

# КОЛЕБАНИЯ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко

Проведено математическое моделирование движения капли вязкой жидкости, зажатай между двумя ПЛОСКИМИ поверхностями и выведенной из состояния механического равновесия. Обнаружено, что релаксация имеет характер затухающих колебаний. Определены собственные частоты и коэффициенты затухания таких колебаний, совместимых с предположением об осевой симметрии движений в капле. Выявлена зависимость коэффициента затухания колебаний от вязкости жидкости.

**Введение.** Возможность одновременного измерения поверхностного натяжения, плотности и вязкости жидкости по наблюдениям за собственными и вынужденными колебаниями свободных, опертых или стесненных капель, представляет значительный интерес в связи с развитием техники физико-химических экспериментов над жидкостями. Известны эксперименты по определению этих свойств по наблюдениям за колебаниями свободных капель, находящихся в условиях невесомости [1] или левитирующих - взвешенных в электромагнитном поле [2] или газовом потоке [3]. Ввиду трудностей технической реализации экспериментов со свободными каплями представляет интерес оценка возможности определения тех же свойств для опертых, подвешенных или стесненных капель. В настоящей работе с помощью численного моделирования делается попытка оценить эту возможность для «зажатых» капель - ограниченных сверху и снизу двумя горизонтальными плоскими твердыми поверхностями. Задача состоит в том, чтобы установить связь между интересующими нас свойствами жидкости и параметрами колебаний такой капли после выведения ее из состояния равновесия

**Математическая модель.** Пусть жидкая капля объема  $V$  зажата между двумя плоскостями, расстояние между которыми  $H$ , и выполнены следующие предположения:

- жидкость несжимаема;
- форма расплющенной капли, а также поля скорости и давления в жидкости имеют осевую симметрию;
- тепловыделение, обусловленное движением жидкости, незначительно, так что справедливо изотермическое приближение;
- можно пренебречь испарением с поверхности капли;
- механизм растекания таков, что условия прилипания на твердых поверхностях не нарушаются;
- отсутствует гистерезис смачивания.

Тогда гидродинамические уравнения движения жидкости в капле запишутся как

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $p$  - поля скорости и давления в жидкости,  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $\rho$  - плотность жидкости,  $\mathbf{g}$  - ускорение свободного падения. Обозначим через  $\mathbf{n} = \{n_r, n_z\}$  единичный вектор внешней нормали, через  $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_r, \tau_z\}$  единичный касательный вектор к свободной поверхности, через  $\Gamma_{\text{жт}}$  и  $\Gamma_{\text{жг}}$  - границы жидкость-твердое и жидкость-газ. Тогда выполнены следующие граничные условия:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{\text{жт}}} = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_{\text{жг}}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_{жг}} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{жг} K,$$

где  $\mathbf{T}_{ij} = -p\epsilon_{ij} + \eta(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ ,  $i, j = 1, 2$  - тензор напряжений,  $K$  - кривизна свободной поверхности капли,  $\sigma_{жг}$  и  $\sigma_{жт}$  - коэффициенты поверхностного натяжения на границе жидкость-газ и жидкость-твердое тело соответственно,  $\eta$  - коэффициент динамической вязкости жидкости. Первое условие означает непроницаемость твердых границ и отсутствие проскальзывания на них, второе - отсутствие сдвиговых напряжений на свободной границе жидкости, третье - равенство нормальных напряжений на этой границе поверхностному давлению, определяемому формулой Лапласа.

Введем безразмерные переменные, когда скорость и отнесена к характерной величине  $u_0 = 10^{-2}$  м/с (начальная амплитуда скорости возмущения), расстояния - к радиусу  $R$  равновесной свободной капли, время - к  $R/u_0$ , давление к  $\rho u_0^2$  и обозначим  $Re = u_0 R \rho / \eta$  - число Рейнольдса,  $Fr = u_0^2 / (gR)$  - число Фруда,  $We = u_0^2 R \rho / \sigma_{жг}$  - число Вебера. Тогда в безразмерных цилиндрических координатах  $(r, z)$  уравнения для скоростей  $\vec{V} = (V_r, V_z)$  и давления  $P$  запишутся как

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \vec{V})V_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \tag{0}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \vec{V})V_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = - \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 - 2 \frac{\partial V_z}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial z} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2, \tag{3}$$

а в качестве граничных условий будем иметь:

$$V_r|_{\Gamma_{жт}} = V_z|_{\Gamma_{жт}} = 0, \tag{4}$$

$$\left( 2n_z n_r \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + (n_z^2 - n_r^2) \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \right) \Big|_{\Gamma_{жг}} = 0, \tag{5}$$

$$\left( -P + 2n_z^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} - 2n_z n_r \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + 2n_r^2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \Big|_{\Gamma_{жг}} = \frac{K}{We} + P_0. \tag{6}$$

