УДК512.54

КОНЕЧНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ И МАЛЫМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ НЕЦЕНТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ИЛ. Тюрина

Получено описание конечных неразрешимых групп с нетривиальным центром, удовлетворяющих условию: порядки централизаторов нецентральных элементов группы в своем представлении в виде произведения простых чисел имеют не более пяти сомножителей.

1. Введение и основные допущения. Через $w(n)$ условимся обозначать количество множителей в представлении натурального числа n в виде произведения простых чисел. Если H – подгруппа конечной группы G, то $w(H)=w(|H|)$ и

$$v(G)=\max\{w(C(g))\,|\,g\in G\setminus Z(G)\}. \tag{1}$$

В работах [1] и [2] исследованы конечные неабелевы группы с условием $v(G)=2$ и $v(G)=3$ соответственно. В [3, 4] описаны конечные группы с условием $v(G)=4$, а в работах [5] и [6] изучены неразрешимые группы без центра с условием $v(G)=5$. В предлагаемой работе исследуется строение неразрешимых групп с нетривиальным центром и с условием $v(G)=5$.

Если p – нечетное простое число, то положим

$$l(p^n)=\begin{cases}\max\left\{w(p^n-1),\, w\left(\dfrac{p^n+1}{2}\right)\right\}, & \text{если } p^n\equiv 1(4),\\[2ex] \max\left\{w(p^n+1),\, w\left(\dfrac{p^n-1}{2}\right)\right\}, & \text{если } p^n\equiv -1(4).\end{cases} \tag{2}$$

Кроме того, положим

$$l^*(p^n)=\max\{w(p^n-1),w(p^n+1)\}. \tag{3}$$

Через E_{p^n} условимся обозначать элементарную абелеву группу порядка p^n. В дальнейшем p – всегда нечетное простое число.

Пусть G – неразрешимая группа, $v(G)=5$ и $Z(G)\neq 1$. Предположим, что $Z_2(G)>Z(G)$. Если $x\in Z_2(G)\setminus Z(G)$ и $\varphi: g\to[g,x]$, то $\mathrm{Ker}(\varphi)=C(x)$ и $G/C(x)$ – абелева группа. Но тогда подгруппа $C(x)$ неразрешима. Так как $C^2(x)=C(C(x))$ – абелева группа, то фактор-группа $H=C(x)/C^2(x)$ неразрешима. Из условий $w(C(x))\leq 5$ и $w(C^2(x))\geq 2$ следует, что $w(H)\leq 3$, что противоречит неразрешимости группы H. Поэтому $Z_2(G)=Z(G)$ и $G/Z(G)$ – группа без центра. Отметим еще, что $v(G/Z(G))\leq v(G)$. Это следует из того, что

$$|C_{G/Z(G)}(xZ(G))|=\frac{|C(x)|\cdot|Z(G)\cap\{[x,g]|g\in G\}|}{|Z(G)|}. \tag{4}$$

В самом деле, пусть $H/Z(G)=C_{G/Z(G)}(xZ(G))$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: H \to Z(G)$, заданный формулой $h^{\varphi}=[h,x]$. Тогда $\mathrm{Ker}(\varphi)=C(x)$ и $\mathrm{Im}\,\varphi=\{[x,h] \| h\in H\}=$ $=\{[x,g] \| g\in G\}\cap Z(G)$. Поэтому $|H|=|C(x)|\cdot|Z(G)\cap\{[x,g] \| g\in G\}|$.

Из работ [1–6] следует, что неразрешимые конечные группы без центра с условием $v(G)=n\le 5$ исчерпываются группами следующих типов.

A. Простые группы.

1) $n=2$: $PSL(2,5)$;

2) $n=3$: $PSL(2,q)$, $q\in\{2^3,3^2,3^3,5^3,p\}$, где $l(p)=3$;

3) $n=4$: A_7; $PSL(2,q)$, $q\in\{2^4,5^2,7^3,p\}$, где $l(p)=4$;

4) $n=5$: M_{11}; J_1; $PSL(3,3)$; $PSL(2,q)$, $q\in\{3^4,7^2,11^2,13^2,p\}$, где $l(p)=5$; $PSL(2,p^3)$, где $l(p^3)=5$; $PSL(2,p^5)$, где $p=2$ или $l(p^5)\le 5$.

