

## АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПЕРАЦИОННЫХ РАЗМЕРОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

*М.М. Тверской*

## THE ALGORITHM OF CALCULATION OF THE DIMENSIONS FOR MACHINING OPERATIONS OF SURFACE OF REVOLUTION

*M.M. Tverskoy*

Алгоритм расчета операционных размеров при многооперационной обработке поверхности вращения основан на составлении и решении векторной размерной цепи для каждой из операций, начиная с последней. Многозвенная векторная размерная цепь приводится к трехзвенной линейной размерной цепи, замыкающим звеном которой является припуск. Составляющими звеньями этой цепи являются радиусы поверхностей, получаемых на двух смежных переходах, и результирующий эксцентриситет между этими поверхностями. Радиус поверхности, получаемой на предшествующем переходе, неизвестен и подлежит расчету. Приводится алгоритм вычисления вероятностных числовых характеристик результирующего эксцентриситета и последующего расчета операционного размера. Расчет по описанному алгоритму продолжается до определения операционного размера заготовительной операции.

*Ключевые слова:* операционный размер, размерная цепь, эксцентриситет, припуск.

The algorithm of calculation of the dimensions for machining operations during multi-operational machining of surface of revolution is based on making-up and solving of vector dimensional chain for each operation starting with the last one. Multi-component vector dimensional chain is transformed to three-component linear dimensional chain, in which allowance performs as closed component. Partial components of this chain are radiuses of the surfaces, which were made during two neighboring operations, and the resulting eccentricity between these surfaces. The radius of the surface, which was made during previous operation, is unknown and has to be calculated. The algorithm of calculation of probabilistic numerical characteristics of the resulting eccentricity and the following calculation of the dimension for machining operation is shown. The calculations according to the algorithm described are going on until the dimensions for producing the metal bar are found.

*Keywords:* dimension for machining operation, dimensional chain, eccentricity, allowance.

В работе [1] изложена методика вероятностного расчета размерных цепей, содержащих звенья-эксцентриситеты. В качестве математической модели эксцентриситета принят двух- или трехмерный случайный вектор, алгебраические проекции которого на оси координат есть случайные величины, имеющие нормальное распределение (Гаусса) с нулевым математическим ожиданием и равными дисперсиями  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma^2$ . Величина  $\sigma$  в этом случае называется радиальным средним квадратическим отклонением (СКО).

Рассмотрим двухмерный случай (рис. 1). Производится окончательная обработка цилиндрической поверхности заданного радиуса  $r$ . Для расчета размера  $R$ , выдерживаемого на предшествующей операции (переходе) составляется векторная размерная цепь

$$\vec{Z} = \vec{R} - r - E_{\Delta}, \quad (1)$$

где  $\vec{Z}$  – вектор припуска, нормальный к поверхности, получаемой в результате обработки на рассматриваемом технологическом переходе;  $\vec{r}$  – радиус-вектор этой поверхности;  $\vec{R}$  – радиус-

вектор поверхности, получаемой на предыдущем переходе, он подлежит определению;  $\vec{E}_\Delta$  – вектор эксцентриситета поверхности с радиусом  $r$  относительно оси поверхности с радиусом  $R$ .

Вектор  $\vec{E}_\Delta$  есть разность векторов, имеющих начало в точке  $O$ , соответствующей оси исходной базовой поверхности:

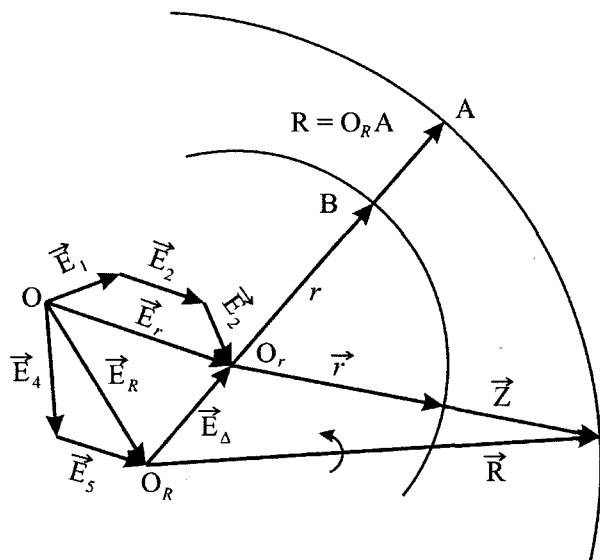


Рис. 1. Векторная размерная цепь

$$\vec{E}_\Delta = \vec{E}_r - \vec{E}_R. \quad (2)$$

Учитывая, что каждый из векторов  $\vec{E}_r$  и  $\vec{E}_R$  в общем случае есть векторная сумма нескольких слагаемых (см. рис. 1), выражение (2) запишем в следующем виде:

$$\vec{E}_\Delta = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 - \vec{E}_4 - \vec{E}_5. \quad (3)$$

