УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Л. Ушаков

Эллиптическая задача второго порядка в прямоугольной области при определенных краевых условиях с помощью методов сумматорных тождеств и итерационной факторизации сводится к системам линейных алгебраических уравнений с треугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трех. Повторяющаяся факторизация оператора, энергетически эквивалентного оператору приближенной решенной задачи, обозначается в данном случае как моделирование интеграционной факторизации, так как оператор исходной задачи не факторизуется точно.

1. Введение. В статье рассматривается эллиптическое уравнение второго порядка в прямоугольнике со сторонами параллельными осям координат при этом на правой и верхней сторонах прямоугольника задано главное краевое условие, а на остальной части границы задано естественное краевое условие. Для численного решения рассматриваемой задачи предлагаются варианты итерационного процесса, использование которых дает убывание ошибки в энергетической норме за каждую итерацию не менее чем в два раза. На каждом шаге итерационного процесса возникают две системы уравнений с нижне- и верхнетреугольными матрицами, в которых количество ненулевых элементов в каждой строке не более трех. Указываются варианты решения последних систем, когда счет по производным формулам устойчив. Таким образом, найдена и указана чистая задача для эллиптического уравнения второго порядка, которая после аппроксимации по методу сумматорных тождеств не факторизуется, но имеет факторизующийся переобуславливатель наиболее естественной конструкции, как, например, в попеременно треугольном методе.

2. Непрерывная задача второго порядка. Рассматривается задача:

$$u\in W: A(u,v)=C(v)\ \forall v\in W,\ C\in W', \tag{1}$$

где

$$W=W(\Omega)=\left\{v\in W_2^1(\Omega): v\big|_{\Gamma_1}=0\right\},$$

$$\Omega=(0,b_1)\times(0,b_2),\ \ b_1,b_2\in(0,\infty),$$

т.е. исследуется задача в прямоугольной области,

$$\Gamma_1=\{b_1\}x[0,b_2)v[0,b_1]x\{b_2\}$$

и билинейная форма

$$A(u,v)=\int_\Omega(u_xv_x+u_yv_y+cuv)d\Omega,\ \ c\in[0,\infty).$$

Заметим, основываясь на [1, 2], что

$$\exists c_1c_2\in(0,\infty):\ c_1\|v\|^2_{w_2^1(\Omega)}\le A(u,u)\le c_2\|v\|^2_{W_2^1(\Omega)},\ \ \forall v\in W$$

следовательно, решение задачи (1) существует и единственно [1, 3].

Можно отметить, что при достаточно гладком решении задачи (1), как следствии, например, того, что, если

$$l(v)=\int_\Omega fvd\Omega,$$

где f – достаточно гладкая функция, имеем $(\Gamma=d\Omega)$:

$$\int_\Omega(u_x v_x-u_y v_y+cuv)d\Omega=$$

$$= \int_{\Omega}(-u_{xx}v - u_{yy}v + cuv)d\Omega +$$

$$+\int_{\Gamma}\left(u_x v\cos(n,x) + u_y v\cos(n,y)\right)d\Gamma =$$

предыдущее равенство имеет место, т.к. [1]

$$\int_{\Omega} W v_z\, d\Omega = -\int_{\Omega} W_z v\, d\Omega + \int_{\Gamma} W v\cos(n,z)d\Gamma, z = x, y$$

$$= \int_{\Omega}(-u_{xx} - u_{yy} + cu)vd\Omega + \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial u}vd\Gamma_2 = \int_{\Omega} f v\, d\Omega$$

таким образом, задача (1) при сделанных выше предположениях представляется в следующем виде $(\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1)$

$$-\Delta u + cu = -u_{x^2} - u_{y^2} + cu = f,$$

$$u/\Gamma_1 = 0, \frac{\partial n}{\partial n}/\Gamma_2 = 0.$$

3. Дискретная задача второго порядка. Рассматривается система линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации задачи (1) на основе метода сумматорных тождеств [4–8]