Здесь  $P$  есть превышение давления в точке с координатой  $z$  над гидростатическим давлением  $P_0$ , определяемым формулой

$$P_0(z) = -\frac{K_0(z)}{We}, \tag{7}$$

$K_0$  - кривизна свободной границы капли в равновесии. Для определения равновесной формы следует найти минимум полной энергии капли

$$E = \int_V \rho g z dV + \int_{S_{жг}} \sigma_{жг} dS + \int_{S_{жт}} (\sigma_{жт} - \sigma_{гт}) dS,$$

здесь  $S_{жг}$  - площадь поверхности жидкость-газ,  $S_{жт}$  - площадь поверхности взаимодействия жидкость-подложка. Для этого капля разбивается на тонкие слои в форме усеченного кругового конуса с толщиной  $h = H/(m-1)$ ,  $m$  - число разбиений вдоль оси  $z$ . Подлежат определению радиусы оснований слоев. Обозначив через  $r_i$  радиус капли на высоте  $i \cdot h$ , получаем следующее выражение для безразмерной полной энергии капли:

$$E = \frac{(\sigma_{жг} - \sigma_{гт})\pi}{u_0^2 R \rho} (r_1^2 + r_m^2) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\pi}{We} (r_i + r_{i+1}) \sqrt{h^2 + (r_{i+1} - r_i)^2} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{Fr} \frac{i h^2 \pi}{3} (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2). \tag{8}$$

Минимум (8) следует искать при условии постоянства объема капли, равного

$$V = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\pi h}{3} (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2). \quad (9)$$

Поиск минимума выражения (8) проводился методом Розенброка [4], при этом радиусы  $r_i$ ,  $i=1, m-1$  являются независимыми переменными  $r_m$  определяется из (9).

После определения значений  $r_i$ ,  $i = 1, m$ , соответствующих минимуму полной энергии, равновесные давления вычисляются по формуле (7), в которой безразмерная кривизна вычисляется как  $K_0(z) = -R_{1i}^{-1} + R_{2i}^{-1}$ , где  $R_{1i}$  и  $R_{2i}$  - радиусы кривизны нормальных сечений равновесной капли при  $z = i \cdot h$ .  $R_{1i}$  есть взятый с соответствующим знаком радиус окружности, лежащей в плоскости осевого сечения и проходящей через точки с координатами  $(r_{i-1}, (i-1)h)$ ,  $(r_i, ih)$  и  $(r_{i+1}, (i+1)h)$ ,  $R_{2i}$  - радиус окружности, лежащей в плоскости, содержащей нормаль  $n$  и перпендикулярной осевому сечению, вычисляется как  $R_{2i} = -r_i / n_r$ .

**Численный метод решения.** Для решения системы (1)-(6) использовалась разностная схема, построенная на основе равномерной пространственной сетки. Пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, временная производная вычислялась вперед по времени. Сетка перестраивалась на каждом временном шаге в соответствии с изменениями в форме капли. Системы линеаризованных разностных уравнений решались методом исключения Гаусса.

В численном решении задачи можно выделить три этапа. На первом проводится решение уравнения (3) с граничными условиями (6) для определения поля давления при фиксированных скоростях и форме капли. На втором этапе проводится решение уравнений (1), (2) при граничных условиях (4)-(6) и находится поле скоростей при фиксированных давлении и форме. На третьем этапе из уравнений

$$r_i^{t+\Delta t} = r_i^t + V_r|_{\Gamma_{жг}} \cdot \Delta t, \quad z_i^{t+\Delta t}|_{\Gamma_{жг}} = z_i^t|_{\Gamma_{жг}} + V_z|_{\Gamma_{жг}} \cdot \Delta t, \quad i = 2, m-1$$

определяется новая форма капли. Радиусы пятен смачивания определяются из закона сохранения массы в прилегающих к твердым плоскостям нижнем и верхнем слоях. При построении новой формы капли участки между точками свободной границы  $(r_i^{t+\Delta t}, z_i^{t+\Delta t})|_{\Gamma_{жг}}$  аппроксимируются

отрезками. Таким образом, использованный численный метод является одним из методов расщепления по физическим процессам [5].