B. Группы автоморфизмов простых групп.

1) $n=3$: $PGL(2,5)$;

2) $n=4$: $PGL(2,q)$, $q\in\{3^2,3^3,p\}$, где $l^*(p)=3$; $PSL(2,q)\lambda\langle\tau\rangle$, $q\in\{2^3,3^3\}$, τ – полевой автоморфизм порядка 3; $PSL(2,3^2)\cdot\langle t\rangle$, где t – произведение полевого и диагонального автоморфизмов;

3) $n=5$: $PGL(2,q)$, $q\in\{5^2,5^3,7^3,p\}$, где $l^*(p)=4$; $PSL(2,q)\lambda\langle\tau\rangle$, $q\in\{2^4,3^2\}$, τ – полевой автоморфизм порядка 2; $PSL(2,5^2)\cdot\langle t\rangle$, где t – произведение полевого и диагонального автоморфизмов; $\mathrm{Aut}(PSL(2,q))$, $q\in\{3^2,3^3\}$.

C. Расширения группы A_5.

$n=5$: $A_5\times H$, H – неабелева группа порядка pq; $(A_5\times\langle a\rangle)\cdot\langle\tau\rangle$, где $A_5\cdot\langle\tau\rangle\cong S_5$, $|a|=p$, τ инвертирует a.

D. Расширения абелевых групп.

1) $n=4$: $E_{p^3}\lambda PSL(2,5)$, $p\equiv\pm1(10)$; $G/E_{5^3}\cong PSL(2,5)$;

2) $n=5$: $H\lambda SL(2,5)$ – группа Фробениуса и $2\le w(H)\le 5$; $E_{5^2}\lambda SL(2,5)$; $(E_{5^2}\times E_{p^2})\lambda SL(2,5)$, $E_{p^2}\lambda SL(2,5)$ – группа Фробениуса; $(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\lambda SL(2,5)$, $|a|=|b|=25$; две группы типа $E_{5^4}\lambda SL(2,5)$; две группы типа $E_{p^4}\lambda SL(2,5)$, $p\ne5$; $E_{p^3}\lambda(\langle a\rangle\times PSL(2,5))$, $p\equiv\pm1(10)$, $p\equiv1(3)$, $|a|=3$, $E_{p^3}\lambda\langle a\rangle$ – группа Фробениуса; $E_{p^3}\lambda PSL(2,7)$, $p^3\equiv1(7)$; $G/E_{5^3}\cong PGL(2,5)$.

В пункте *D* действие соответствующих групп на абелевой группе определено в работах [5–7].

2. Основная теорема. Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть G – конечная неразрешимая группа с нетривиальным центром. Если $v(G)=5$, то G – одна из следующих групп:*

1) $G=H\times Z(G)$, H – группа одного из типов A.1) – A.3) или D.1), $w(Z(G))=5-v(H)$;

2) $G/Z(G)$ *– группа одного из типов B.1) или B.2),* $G'\cap Z(G)=1$ *и* $w(Z(G))=5-v(G/Z(G))$;

3) $G=H\cdot Z(G)$, $H\cong SL(2,q)$ *и* $w(Z(G))=4$, *если* $q=5$; $w(Z(G))=3$, *если* $q=p$, $l^*(p)=3$; $w(Z(G))=2$, *если* $q\in\{3^3,5^2,5^3,7^3,p\}$, *где* $l^*(p)=4$; $w(Z(G))=1$, *т.е.* $G\cong SL(2,q)$, *если* $q\in\{3^4,7^2,11^2,13^2,p_1,p_2^3\}$, *где* p_1,p_2 *– нечетные простые числа,* $l^*(p_1)=5$ *и* $l^*(p_2^3)=5$;

4) $G\cong A_7^*/\langle k^n\rangle$, *где* A_7^* *–универсальная накрывающая группы* A_7, $\langle k\rangle$ *– мультипликатор Шура группы* A_7, *а* $n\in\{2,3,6\}$;