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : A\bar{u} = \bar{l}, \quad \bar{l} \in \mathbb{R}^N, \qquad (2)$$

где

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^N : \bar{v} = (v_{1,\dots,}v_N), N = mn, m, n \in \mathbb{N},$$

при этом считается, что

$$V_{m(j-1)+i} = v_{i,j}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n,$$

а $v_{i,j}$ являются значениями функций дискретного аргумента соответствующего узлами сетки

$$(x_i, y_j) = ((i-0{,}5)h_1, (j-0{,}5)h_2), i, j \in \mathbb{Z},$$

$$h_1 = b_1/(m+0{,}5), h_2 = b_2/(n+0{,}5)$$

шаги сетки, состоящей из указанных выше узлов сетки, а матрица размерности $N \times N$, определяемая следующим образом:

$$(\overline{A\bar{u}, \bar{v}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((u_{i+1,}j - u_{i,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j})h_1^{-2} +$$

$$+(u_{i,j+1} - u_{i,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j})h_2^{-2} + cu_{i,j}v_{i,j})h_1h_2,$$

$$u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = 0, i = 1,\dots,m, u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = 0, j = 1,\dots,n,$$

здесь (.,.) – скалярное произведение векторов следующего вида:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{j=1}^{N} u_j v_j h_1 h_2 \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^N,$$

и вектор $\bar{l}$ определяется по функционалу $l(\cdot)$ с учётом краевых условий. Отметим, что $A > 0$ и, следовательно, решение задачи (2) существует и единственно.

Задача (2) может быть записана в следующем виде:

$$(2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j})h_1^{-2} + (2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1})h_2^{-2} +$$

$$+cu_{i,j} = l_{i,j}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n, u_{i,0} = u_{i,1} \qquad (3)$$

$$u_{i,n+1} = 0, i = 1,\dots m, u_{0,j} = u_{1,j}, u_{m+1,j} = 0, j = 1,\dots,n.$$

Можно заметить, что при достаточной гладкости решения задачи (2), например, при

$$l_{i,j} = \int_{\Omega} f\delta(x_i, y_j)d\Omega = f(x_i, y_j), i = 1,...,m, j = 1,...,n$$

задача (3) аппроксимирует задачу (2) со вторым порядком.

4. Решение дискретной задачи второго порядка

Утверждение 1. Если для матриц $Q_j, j = 1,2$ имеет место неравенство

1) $Q_j + Q_j' > 0,\ j = 1,2,$

то тогда выполняются и неравенства

2) $Q_2 > 0, Q_1' > 0,$

3) $Q_2 \times Q_1' > 0,$

4) $(Q_2 \times Q_1')' > 0,$

5) $Q_2 \times Q_1' + (Q_2 \times Q_1')' > 0.$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$5) см., например, [9].Определим матрицы ∇_x, ∇_y размерности N x N

$$(\nabla_x \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i+1,j} - u_{i,j})h_1^{-1})v_{i,j}h_1h_2,$$

$$(\nabla_y, \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-(u_{i,j+1} - u_{i,j})h_1^{-1})v_{i,j}h_1h_2,$$

$$u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = 0, i = 1,...,m, u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = 0, j = 1,...,n.$$

Дополнительно введём матрицы: $\nabla_i, j = 1,2$ размерности $p \times p$, где $p = (2-j)m + (j-1)n,$ которые связаны с предыдущими матрицами следующим образом:

$$\nabla_x = E_n \times \nabla_1, \nabla_y = \nabla_2 \times E_m.$$

Здесь E_n E_m единичные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Утверждение 2. Имеют место следующие отношения:

1) $\nabla_x' + \nabla_x = E_n \times \nabla_1' + (E_n \times \nabla_1')' > 0,$

2) $\nabla_y + \nabla_y' = \nabla_2 \times E_m' + (\nabla_2 \times E_m')' > 0,$

3) $\nabla_x'\nabla_y + \nabla_y'\nabla_x = \nabla_2 \times \nabla_1' + (\nabla_2 \times \nabla_1')' > 0.$