**Обсуждение результатов.** Основная цель работы состоит в выяснении того, каким образом жидкая капля вязкой жидкости достигает состояния равновесия, будучи выведена из него каким-либо образом. Так как в разностной формулировке форма капли определяется радиусами своих поперечных сечений, то для моделирования ее начального неравновесного состояния достаточно задать произвольные радиусы  $r_i$ , совместимые с безразмерным объемом капли, равным  $V = 4\pi/3$ . В работе в качестве неравновесных  $r_i$  использовались равновесные значения, найденные в предварительном расчете для капли жидкости с поверхностным натяжением, немного отличающимся от исходного (но имеющей тот же безразмерный объем). Если расстояние между плоскостями, сжимающими каплю, не меняется, то вычисление равновесной формы, необходимое для определения  $P_0(z)$ , достаточно провести лишь один раз в начале расчета.

На рис. 1 изображено поле скоростей в объеме капли. Мгновенная картина распределения скоростей показывает, что наибольшие значения скорости наблюдаются вблизи свободной границы, центральная часть капли движется менее интенсивно. Движение поверхности капли вызывает изменение радиусов  $r_i$  во времени. На рис. 2 изображены рассчитанные временные зависимости радиусов капли  $r_i$ . Расчет проведен для капли воды,  $R = 1,5$  мм,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $H = 1,2$ ,  $\sigma_{жг} = 0,073$  Н/м,  $\sigma_{жг} - \sigma_{гг} = 0$  Н/м. Как видно из рисунка, релаксация радиусов представляет собой затухающие колебания. Подгонкой кривых  $r_i(t)$  под затухающую синусоиду вида

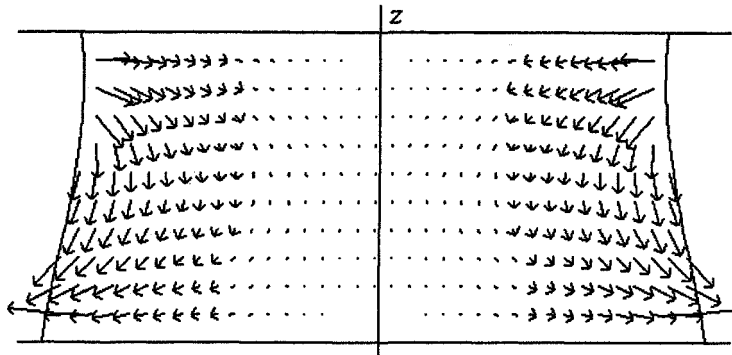


Рис. 1. Картина поля скоростей в осевом сечении капли

$$r_i(t) = A \cdot e^{-p \cdot t} \sin(f \cdot t + \psi) + C$$

можно получить частоту и коэффициент затухания колебаний. Подгонка проводилась методом наименьших квадратов с минимизацией методом Розенброка [4]. Параметры функции (10) оценивались локально - в пределах каждого периода колебаний.

Как выяснилось, определенные таким способом частота и коэффициент затухания изменяются в процессе колебаний и значения их стабилизируются лишь после завершения переходных процессов. Длительность этого переходного интервала зависит от вязкости жидкости. Характерные зависимости локально определенного коэффициента затухания от времени изображены на рис. 3. Как видно из рисунка, весь процесс эволюции  $p(t)$  можно условно разделить на 3 этапа. На первом происходит установление колебаний и коэффициент затухания не постоянен, затем наблюдается интервал его стационарного поведения, на 3-м этапе амплитуда колебаний мала и коэффициент затухания снова зависит от времени, возможно, из-за погрешности подгонки (10). На рисунке эти этапы разделены вертикальными отрезками. Интерес представляет величина  $p$  на втором этапе. Длительность этого этапа зависит от вязкости жидкости и тем больше, чем меньше вязкость. Так, для колебаний капли воды, изображенных на рис. 2, длительность второго этапа составляет 40 мс (4 колебания) (рис. 3), при этом частота колебаний составляет  $f = 584 \text{ с}^{-1}$ , а коэффициент затухания  $p = 46 \text{ с}^{-1}$ . Для жидкости с вязкостью  $\nu = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  (жидкое машинное масло) продолжительность этапа колебаний с постоянным коэффициентом затухания составляет 28 мс (см. рис.3). При релаксации капли жидкости, вязкость которой превышает  $\nu = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , 2-й этап имеет очень малую длительность или отсутствует, так что такие колебания не могут характеризоваться однозначно определенным коэффициентом затухания.