Суммирование независимых случайных векторов  $\vec{E}_i$  в правой части выражения (3) производим, определяя числовые характеристики суммы их алгебраических проекций на оси прямоугольной системы координат. При этом в силу устойчивости закона нормального распределения [2] алгебраические проекции суммарного вектора  $\vec{E}_\Delta$ , рассматриваемые как случайные величины, будут иметь также нор-

мальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсиями, равными сумме дисперсий алгебраических проекций суммируемых векторов  $\vec{E}_i$ :

$$\sigma_\Delta^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad (4)$$

где  $\sigma_i$  – радиальные СКО суммируемых векторов;  $n$  – число суммируемых векторов в правой части (3);  $\sigma_\Delta$  – радиальное СКО суммарного вектора.

Поскольку суммируемые векторы  $\vec{E}_i$  имеют круговое нормальное распределение ( $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = \sigma_i$ ), то такое же распределение имеет и суммарный вектор  $\vec{E}_\Delta$ , у которого  $\sigma_{x_\Delta} = \sigma_{y_\Delta} = \sigma_\Delta$ .

В этом случае модуль вектора  $\vec{E}_\Delta$  распределен по закону Рэлея (или по закону Максвелла для трехмерного вектора).

Поле рассеивания скалярной случайной величины  $E_i = \left| \vec{E}_i \right|$ , подчиняющейся закону Рэлея, принимается равным

$$\omega_i \approx 2\sigma_{E_i} \sqrt{7}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{E_i}$  – СКО случайной величины  $E_i$ .

Величина СКО  $\sigma_{E_i}$  связана с радиальным СКО  $\sigma_i$  (СКО алгебраических проекций случайного вектора  $\vec{E}_i$ ) следующей зависимостью

$$\sigma_{E_i} = \sigma_i \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}. \quad (6)$$

Учитывая, что  $\omega_i = E_{i\max} - E_{i\min}$ , при  $E_{i\min} = 0$  получаем  $\omega_i = E_{i\max}$ .

Тогда из соотношений (5) и (6) получаем

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{E_i}}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}} = \frac{E_{i \max}}{2\sqrt{7\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}}. \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в выражение (4), получаем

$$\sigma_{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{7\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i \max}^2}. \quad (8)$$

Величина  $\sigma_{\Delta}$  является искомым (и единственным) параметром закона Рэлея, которому подчиняется распределение случайной величины  $E_{\Delta}$ .

Для нахождения СКО этой случайной величины вновь используем соотношение (6):

$$\sigma_{E_{\Delta}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i \max}^2} \approx 0,189 \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i \max}^2}. \quad (9)$$

Соотношение (9) позволяет вычислять СКО величины эксцентриситета ( $E_{\Delta}$ ) поверхности с радиусом  $r$  относительно оси поверхности с радиусом  $R$ , т. е. СКО модуля вектора  $\vec{E}_{\Delta}$ , входящего в уравнения (1) и (2). Исходными являются величины  $E_{i \max}$ , регламентируемые в конструкторской и технологической документации.

Находим математическое ожидание случайной величины  $E_{\Delta}$ , используя соотношения закона Рэлея:

$$m_{E_{\Delta}} \approx \sigma_{E_{\Delta}} \sqrt{\frac{\pi/2}{2 - \pi/2}} = \sigma_{E_{\Delta}} \sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \approx 1,913 \sigma_{E_{\Delta}}. \quad (10)$$

Возвратимся к рис. 1 и уравнению (1), из которых следует, что величина припуска (модуля вектора  $\vec{Z}$ ) различна в разных точках обрабатываемой поверхности с радиусом  $r$ . Направление вектора  $\vec{E}_{\Delta}$  определяет ту точку (В) на обрабатываемой поверхности, где припуск имеет минимальную величину. Это справедливо для любой реализации процесса обработки. Для указанного направления все векторы, входящие в уравнение (1), коллинеарны, поэтому это векторное уравнение вырождается в алгебраическое:

$$Z = R - r - E_{\Delta}. \quad (11)$$

Уравнение (11) – это уравнение линейной размерной цепи (рис. 2). Рассматривая все величины, входящие в это уравнение, как случайные, находим математическое ожидание замыкающего звена – припуска

$$m_Z = m_R - m_r - m_{E_{\Delta}}. \quad (12)$$

Среднее квадратическое отклонение величины припуска

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2 + \sigma_{E_{\Delta}}^2}, \quad (13)$$

где  $\sigma_R = \frac{1}{12} T_D$ ;  $\sigma_r = \frac{1}{12} T_d$ ;  $T_D, T_d$  – заданные допуски на диаметры соответствующих поверхностей.

