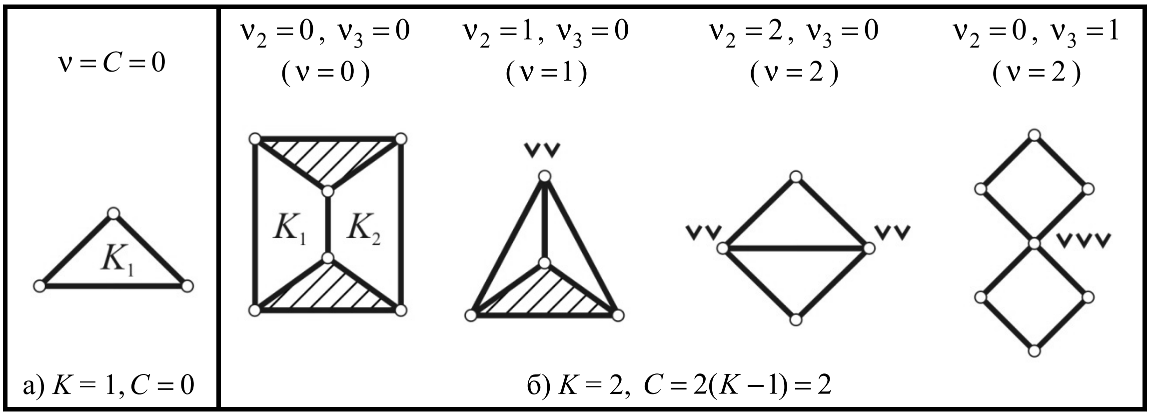

Рис. 4. Создание одноконтурных (*K* = 1) и двухконтурных (*K* = 2) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае *C* ≤ *K*)

Таким образом, исходное уравнение механики (1) при $K = 3$ содержит 2 неизвестных (ν_2, ν_3) и имеет только 9 решений в целых числах (представленных на рис. 5 в виде трехконтурных замкнутых механических систем).

3. Теорема о конечном множестве целочисленных решений структурного уравнения механики с несколькими неизвестными

Анализ полученных в п. 2 целочисленных решений линейного структурного уравнения механики (1) позволяет предположить, что их различное число предопределено разными наборами четных и нечетных цифр согласно предлагаемой ниже теореме.

Теорема

Линейное структурное уравнение механики вида

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + ... + (k-1)\nu_k = \nu\,; \ \nu \leq C = 2(K-1) \Rightarrow \ \nu_2 + 2\nu_3 \leq C_0 \qquad (3)$$

при любых $K \geq 1$ (т. е. с любым числом неизвестных) имеет конечное множество Z целочисленных решений ($\nu_2, \nu_3, \nu_4, ...$), определяемое набором четных и/или нечетных взаимно простых целых чисел в составе константы C_0 и рассчитываемое по формуле

$$Z = \sum N_i\,, \ N_i = \left(\frac{m_0}{2} + k_0\right) + \left(\frac{m_1 + k_1}{2}\right), \qquad (4)$$

$$C_0 = 2(K-1) - [3\nu_4 + 4\nu_5 + ... + (k-1)\nu_k]\,, \ C_0 \leq C = 2(K-1)\,, \qquad (5)$$

где N_i – число целочисленных решений в пределах данного значения C_0; m_0, k_0 – сумма четных цифр (m_0) и их количество (k_0) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно); m_1, k_1 – сумма нечетных цифр (m_1) и их количество (k_1) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно).

