

## МЕТОД РАСЧЁТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА И СИСТЕМЫ «КОРПУС – КРЫЛО»

Э.А. Старцев

## ANALYSIS OF AERODYNAMIC DATA OF A WING AND A SYSTEM «WING – BODY»

E.A. Startsev

Основным методом определения аэродинамических характеристик крыла при дозвуковой скорости является непосредственное решение интегро-дифференциального уравнения крыла. Для решения задачи предлагается использовать приближённый метод расчёта, полученный в результате радикальной переработки этого способа. Результаты сравниваются с некоторыми известными решениями.

*Ключевые слова:* крыло, несущая линия, циркуляция, угол атаки, индуктивное сопротивление.

The direct solving of a wing integrodifferential equation is the main traditional method to define aerodynamic data at the subsonic speed. Current article suggests an approximate method of solution to the given problem, based on radical transformation of the existent method. The results obtained are compared with some known solutions.

*Keywords:* wing, carrier line, circulation, angle of attack, inductive resistance.

Обозначения, используемые в статье:

$V_0$  – скорость набегающего потока;

$\Delta L_i$  – длина  $i$ -го отсека крыла;

$B_i$  – хорда крыла в  $i$ -м сечении;

$\lambda$  – геометрическое удлинение крыла;

$\alpha$  – угол атаки центрального сечения крыла, град;

$\Delta\alpha_{\text{крут}}$  – угол крутки данного сечения крыла относительно центрального;

$\Delta\alpha_{\text{уст}}$  – угол установки консоли крыла к оси корпуса;

$\alpha_0$  – угол атаки в  $i$ -м сечении, соответствующий условию  $C_{y_i} = 0$ ;

$Z_i$  – боковая координата  $i$ -го сечения крыла;

$Z^*(j)$  – координата свободного вихря, сходящего с  $j$ -го отсека;

$C_y^{\alpha_i}$  – производная от коэффициента подъёмной силы по углу атаки в  $i$ -м сечении крыла,

на 1 градус;

$\Gamma_i$  – значение циркуляции в  $i$ -м сечении крыла;

$Gz(I)$  – производная,  $d\Gamma/dz$  на  $I$ -м отсеке крыла;

$R, D_{\text{корп}}$  – радиус и диаметр кругового цилиндрического корпуса;

$\alpha_{\text{корп}}, FI$  – углы натекания потока на корпус (т. е. углы атаки корпуса);

$Z^*(js)$  – координата  $j$ -го сопряжённого вихря;

$\Delta R(i, js)$  – модуль расстояния между  $i$ -м сечением и вихрем  $js$ ;

$L_{\text{лев. (прав.)}}$  – полуразмах левой и правой частей крыла, от оси корпуса;

$B_{\text{борт. лев. (прав.)}}$  – бортовые хорды консолей в пересечении с корпусом;

$Y_{\text{конс. лев. (прав.)}}$  – высота установки консолей крыла, от оси корпуса.

### Типовой расчёт характеристик изолированного крыла конечного удлинения

Для определения аэродинамических характеристик конкретного крыла используются следующие методы:

– упрощенный расчёт несущей способности и индуктивного сопротивления по готовым формулам, полученным Прандтлем в предположении близости распределения циркуляции по размаху к эллиптическому крылу;

– полный расчёт крыла с использованием интегродифференциального уравнения Прандтля относительно неизвестной циркуляции. При построении этого метода использованы существенные упрощения (применена модель несущей линии, предполагается, что крыло достаточно близко к прямому, а удлинение крыла не менее 3–4, и т. д.), но тем не менее во многих случаях этот метод даёт очень хорошие результаты. Единственным недостатком его являлась чрезвычайная громоздкость самого метода решения уравнения, наиболее известный из которых метод Глауэрта [1] заключается в представлении искомой циркуляции в виде тригонометрических рядов и в поиске коэффициентов этих рядов, удовлетворяющих граничным условиям. К этому следует добавить, что при расчёте крыльев произвольной формы в плане информация о форме должна быть включена в процедуру расчёта. Для этого аэродинамики, развивавшие метод Глауэрта, например Карафоли [2], использовали представление уравнения обвода крыла, в свою очередь, в виде суммы некоторого числа членов нового тригонометрического ряда, поиск которых при требовании достаточно точного описания формы представлял самостоятельную задачу.