Для определения математического ожидания  $m_R$  неизвестного составляющего звена  $R$  необходимо знать величину математического ожидания  $m_Z$  замыкающего звена – припуска  $Z$ . Однако регламентируемым значением этого звена является его минимальное значение  $Z_{\min}$  [1].

Случайная величина  $Z$  является суммой трех случайных величин, входящих в правую часть уравнения (11). Плотности распределения радиусов  $R$  и  $r$  описываются законом Гаусса, плотность распределения эксцентриситета  $E_{\Delta}$  – законом Рэлея. Разность радиусов ( $R - r$ ) распределена также по закону Гаусса [2], тогда закон распределения случайной величины  $Z$  есть композиция

## Технология

законов Гаусса и Рэлея. Вид кривой плотности распределения  $f(z)$  зависит [3] от величины отношения средних квадратических отклонений

$$l = \frac{\sigma_{E\Delta}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2}}. \quad (14)$$

При  $\sigma_{E\Delta} = 0$ , т. е. при  $E\Delta = \text{const}$  имеем композицию двух законов Гаусса, которая снова дает закон Гаусса со средним квадратическим отклонением

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2}. \quad (15)$$

С вероятностью 99,73 % минимальное значение припуска будет на расстоянии  $3\sigma_Z$  от его математического ожидания.

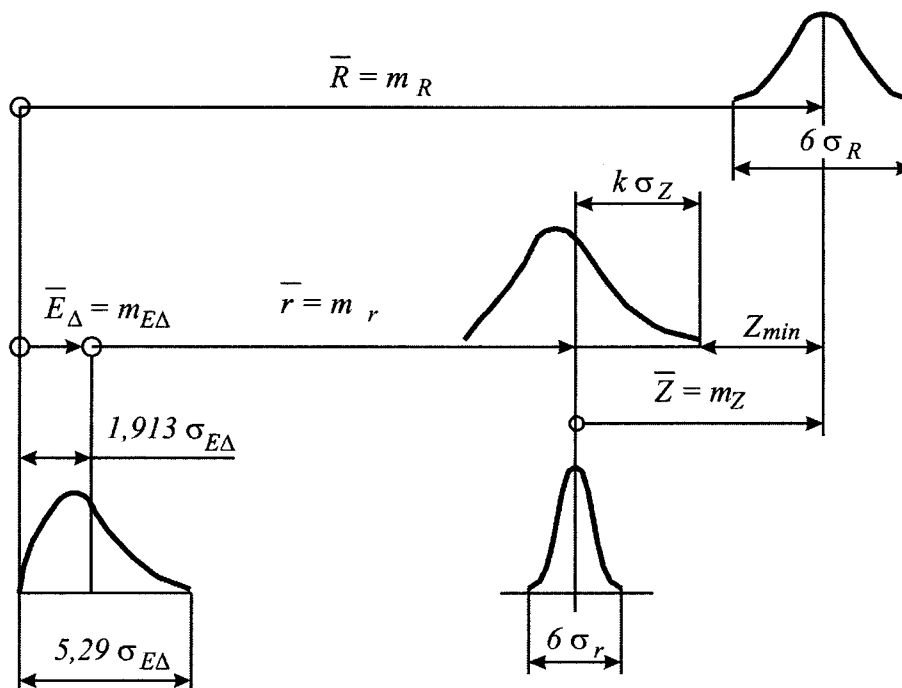


Рис. 2. Линейная размерная цепь

Если  $\sigma_R = \sigma_r = 0$ , т. е.  $R = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ , то распределение плотности замыкающего звена – припуска будет описываться законом Рэлея. Поле рассеивания припуска с вероятностью 99,76 % принимаем равным  $2\sigma_{E\Delta}\sqrt{7} \approx 5,2915\sigma_{E\Delta}$  (см. выражение (5)). Математическое ожидание припуска ка отстоит от минимального значения припуска на расстоянии

$$\alpha = 2\sigma_{E\Delta}\sqrt{7} - m_{E\Delta} = \sigma_{E\Delta} \left( 2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}} \right) = 3,378\sigma_{E\Delta} = 3,378\sigma_Z.$$

Таким образом, в общем случае (см. рис. 2)

$$m_z = Z_{\min} + k\sigma_z, \quad (16)$$

где  $k$  находится в интервале (3,0; 3,378).