5) $G=H\cdot Z(G)$, *где либо* $H\cong PSL(2,9)^*$ *или* $SL(2,9)$ *и* $w(Z(G))=3$, *либо* $H\cong PSL(2,9)^*/\langle k^2\rangle$ *или* $w(Z(G))=2$;

6) $G/Z(G)\cong PGL(2,q)$ *и* $G'\cong SL(2,q)$, *при этом* $w(Z(G))=1$, *если* $q\in\{5^2,7^3,p\}$, *где* $l^*(p)=4$; $w(Z(G))=2$, *если* $q\in\{3^3,5^3,p\}$, *где* $l^*(p)=3$; $w(Z(G))=3$, *если* $q=5$;

7) $G/Z(G)\cong PGL(2,9)$ *и при этом либо* $G'\cong SL(2,9)$ *или* $PSL(2,9)^*$ *и* $w(Z(G))=2$, *либо* $G'\cong PSL(2,9)^*/\langle k^2\rangle$ *и* $w(Z(G))=1$;

8) $G\cong SL(2,q)\lambda\langle\tau\rangle$, $q\in\{3^2,3^3\}$, τ *– нетривиальный полевой автоморфизм;*

9) $G/Z(G)\cong PSL(2,q)\cdot\langle t\rangle$, $q\in\{3^2,5^3\}$, t *– произведение полевого и диагонального автоморфизмов, и если* $q=5^2$, *то* $G'\cong SL(2,5^2)$ *и* $w(Z(G))=1$, *а если* $q=3^2$, *то* $G'\cong PSL(2,9)^*/\langle k^n\rangle$, *где* $k\in\{2,3,6\}$ *и* $w(Z(G))=2$;

10) $G\cong E_{p^3}\lambda SL(2,5)$, $p\equiv\pm1(10)$ *и* $C(E_{p^3})=E_{p^3}\lambda\langle\tau\rangle$, *где* τ *– инволюция из* $SL(2,5)$.

Доказательство. Если $Z(G)\cap G'=1$, то

$$C_{G/Z(G)}(xZ(G))=C(x)/Z(G) \qquad (5)$$

для любого $x\in G$, т.е. $v(G)=v(G/Z(G))+w(Z(G))$. Поэтому фактор-группа $G/Z(G)$ в этом случае изоморфна одной из групп *A.1) – A.3), B.1), B.2)* или *D.1)* и $w(Z(G))=5-v(G/Z(G))$. Если при этом $G/Z(G)$ совпадает со своим коммутантом, т.е. является группой типа A.1) – A.3) или D.1), то из равенства $G=G'\cdot Z(G)$ следует, что $G=G'\times Z(G)$. Таким образом, в случае $Z(G)\cap G'=1$ группа G является группой типа 1) или 2) из условия теоремы.

Предположим теперь, что $Z(G)\cap G'\neq 1$, и пусть $G/Z(G)$ – группа одного из типов A.1) – A.4). Тогда $G=G'\cdot Z(G)$ и G' является накрывающей для группы $G/Z(G)$. Случаи $G/Z(G)\cong M_{11}$, J_1, $PSL(3,3)$ или $PSL(2,2^n)$ при $n>2$ невозможны, так как в этих случаях мультипликатор Шура группы $G/Z(G)$ тривиален.

Пусть $G/Z(G)\cong PSL(2,q)$, $q=p^n$ нечетно и отлично от 9. Тогда $G'\cong SL(2,q)$. В этом случае (см., например, доказательство теоремы 5.9 из [8]) централизатор любого нецентрального элемента x в группе G абелев и

$$|C(x)/Z(G)|\in\left\{q,\frac{q-1}{2},\frac{q+1}{2}\right\}. \qquad (6)$$

Поэтому $G=SL(2,q)\cdot Z(G)$. И из равенств

$$\nu(SL(2,q))=\max\{l^*(q),w(q)+1\} \text{ и } \nu(G)=\nu(SL(2,q))+w(Z(G))-1 \quad (7)$$

следует, что $G-$ группа типа 3) из условия теоремы.