Доказательство. Следует из утверждения 1. Определим матрицу U при

$\gamma \in (0,8), d \in [0,8)$:

$$(U\bar{u}, V\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma(-(u_{i+1,j} - u_{i,j})h_1^{-1} - (u_{i,j+1} - u_{i,j})h_2^{-1} +$$

$$+du_{i,j})\gamma(-(v_{i+1,j} - v_{i,j})h_1^{-1} - (v_{i,j+1} - v_{i,j})h_2^{-1} + dv_{i,j})h_1h_2,$$

$$u_{i,n+1} = v_{i,n+1} = 0, i = 1,...,m, u_{m+1,j} = v_{m+1,j} = 0, j = 1,...,n.$$

Возьмём матрицу A:

$$A = A - cE.$$

Здесь и далее $E = E_n$ обозначает единичную матрицу размерности $N \times N$. Можно отметить, что

$$U = \gamma(\nabla_x + \nabla_y + de),$$

$$A = \nabla_x'\nabla_x + \nabla_y'\nabla_y.$$

Утверждение 3. Имеют место следующие оценки

$$(2 + \operatorname{sgn} d)^{-1}\gamma^{-2}U'U \le A + d^2E \le \gamma^{-2}U'U.$$

Утверждение 4. Для спектральной задачи

$$\lambda : A\bar{u} = \lambda\bar{v}, \bar{v} \ne 0.$$

собственные числа имеют вид:

$$\lambda_{m(j-1)+i}=\lambda_{i,j}=4h_1^{-2}\sin^2\frac{(2i-1)\pi h_1}{4b_1}+4h_2^{-2}\sin^2\frac{(2j-1)\pi h_2}{4b_2},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$$

при этом

$$0<\min_{k=1,\dots,N}\lambda_k=\lambda_1=4h_1^{-2}\sin^2\frac{\pi h_1}{4b_1}+4h_2^{-2}\sin^2\frac{\pi h_2}{4b_2},$$

$$\max_{k=1,\dots,N}\lambda_k=\lambda_N=4h_1^{-2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2b_1}+4h_2^{-2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2b_2}<\infty.$$

Доказательство. Вычисления указанных собственных чисел проводятся аналогично [6].

Утверждение 5. Имеют место оценки

1) $\mathrm{K}(\lambda_1)(\mathrm{A}+d^2\mathrm{E})\le\mathrm{A}\le\mathrm{K}(\lambda_n)(\mathrm{A}+d^2\mathrm{E}),c\le d^2,$

2) $\mathrm{K}(\lambda_N)(\mathrm{A}+d^2\mathrm{E})\le\mathrm{A}\le\mathrm{K}(\lambda_1)(\mathrm{A}+d^2\mathrm{E}),d^2\le c,$

где: $\mathrm{K}(\lambda)=(\lambda+c)(\lambda+d^2)^{-1}$.

Доказательство. Ввиду [6, 10, 11] имеем:

$$\min_{k=1,\dots,N}K(\lambda_k)\le\frac{(A\bar{v},\bar{v})}{((A+d^2E)\bar{v},\bar{v})}\le\max_{k=1,\dots,N}K(\lambda_k),\bar{v}\ne 0.$$

При $c\le d^2(d^2\le c$ наоборот$)$ $\mathrm{K}'(\lambda)\ge 0$, т.е. функция $\mathrm{K}(\lambda)$ возрастает в широком смысле и её минимум и максимум при $\lambda\in\left[\lambda_1,\lambda_N\right]$ достигается, соответственно, когда $\lambda=\lambda_1\lambda_N$. Легко видеть, что при $d^2=c$ 1) и 2) выполняются, обращаясь в равенства.