При реальных (для рассматриваемых условий) значениях отношения  $l = (0...4)$  величина  $k$  изменяется от 3,0 до 3,25 [3]. Подставляя (16) в (12), получаем

$$m_R = m_r + m_{E\Delta} + Z_{\min} + k\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2 + \sigma_{E\Delta}^2}. \quad (17)$$

Для определения величины  $k$  может быть использована линейная аппроксимация

$$k = 3 + 0,06 l, \quad (18)$$

где  $l$  определяется отношением (14).

После вычисления по формулам (17), (18) значения математического ожидания  $m_R$  искомого радиуса  $R$  находим предельные значения операционного размера

$$\varnothing D_{\min}^{\max} = 2m_r \pm \frac{1}{2}T_D. \quad (19)$$

Рассмотрим пример. На чертеже детали задан размер  $\varnothing 40 \pm 0,06$ , что соответствует  $r = 20 \pm 0,03$ ;  $m_r = 20$ ;  $T_d = 0,12$ ;  $\sigma_r = 0,01$ . В технологической карте заданы отклонения  $\pm 0,12$  на операционный размер  $\varnothing D$ . Тогда  $T_D = 0,24$ ;  $\sigma_R = 0,02$ . Расчетное значение [1] минимального припуска  $Z_{\min} = 0,2$ . Величины допускаемых эксцентриситетов:  $E_{1\max} = 0,2$ ;  $E_{2\max} = 0,15$ ;  $E_{3\max} = 0,1$ ;  $E_{4\max} = 0,2$ ;  $E_{5\max} = 0,15$  (см. рис. 1). По формуле (9) вычисляем СКО суммарного эксцентриситета

$$\sigma_{E\Delta} = 0,189\sqrt{0,2^2 + 0,15^2 + 0,1^2 + 0,2^2 + 0,15^2} \approx 0,069443.$$

По формуле (10) подсчитываем математическое ожидание суммарного эксцентриситета.

$$m_{E\Delta} = 0,069443\sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \approx 0,1328.$$

По формуле (13) находим СКО припуска

$$\sigma_z = \sqrt{0,02^2 + 0,01^2 + 0,069443^2} \approx 0,07295.$$

По формуле (14) находим отношение СКО:

$$l = \frac{0,069443}{\sqrt{0,02^2 + 0,01^2}} \approx 3,1.$$

По формуле (18) находим

$$k = 3 + 0,06 \times 3,1 = 3,186;$$

$$k\sigma_z = 0,2324.$$

По формуле (17) рассчитываем математическое ожидание

$$m_R = 20 + 0,1328 + 0,2 + 0,2324 \approx 20,5652.$$

По формуле (19) получаем операционный размер

$$\varnothing 41,1304 \pm 0,12.$$

Полученный размер округляем в большую сторону до того знака после запятой, который имеют отклонения, и окончательно получаем

$$D = \varnothing 41,14 \pm 0,012.$$

Если поверхность с радиусом  $r$  обрабатывается за несколько операций (переходов), то полученный размер  $D$  является исходным при расчете операционного размера для предшествующей операции (перехода). Расчет по изложенному выше алгоритму продолжается до получения операционного размера для заготовительной операции (например, штамповки).

Если обрабатываемая поверхность вращения является внутренней (отверстием), то алгоритм расчета операционных размеров остается прежним, но в размерной цепи (11) известным является звено  $R$ , а определяемым – звено  $r$ .

### Литература

1. Тверской, М.М. Расчет размерных цепей со звеньями-эксцентриситетами / М.М. Тверской // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2005. – Вып. 6. – № 1 (41). – С. 168–180.
2. Венцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. Точность производства в машиностроении и приборостроении / под ред. А.Н. Гаврилова. – М.: Машиностроение, 1973. – 567 с.

Поступила в редакцию 22 февраля 2011 г.

**Тверской Михаил Михайлович.** Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Автоматизация механосборочного производства», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск). Область научных интересов – технология и автоматизация машиностроения. Тел.: (351) 267-92-12.

**Mikhail M. Tverskoy.** The Doctor of engineering science, the head of “Mechano-Assembly Automation” department of South Ural State University, Chelyabinsk, Russia. Professional interests: technology and automation of engineering industry. Tel.: (351) 267-92-12.