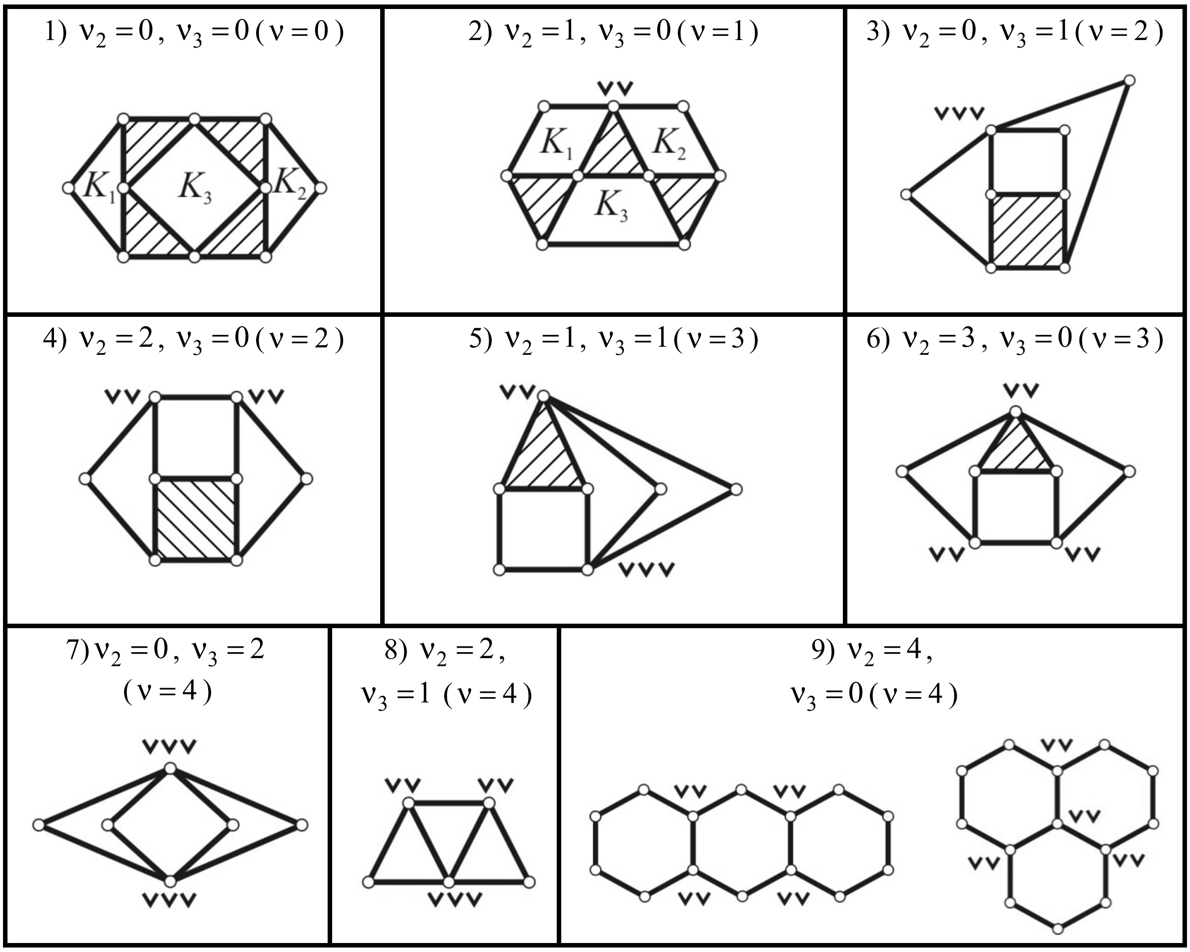

Рис. 5. Создание трехконтурных (*K* = 3, *C* = 2(*K* – 1)) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае *C* > *K*)

Пример № 1. Исходные данные: ***K* = 2**; $\nu_2+2\nu_3=2(K-1)=2$; $C_0=C=2$; $N_i=N$.

Результаты расчета: $m_0=0+2=2$, $k_0=2$; $m_1=1$, $k_1=1 \Rightarrow N=(2/2+2)+(1)=4$; $Z=N=4$.

Пример № 2. Исходные данные: ***K* = 3**; $\nu_2+2\nu_3=4$; $C_0=C=4$; $N_i=N$.

Результаты расчета: $m_0=0+2+4=6$, $k_0=3$; $m_1=1+3=4$, $k_1=2 \Rightarrow N=(3+3)+(3)=9$; $Z=N=9$. (Совпадают с представленными на рис. 4 и 5 для случаев $K=2$ и $K=3$).