Наконец, при наличии конструктивной или аэродинамической крутки крыла, а также при исследовании работы элеронов, влияния упругой крутильной деформации и других задач неизбежно порождаются новые тригонометрические ряды.

Всё это приводит к тому, что даже при максимальном упрощении основного представления, при использовании лишь трёх-четырёх гармоник метод расчёта остаётся чрезвычайно громоздким и, насколько нам известно, фактически не используется в практике инженерных расчётов.

### Видоизменение расчёта характеристик крыла

В данной статье предлагается изменение подхода к решению интегродифференциального уравнения, кардинально упрощающее всю процедуру расчёта. Суть изменения заключается в отказе от требования описания распределения циркуляции в виде гладкой кривой и в замене искомого распределения кусочно-линейным контуром в соответствии с выбранным разбиением размаха крыла на участки. Общая же идеология метода Прандтля остаётся при этом без изменений: считается, что любое из сечений крыла «работает» в условиях своего невозмущённого (с учётом местного склона) потока, и что напряжённость вихревой пелены, сходящей с данного участка крыла, определяется местной производной  $d\Gamma/dz$ .

Особенности предлагаемого подхода иллюстрируются графиком (рис. 1).

Теперь, ввиду приближённости расчёта, заменяем интегрирование по размаху крыла суммированием по дискретным элементам крыла и далее, как и в обычных случаях расчёта, проводится решение системы алгебраических уравнений, число которых определяется количеством сечений размаха.

При этом основной вопрос заключается в следующем: если мы заменим приходящуюся на каждый из участков зону вихревой пелены «равнодействующим» сосредоточенным вихрём, каковы тогда будут характеристики этого вихря? Ответ почти очевиден: интенсивность вихря будет равна сумме интенсивностей элементарных вихрей, а «точка приложения» вихря (координата его центра по оси  $Z$ ) будет в середине соответствующего участка, так как такой вихрь должен индуцировать равные по модулю скорости на левой и правой границах участка.

Можно показать, что в случае, если распределение циркуляции на нескольких участках аппроксимируется отрезком синусоиды (с теми же значениями в узлах), такая схема даёт правильный результат, причём он тем точнее, чем на большее число участков (отсеков) разбит размах крыла.

Итак, перечислим характерные моменты предлагаемого метода:

– как и в обычных решениях, аэродинамические характеристики профилей считаются известными и включаются в расчёт через уравнение связи;

– ввиду принятого линейного распределения циркуляции по длине каждого отсека интенсивность элементарных свободных вихрей оказывается распределённой по отсеку равномерно, и

поэтому при вычислении индуцированной вихрями скорости в каком-либо сечении можно заменить соответствующий интеграл влиянием «равнодействующего» на каждом отрезке вихря, считая его расположенным в центре отрезка;

– на отрезке с номером  $i$  производную от циркуляции обозначим

$d\Gamma/dz/i = X_i$  и будем считать значения  $X_i$  разыскиваемыми неизвестными, причём число неизвестных равно количеству отрезков;

– в сечении с номером  $K$  циркуляция записывается

$\Gamma_K = \sum X_i \cdot \Delta L_i$ , где  $i$  меняется от 1 до  $K$ ;  $\Delta L$  – длина  $i$ -го отрезка;

– составляя алгебраические уравнения, эквивалентные интегральному, для всех сечений крыла, кроме концевых, получаем  $N - 1$  уравнение; последнее уравнение, замыкающее систему, записываем (исходя из постулированного условия  $\Gamma = 0$  на концах крыла) в виде

$$X_1 \cdot \Delta L_1 + X_2 \cdot \Delta L_2 + \dots + X_N \cdot \Delta L_N = 0;$$

– ввиду линейности интегрального уравнения мы получим систему из  $N$  линейных алгебраических уравнений, решить которую нетрудно даже при относительно большом числе неизвестных (т. е. участков разбиения).