Предположим теперь, что $G/Z(G)\cong A_7$. Группа A_7 имеет три накрывающие с центрами порядков 2, 3, и 6, соответственно. Заметим, что элемент простого порядка r из $Z(G)\cap G'$ увеличивает на единицу значение $w(C(x))$ для r'-элемента x из A_7 и не меняет $w(C(x))$ для элемента x порядка r. Так как в группе A_7 для элементов порядка 2 и 3 выполняется равенство $w(C(x))=4$, то в любом случае $\nu(G')=5$, т.е. $G=G'\cong A_7^*/\langle k^n\rangle$, где $\langle k\rangle-$ мультипликатор Шура группы A_7 и $n\in\{2,3,6\}$, т.е. $G-$ группа типа 4 из условия теоремы.

Пусть $G/Z(G)\cong PSL(2,9)$. Мультипликатор Шура группы $PSL(2,9)$ тоже является циклической группой порядка 6. Так как в группе $PSL(2,9)$ для элемента x порядка 3 выполняется равенство $w(C(x))=2$, а для элемента x порядка 2 – равенство $w(C(x))=3$, то $\nu(G')=4$ в случае $G'\cong PSL(2,9)^*$ или $PSL(2,9)^*/\langle k^3\rangle$, где $\langle k\rangle-$ мультипликатор Шура группы $PSL(2,9)$, и $\nu(G')=3$ в случае $G'\cong PSL(2,9)^*/\langle k^2\rangle$, т.е. в этом случае $G-$ группа типа 5 из условия теоремы.

Пусть теперь $G/Z(G)\cong PGL(2,q)$. Тогда $G'\cdot Z(G)/Z(G)\cong PSL(2,q)$. Положим $G'\cdot Z(G)=H$. Тогда $H'\cdot Z(G)=H$ и $H/H'-$ центральная подгруппа порядка 2 из G/H'. Поэтому $G/H'-$ абелева группа, т.е. $H'=G'$. Но тогда $G''=H''=H'=G'$. Отсюда $G'\cap Z(G)=G''\cap Z(G')$ и, следовательно, G' является накрывающей для группы $G'/(G'\cap Z(G))\cong PSL(2,q)$.

Если $q\neq 9$, то снова $G'\cong SL(2,q)$. В этом случае (см. доказательство теоремы 5.9 из [8]) централизаторы нецентральных элементов в группе G исчерпываются подгруппами порядков $q\cdot|Z(G)|$ и $(q\pm1)\cdot|Z(G)|$, т.е. мы получаем группы типа 6) из условия теоремы.

Предположим, что $q=9$. Тогда $G'\cong PSL(2,9)^*/\langle k^n\rangle$, где $n\in\{2,3,6\}$. Если $n=3$, т.е. $G'\cong SL(2,9)$, то из $l^*(9)=3$ следует, что $w(Z(G))=2$. А если $G'\cong PSL(2,9)^*$ или $PSL(2,9)^*/\langle k^2\rangle$ и $\bar{\tau}-$ центральная инволюция из $G/Z(G)$, то из условия $|C_{G/Z(G)}(\tau Z(G))|=16$ следует, что порядок силовской 2-подгруппы S из $C(\tau)$ равен 16. Так как $C(\tau)=S\cdot Z(G)$ и $|Z(G)\cap G'|$ равен 6 или 3, то

$$|C(\tau)|=48\cdot|Z(G)/(Z(G)\cap G')|. \quad (8)$$

Поэтому из $w(48)=5$ следует, что $Z(G)\leq G'$ и, следовательно, $w(Z(G))=2$ в первом случае и $w(Z(G))=1$ во втором случае, т.е. $G-$ группа типа 7 из условия теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $G/Z(G)\cong PSL(2,q)\lambda\langle\tau\rangle$. В этом случае снова $G'-$ эпиморфный образ $PSL(2,q)^*$. И из равенства $PSL(2,2^n)^*=PSL(2,2^n)$ при $n>2$ следует, что $q=3^2$ или 3^3. Если $q=3^3$, то из $C(\tau)\geq\langle\tau\rangle\times SL(2,3)$ и условия $\nu(G)=5$ следует, что $w(Z(G))=1$, т.е. $G\cong SL(2,3^3)\lambda\langle\tau\rangle$. В случае и $q=9$ и $G'\cong SL(2,9)$ аналогично получим