Примечание

В работе [6] рассматривается метод поиска целочисленных решений линейного уравнения с двумя неизвестными вида

$$ax+by+E=0,$$

решение которого представлено в виде $x=x_0-bt$, $y=y_0+at$, где t – параметр ($t=0,\pm1,\pm2,\dots$), (x_0,y_0) – некоторое решение данного уравнения, в указанном уравнении *a, b* – целые числа, отличные от нуля и взаимно простые; *E* – целое.

Применительно к рассматриваемой механической системе с $K=2$ (см. рис. 4) на *a, b, E* необходимо наложить дополнительные условия: $x\ge0$, $y\ge0$; *a* = 1, *b* = 2; $E\le0$; ($x_0=E$, $y_0=-E$) – одно из решений; $E\in[-2,0]$.

С учетом данных условий получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x = E - 2t \geq 0; \\ y = -E + t \geq 0, \end{cases}$$

из которой определяем интервал изменения параметра t (с учетом отрицательной величины E): $t \leq \frac{E}{2}$; $t \geq E$ и получаем следующий набор целочисленных решений:

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$; $x_3 = 2$, $y_3 = 0$; $x_4 = 0$, $y_4 = 1$.

Сравнительный анализ полученного множества из 4 решений показывает, что данный результат (пары чисел x и y) полностью согласуется как с целочисленными решениями при $K = 2$ (см. п.2), так и с определением числа решений по аналитической зависимости (4) теоремы, предложенной в п.3 данной работы.

Выводы

1. Установлено, что исходное структурное уравнение механики вида [2]

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + ... + (k-1)\nu_k = \nu; \ \nu \leq 2(K-1)$$

имеет конечное множество целочисленных решений Z (4), зависящих от набора четных и нечетных чисел в пределах константы данного уравнения, возрастающее с увеличением числа K образуемых звеньями механической системы замкнутых контуров.

2. Полученные целочисленные решения указанного структурного уравнения механики отражают все возможное многообразие структур с многократными связями и могут быть практически реализованы в виде разнообразных механических систем взаимосвязанных твердых тел (подвижных или неподвижных звеньев) для разных областей техники.

3. В синтезированных на основе целочисленных решений разнообразных механических систем (см. рис. 4 и 5) выявлена общая закономерность упрощения структуры (за счет снижения сложности составляющих звеньев) при переходе от нижней границы $\nu = 0$ к верхней границе $\nu = C$ их строения с многократными связями.

Литература

1. *Крайнев, А.Ф. Механика (искусство построения) машин. Фундаментальный словарь / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 2000. – 904 с.*

2. *Пожбелко, В.И. Структурный анализ и синтез механизмов заданного уровня сложности по универсальной структурной таблице стандартных кодов строения / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2012. – Т. 10, №1 (19). – С. 24–45.*

3. *Глинка, Н.Л. Кристаллические решетки твердого вещества // Общая химия / Н.Л. Глинка. – Л.: Химия, 1986. – Гл. V. – 704 с.*

4. *Крапивцев, В.Г. Организация конвективного переноса в пучке твэлов за сотовыми решетками для водо-водяных энергетических реакторов / В.Г. Крапивцев, В.И. Солонин, С.И. Цирин // Известия вузов. Машиностроение. – 2011. – № 4. – С. 7–12.*

5. *Серпинский, В.О. О решении уравнений в целых числах: пер. с пол. / В.О. Серпинский. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 88 с.*

6. *Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1983. – 63 с.*

7. *Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Совет. энцикл., 1988. – 847 с.*

Поступила в редакцию 4 сентября 2012 г.

Пожбелко Владимир Иванович. Доктор технических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов – теория механизмов и машин.

Vladimir I. Pozhbelko. Doctor engineering science, professor, South-Ural State University. The area of scientific interests – theory of machine and mechanisms.

Ермошина Екатерина Николаевна. Студентка, Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов – прикладные математика и физика.

Ekaterina N. Ermoshina. Student, South Ural State University. The area of scientific interests – applied mathematics and physics.