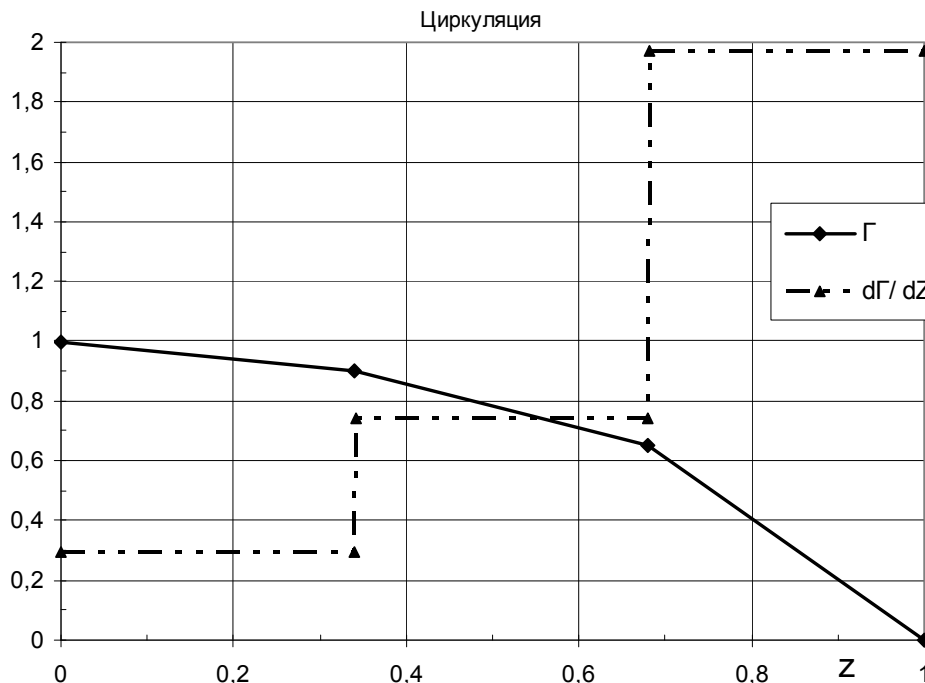


Рис. 1

Ввиду существенной неравномерности кривизны эпюры циркуляции (либо при наличии местных особенностей на крыле) может возникнуть необходимость в уменьшении длины соответствующих отрезков.

Дополнительно отметим, что метод решения был построен для расчёта несимметричного в общем случае течения (или крыла) и поэтому включал расчёт всего крыла. Расчёт симметричного обтекания позволяет сократить вдвое число уравнений.

Таким образом, основная идея метода решения заключается в том, что при достаточно малой длине отрезков искомое распределение циркуляции по размаху крыла не только является гладкой кривой, но и достаточно мало отличается на каждом из отрезков от линейной зависимости. При этих условиях для приближённого определения приращения циркуляции на отрезке можно воспользоваться теоремой Лагранжа о конечном приращении функции (хотя точка искомой циркуляции, производная в которой равна тангенсу угла наклона секущей, необязательно находится в середине отрезка).

Это же даёт нам право после получения приближённого кусочно-линейного решения провести через узловые точки сплайн и считать его близким к искомой циркуляции.

## Расчет и конструирование

Учитывая, что при этом в качестве постулата принимается естественное граничное условие  $\Gamma = 0$  на левом и правом концах крыла (в классическом решении принимается то же условие), мы можем выразить значение  $\Gamma_i$  в любом узле, как это было записано выше.

Приемлемая точность метода доказана сравнением с имеющимися данными.

### Детальное изложение предлагаемого метода расчёта

В предлагаемом варианте уравнения Прандтля записываются для узлов (для границ участков) и в этих же сечениях определяются искомые значения циркуляции. Исходный вид уравнения Прандтля для произвольного сечения  $Z_i$

$$\Gamma_i = Cy_i^\alpha \cdot B_i \cdot \frac{V_0}{2} \cdot [\alpha + \Delta\alpha_{\text{крыти}} - \alpha_{0i}] - Cy_i^\alpha \cdot B_i \cdot \frac{57,3}{8\pi} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d\Gamma}{(Z_i - Z)} \cdot dz.$$