Пусть величины $C_1(d),C_2(d)$ такие, что $0<C_1(d)\le C_2(d)<\infty$ и

$$C_1(d)U'U\le\mathrm{A}\le C_2(d)U'U.$$

Утверждение 6. $C_1(d),C_2(d)$ могут быть вновь выбраны в следующем виде:

$$C_1(d)=(2+\operatorname{sgn}d)^{-1}\gamma^{-2}K(\lambda_1),c\le d^2,$$

$$C_1(d)=(2+\operatorname{sgn}d)^{-1}\gamma^{-2}K(\lambda_N),d^2\le c,$$

$$C_2(d)=\gamma^{-2}K(\lambda_N),c\le d^2,$$

$$C_2(d)=\gamma^{-2}K(\lambda_1),d^2\le c.$$

Доказательство. Следует из утверждений 3 и 5.

Утверждение 7. Если $2\lambda_N-3\lambda_1\le 0$ или $2\lambda_N-3\lambda_1>0,c<\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)$ то

$$\frac{1}{3}<\max_{d\in[0,\infty)}\frac{C_1(d)}{C_1(d)}=\frac{C_1(0)}{C_2(0)}=\frac{\lambda_1(\lambda_N+c)}{2\lambda_N(\lambda_1+c)}\le\frac{1}{2},$$

если $2\lambda_N-3\lambda_1>0,\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)\le c,$ то

$$\max_{d\in[0,\infty)}\frac{C_1(d)}{C_2(d)}=\frac{C_1(\sqrt{c})}{C_2(\sqrt{c})}=\frac{1}{3}.$$

Утверждение 8. Величина $C_1(d)$, в частности, может быть выбрана в следующем виде:

$$\gamma^{-2}\lambda_1/(2\lambda_1+2\sqrt{2\lambda_1}+d+d^2),c=0,0\le d<\infty,$$

$$\gamma^{-2}(\lambda_N+c)/(2\lambda_N+2\sqrt{2\lambda_N}d+d^2),$$

$$0\le d<\min\{c\sqrt{2\lambda_N^{-1}},\sqrt{c}\}.$$

Утверждение 9. Если $2\lambda_N-3\lambda_1\le 0$ или $2\lambda_N-3\lambda_1>0,c<\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)$, то (здесь $C_1(d)$ из утверждения 8):

$$\frac{1}{3}<\sup_{d\in(0,\infty)}\frac{C_1(d)}{C_2(d)}=\frac{C_1(0)}{C_2(0)}=\frac{\lambda_1(\lambda_N+c)}{2\lambda_N(\lambda_1+c)}\le\frac{1}{2}.$$

Доказательство. Следует из утверждений 7, 8.

Утверждение 10. Величина $C_1(d)$, в частности, может быть выражена в следующем виде:

$$C_1(d)=\gamma^{-2}\lambda_1/(2\lambda_1+2\sqrt{2\lambda_1}d+d^2), c=0, 0\le d<\infty,$$

$$C_1(d)=\gamma^{-2}/3, c>0, d=\sqrt{c}.$$

Доказательство следует из утверждений 8 и 3.

Введём норму

$$\left\|\bar{v}\right\|_A=\sqrt{(A\bar{v},\bar{v})}.$$

Рассматривается итерационный процесс:

$$\bar{u}^k\in\mathbb{R}^N: U'U(\bar{u}^k-\bar{u}^{k-1})=-\tau_k(A\bar{u}^{k-1}-\bar{l}),$$
$$k=1,\dots,K, K\in N, \forall\bar{u}^0\in\mathbb{R}^N, \tau_k=2(c_1(d)+c_2(d)). \tag{4}$$

Используется следующая оценка сходимости $\bar{u}^k$ к $\bar{u}$:

$$\left\|\bar{u}^k-\bar{u}\right\|_A\le\sum\left\|\bar{u}^0-\bar{u}\right\|_A, \mathrm{K}\in\mathbb{N}.$$

При этом

$$\sum=\sum(d)=\left(\frac{C_2(d)-C_1(d)}{C_2(d)+C_1(d)}\right)^k=\left(\frac{1-C_1(d)/C_2(d)}{1+C_1(d)/C_2(d)}\right)^k.$$

Итерационные параметры τ_k в (4) можно выбирать и на основе вариационных принципов.