$G \cong SL(2,9)\lambda\langle\tau\rangle$. А если $G' \cong PSL(2,9)^*$ или $PSL(2,9)^*/\langle k^2\rangle$, то из $C_{PSL(2,9)}(\tau) \cong PGL(2,3)$ получим $\nu(G) > 5$.

Пусть $G/Z(G) \cong PSL(2,q)\langle t\rangle$, где $t-$ произведение полевого и диагонального автоморфизмов. В этом случае силовская 2-подгруппа группы $G/Z(G)$ диэдральна. Как и выше, $G'-$эпиморфный образ группы. В случае $q = 5^2$ для центральной инволюции $\bar{i} \in G/Z(G)$ выполняется равенство $|C(i)| = 24\cdot|Z(G)|$, т.е. в этом случае $w(Z(G)) = 1$. Если же $q = 9$, то $|C(i)| = 8\cdot|Z(G)|$ и, следовательно, $w(Z(G)) = 2$.

Пусть $G/Z(G) \cong \overline{A_5} \times \bar{H}$, $|\bar{H}| = pq$. Если $\bar{a}-$ элемент порядка 3 из $\bar{H}$, $g-$ элемент порядка q из A_5 и $z = [a,g]$, то из $z^p = [a^p, g] = 1 = [a, g^q] = z^q$ следует, что либо $z = 1$, либо $q = p$. Во втором случае элемент a перестановочен с силовской 2-подгруппой из T, где $\bar{T} = \overline{A_5} \times \langle\bar{a}\rangle$, а следовательно и с подгруппой, порожденной этими силовскими 2-подгруппами. Но тогда $\overline{C(a)} = \bar{T}\langle\bar{a}\rangle$ и $w(C(a)) > 5$, т.е. этот случай невозможен. В случае $G/Z(G) = (\bar{H} \times \langle\bar{a}\rangle)\langle\bar{\tau}\rangle$, где $\bar{H} \cong A_5$, аналогично получим $\overline{C(a)} = \bar{H} \times \langle\bar{a}\rangle$, что невозможно.

Пусть $G/Z(G)-$расширение группы E_{p^3}, где $p = 5$ или $p \equiv \pm 1(10)$, с помощью $PSL(2,5)$. Как показано при доказательстве теоремы 1.2 из [3], в этом случае можно считать, что $E_{p^3} = \langle\overline{a_1}\rangle \times \langle\overline{a_2}\rangle \times \langle\overline{a_3}\rangle$, и для силовской 2-подгруппы $\langle\overline{\tau_1}\rangle \times \langle\overline{\tau_2}\rangle$ из $PSL(2,5)$ выполняются равенства $\overline{a_i}^{\overline{\tau_i}} = \overline{a_i}$ и $\overline{a_i}^{\overline{\tau_j}} = \overline{a_i}^{-1}$ при $i \neq j$, где $i,j = 1,2,3$ и $\overline{\tau_3} = \overline{\tau_1}\cdot\overline{\tau_2}$. Но тогда из $[a_i, a_j] \in Z(G)$ следует, что

$$[a_i, a_j] = [a_i, a_j]^{\tau_i} = [a_i, a_j^{-1}]. \qquad (9)$$

Поэтому $[a_i, a_j] = 1$, т.е. $(|G' \cap Z(G)|, p) = 1$. Это означает, что $|G' \cap Z(G)| = 2$ и $G-$ расширение E_{p^3} с помощью $SL(2,5)$, причем инволюция из $SL(2,5)$ действует на E_{p^3} тривиально, т.е. $G-$ группа типа 10) из условия теоремы.