Относящийся ко второму этапу колебаний коэффициент затухания может быть использован для определения вязкости жидкости. График его зависимости от коэффициента вязкости изобраа-

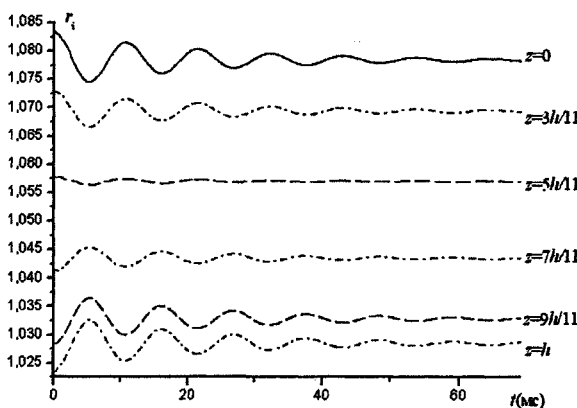


Рис. 2. Временная эволюция радиусов поперечных сечений капли воды при релаксации в равновесное состояние

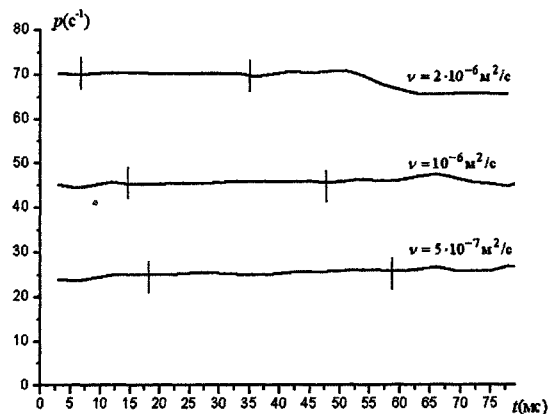


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания свободных колебаний капли от времени

жен на рис. 4. Расчеты были выполнены для модельных жидкостей с плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma_{\text{жг}} = 0,073 \text{ Н/м}$ ,  $\sigma_{\text{жг}} - \sigma_{\text{гт}} = 0,005 \text{ Н/м}$ , параметры капли были равны  $R = 1,5 \text{ мм}$ ,  $H = 1,2$ . Коэффициент кинематической вязкости изменялся в расчетах в пределах  $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с} \dots 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Как видно из рисунка, с увеличением вязкости происходит увеличение коэффициента затухания, расчетные точки графика  $p(\nu)$  хорошо подгоняются зависимо-

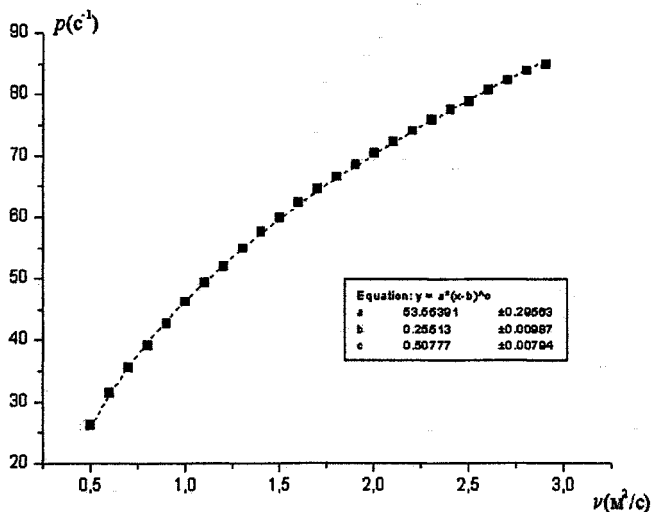


Рис. 4. Зависимость коэффициента затухания свободных колебаний капли от коэффициента вязкости жидкости

стью  $p = 63,664(\nu - 0,255)^n$  (на рис. 4 изображена пунктирной кривой), где и с точностью до 1% оказывается равным 1/2. Наибольшая чувствительность метода, соответствующая наибольшему углу наклона этой кривой, наблюдается при малых вязкостях. Коэффициенты вязкости, превышающие  $3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  в подобном опыте определить невозможно вследствие трудностей в определении коэффициента затухания, о которых говорилось выше, однако при увеличении радиуса равновеликой капли кривые  $p(\nu)$  могут быть продолжены и для больших значений вязкости.

Таким образом, полученные в работе результаты могут быть положены в основу новой методики измерения вязкости жидкостей - по наблюдениям за временной релаксацией зажатой капли, выведенной из положения равновесия.

#### Литература

1. Hisao Azuma and Shoichi Yoshihara Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis // J. Fluid Mech. - 1999. - V. 393. - P. 309-332.
2. Cummings D. L., Blackburn D.A. Oscillation of magnetically levitated aspherical droplets // J. Fluid Mech. - 1991. - V. 224. - P. 1-8.
3. Hervieu E., Coutris N. and Boichon C Oscillations of a drop in aerodynamic levitation // Nuclear Engineering and Design. - 2001. - V. 204. - № 1-3. - P. 167-175.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 534 с.
5. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984. - 519 с.

Поступила в редакцию 3 октября 2006 г.