Заметим, что в итерационном процессе (4) возникают задачи с факторизованными операторами и следующего вида

$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N: U'\bar{w}=\bar{g}, \bar{g}\in\mathbb{R}^N,$$

при этом возможно расщепление на более простые задачи

$$\bar{w}\in\mathbb{R}^N: U'\bar{w}=\bar{g}, \bar{g}\in\mathbb{R}^N,$$
$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N: U\bar{u}=\bar{w}, \bar{w}\in\mathbb{R}^N,$$

которые могут быть записаны в таком виде:

$$\gamma(w_{i,j}-w_{i-1,j})h_1^{-1}+\gamma(w_{i,j}-w_{i,j-1})h_2^{-1}+\gamma d w_{i,j}=g_{i,j}$$
$$i=1,\dots,m, j=1,\dots,n, \tag{5}$$
$$w_{i,0}=0, i=1,\dots,m, w_{0,j}=0, j=1,\dots,n$$

и

$$-\gamma(u_{i+1,j}-u_{i,j})h_1^{-1}-\gamma(u_{i,j+1}-u_{i,j})h_2^{-1}+\gamma d u_{i,j} w_{i,j}$$
$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n, \tag{6}$$
$$u_{i,n+1}=0, i=1,\dots,m,\ u_{m+1,j}=0,\ j=1,\dots,n.$$

Из (5) можно найти неизвестные

$$w_{i,j}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n,$$

исходя из формул

$$w_{i,j}=\delta_1 w_{i-1,j}+\delta_2 w_{i,j-1}+\delta_3 g_{i,j} \tag{7}$$

и из (6) находятся неизвестные

$$u_{i,j}, i=m-i_1+1, j=n-j_1+1, i_1=1,\dots,m, j_1=1\dots,n,$$

исходя из формул

$$u_{i,j}=\delta_1 u_{i+1,j}+\delta_2 u_{i,j+1}+\delta_3 w_{i,j}, \tag{8}$$

где

$$\delta_1=\gamma h_1^{-1}/\delta_4, \delta_2=\gamma h_2^{-1}/\delta_4,$$
$$\delta_3=1/\delta_4, \delta_4=\gamma h_1^{-1}+\gamma h_2^{-1}+\gamma d.$$

Отметим, что $\delta_1+\delta_2\le 1$, т.е., в соответствии с [10], имеется пространственная счётная устойчивость для (7), (8). Если $\delta=\delta_{(\gamma)}=\delta_1+\delta_2+\delta_3\le 1$, , то в соответствии с [33, 35] счет по формулам (7), (8) будет устойчив.

Теорема 1. В итерационном процессе (4), если $2\lambda_N-3\lambda_1\le 0\vee 2\lambda_N-3\lambda_1>0$, $c<\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)$ и выбрать $d=0,\gamma$ – достаточно большое, и если

$$\tau_k=\frac{4\lambda_1\lambda_N\gamma^2}{3\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N+\lambda_1)},$$

то

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k\le\sigma=\left(\frac{\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N-\lambda_1)}{3\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N+\lambda_1)}\right)^k<\left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

а $\delta(\gamma)\to 1$, когда $\gamma\to\infty$.

Если $2\lambda_N-3\lambda_1>0$, $\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)<c$ и взять $d\sqrt{c},\gamma\ge d^{-1}$, $\tau_k=\frac{3\gamma^2}{2}$, то $\sigma=\left(\frac{1}{2}\right)^k$, а $\delta\le 1$.

Доказательство. Следует из утверждений 6, 7.