Если $G/Z(G) \cong A\lambda SL(2,5)-$группа типа *D.2)*, то из $SL(2,5)^* = SL(2,5)$ следует, что порядок $|G' \cap Z(G)|$ нечетен. Но тогда если $\bar{\tau}-$ инволюция из $SL(2,5)$, то $w(C(\tau)) > 5$, т.е. этот случай невозможен. Аналогично в случае $G/Z(G) \cong E_{p^3}\lambda(\langle\bar{a}\rangle \times PSL(2,5))$ получим $w(C(a)) > 5$.

Предположим теперь, что $G/Z(G) \cong E_{p^3}\lambda PSL(2,7)$. Из леммы 6.5 работы [7] следует, что в некотором базисе $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}\}$ группы E_{p^3} элемент $\bar{x}$ порядка 4 из $PSL(2,7)$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -r & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & r+\frac{1}{2} & -r-\frac{1}{2} \\ r & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где r – решение уравнения $2r^2 + r + 1 = 0$ в поле $GF(p)$. Но тогда $C_{G/Z(G)}(\bar{x}) = \langle\bar{x}\rangle \times \langle\overline{a_1}^r\overline{a_2}^r\overline{a_3}\rangle$. Положим $\bar{b} = \overline{a_1}^r\overline{a_2}^r\overline{a_3}$. Так как $w(C_{G/Z(G)}(\bar{b})) = 5$ и $w(C(b)) \leq 5$, то

$G'\cap Z(G)=\langle z\rangle$ – подгруппа порядка p и $z=[b,c]$ для некоторого элемента $\bar{c}\in E_{p^3}$. Но тогда, если P – силовская p-подгруппа группы G, то $[P,x]\leq C(b)$. И из $P=[P,x]\cdot C_P(x)$ и $C_P(x)=\langle b,z\rangle$ следует, что $P\leq C(b)$, что невозможно.

Случай $G/E_{5^3}\cong PGL(2,5)$ аналогично приводится к противоречию. В этом случае из леммы 6.3. работы [7] следует, что в некотором базисе $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}\}$ группы E_{5^3} элемент $\bar{x}$ порядка 4 из $PGL(2,5)$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

т.е. $C^{*}_{G/Z(G)}(\bar{x})=\langle\bar{x}\rangle\times\langle\overline{a_1}^{2}\overline{a_3}\rangle$. Теорема доказана.

Литература

1. Bianchi, M. Groups with small eentralizers of non-central elements / M. Bianchi, O. Manz // Boll. Un. Mat. Ital. (7). - 1990. - V. 4-A. - C 365-370.

2. Scarcelli, A. Grappi con piccoli centralizzanti / A. Scarcelli // Boll. Un. Mat. Ital. (7). - 1992. - V.6-B.- C 649-663.

3. Антонов, В.А. Группы с малыми централизаторами / В.А. Антонов, И.А. Тюрина, А.П. Ческидов // Мат.заметки. - 2001. - Т. 69 - № 5. - С. 643-65 5.

4. Антонов, В.А. О конечных группах с ограничениями на централизаторы / В.А. Антонов, И.А. Тюрина, А.П. Ческидов // Матламетки. - 2002. - Т. 71 - № 4. - С. 483-495.

5. Антонов, В.А. О конечных группах с малыми централизаторами элементов / В.А. Антонов, В.И. Зенков, И.А. Тюрина // Алгебра и лин. оптимиз.: Труды междун. сем. памяти С.Н. Черникова. - Екатеринбург, 2002. - С. 44-46.

6. Антонов, В.А. О группах с малыми централизаторами, 2 / В.А. Антонов, В.И. Зенков, И.А. Тюрина // Междун. конф. «Алгебра и ее приложения»: Тез. докл. - Красноярск, 2002. - С. 5-7.

7. Bloom, D.M. The subgroups of *PSL(3,q)* for odd *q I* D.M. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. - 1967.-V. 127.- C 150-178.

8. Schmidt, R. Zentralizatorferbande endlicher Gruppen / R. Schmidt // Rend. Sem. Math. Univ. Padova.- 1970.-V. 44.-C. 97-131.

Поступила в редакцию 7 августа 2006 г.