Теорема 2. В итерационном процессе (4), если $c=0$ и взять $0<d$ достаточно малое $\gamma\ge d^{-1}$,

$$\tau_k=\frac{2(2\lambda_1+2\sqrt{2\lambda_1}d+d^2)(\lambda_N+d^2)\gamma^2}{3\lambda_1\lambda_N+2\sqrt{2\lambda_1}d+(\lambda_N+\lambda_1)d^2},$$

то

$$\sigma=\sigma(d)=\left(\frac{\lambda_1\lambda_N+2\sqrt{2\lambda_1}\lambda_N d+(\lambda_N-\lambda_1)d^2}{3\lambda_1\lambda_N+2\sqrt{2\lambda_1}\lambda_N d+(\lambda_N+\lambda_1)d^2}\right)^k\to\left(\frac{1}{3}\right)^k,$$

когда $d\to 0$, а $\delta\le 1$.

Если $c>0$, при этом $2\lambda_N-3\lambda_1\le 0$ или $2\lambda_N-3\lambda_1>0, c<\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)$, и выбрать d достаточно малое:

$$0<d<\min\{c\sqrt{2\lambda_N^{-1}},\sqrt{c}\},\gamma\ge d^{-1},$$

$$\tau_k=\frac{2(2\lambda_N+2\sqrt{2\lambda_N}d+d^2)(\lambda_1+d^2)\gamma^2}{3\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N+\lambda_1)+2\sqrt{2\lambda_N}(\lambda_1+c)d+(\lambda_N+\lambda_1+2c)d^2}$$

то

$$\sigma=(d)=\left(\frac{\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N-\lambda_1)+2\sqrt{2\lambda_N}(\lambda_1+c)d-(\lambda_N-\lambda_1)d^2}{3\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N+\lambda_1)+2\sqrt{2\lambda_N}(\lambda_1+c)d+(\lambda_N+\lambda_1+2c)d^2}\right)^k$$

$$\left(\frac{\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N-\lambda_1)}{3\lambda_1\lambda_N+c(2\lambda_N+\lambda_1)}\right)^k<\left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

когда $d\to 0$, а $\delta\le 1$.

Если $2\lambda_N-3\lambda_1>0,\lambda_1\lambda_N/(2\lambda_N-3\lambda_1)\le c$ и $d=\sqrt{c},\gamma\ge d^{-1}$, $\tau_k=1{,}2\gamma^2$, то $\sigma=\left(\frac{1}{2}\right)^k$, а $\delta\le 1$.

Доказательство следует из утверждений 6, 7, 8, 9, 10.

Вывод. Учитывая вид матриц U',U, нетрудно заметить, что решение задачи (2) с N неизвестными можно получить на основании теорем 1 и 2 предложенным итерационным процессом (4) с относительной погрешностью σ за $0(N\ell n\sigma^{-1})$ арифметических операций.

Литература

1. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. - Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1979. - 235 с.

2. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. - 256 с.

3. Обэн, Ж.П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.П. Обэн. - М.: Мир, 1977.-383 с.

4. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. - М.: Наука, 1973.-407 с.

5. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. - М.: Наука, 1973. - 576 с.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1989. - 616 с.

7. Самарский А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. - М.: Наука, 1976. - 352 с.

8. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов и др.; под ред. К.И. Бабенко. - М.: Наука, 1979.-296 с.

9. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. - М.: Наука, 1984.-320 с.

10. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. - М.: Наука, 1989. - 272 с.

11. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. - М.: Наука, 1978. -592 с.

12. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. - М.: Наука, 1989. - 608 с.

13. Ушаков, А.Л. Метод итерационного расщепления для специальных эллиптических краевых задач /А.Л. Ушаков. -Челябинск: ЧПИ, 1990. - 32 с. - Деп. в ВИНИТИ 23.11.90, №5892-В90.

14. Ушаков, А.Л. Метод итерационной факторизации / А.Л. Ушаков. - Челябинск: ЧГТУ, 1994. - 31 с. -Деп. в ВИНИТИ 17.10.94, № 2375-В94.

Поступила в редакцию 30 июня 2006 г.