Используя вышеизложенное, можем записать соответствующее алгебраическое уравнение, например для сечения 2, в виде (при равномерном делении размаха):

$$X_1 + X_2 + Cy_2^\alpha \cdot B_2 \cdot \frac{57,3}{8\pi} \cdot \left[ \frac{X_1}{Z_2 - Z_1^*} + \frac{X_2}{Z_2 - Z_2^*} + \frac{X_3}{Z_2 - Z_3^*} + \dots + \frac{X_N}{Z_2 - Z_N^*} \right] = \\ = Cy_2^\alpha \cdot B_2 \cdot \frac{V_0}{2 \cdot \Delta L} \cdot [\alpha + \Delta\alpha_{\text{крыт2}} - \alpha_{02}].$$

В итоге мы получаем стандартную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X_1, \dots, X_N$ , в которой  $i$ -е уравнение записывается:

$$A_{i1} \cdot X_1 + A_{i2} \cdot X_2 + \dots + A_{iN} \cdot X_N = C_i.$$

Для получения записи уравнений, справедливой для случая неравномерного деления размаха, приведённые уравнения умножаются на  $\Delta L$ , после чего в этих величинах проставляются нужные индексы.

Таким образом, общий вид коэффициентов уравнений  $1 \dots N - 1$ :

$$A_{ij} = \Delta L_j \cdot \left[ 1 + \frac{CYR_i}{Z_i - Z_j^*} \right] \text{ при } j \leq i, \text{ но } A_{ij} = \Delta L_j \cdot \left[ \frac{CYR_i}{Z_i - Z_j^*} \right] \text{ при } j > i.$$

Здесь  $CYR_i = Cy_i^\alpha \cdot B_i \cdot \frac{57,3}{8\pi}$ . Пределы изменения индексов:  $i = 1 \dots N - 1, j = 1 \dots N$ .

$$C_i = Cy_i^\alpha \cdot B_i \cdot \frac{V_0}{2} \cdot [\alpha + \Delta\alpha_{\text{крыти}} - \alpha_{0i}].$$

Решение этой системы в случае  $N = (10 \dots 20)$  производится элементарно, и решение ведёт себя чрезвычайно устойчиво. Практика расчётов показала, что результаты (распределение циркуляции) в районе концов крыла ниже классических на величину от нескольких процентов до десяти (в зависимости от удлинения крыла). При необходимости устранить эту погрешность можно либо увеличивая число участков, либо задавая корректирующий множитель, определяемый аппроксимацией по удлинению крыла и координате  $Z$ .

На рис. 2 приведено сравнение результатов расчётов, проведённых по изложенному методу, с расчётами Карафоли [3, фиг. 10.15]). Рассматривалось обтекание прямоугольного крыла с исходным удлинением  $\lambda = 7$  при числах  $M = 0$  и  $0,8$ ; при этом расчёт для  $M = 0,8$  проводился с использованием теории подобия, следующей из правила Прандтля–Глауэрта. В данном примере, проводя расчёт для  $M = 0,8$  сведением к фиктивному крылу в несжимаемом потоке, следует взять фиктивное удлинение по зависимостям:

$$B = \sqrt{1 - M^2} = 0,6; \lambda_i = 0,6 \cdot \lambda = 4,2. \text{ По оси ординат отложена величина } \Gamma_{\text{отн}} = \Gamma / 2L_{\text{кр}} \cdot V \cdot \alpha.$$

Из приведённого графика видно, что характер полученных решений близок к исходным зависимостям (видимая погрешность значительно уменьшается при проведении сплайна через полученные точки). Следует указать, что результирующая погрешность изложенного метода расчёта (по  $C_u$ ) не превышает уровня  $\approx 2\%$ , и этого вполне достаточно для инженерных расчётов.

Здесь переход от рассчитанной зависимости  $\Gamma(z)$  к коэффициенту  $C_y$  осуществляется по соотношению  $C_y = \frac{2}{V_0 \cdot S_{кр}} \cdot \int \Gamma(z) \cdot dz$ .

Аналогичные выводы следуют из сравнения получаемых величин  $C_{x_{инд}}$  с результатами, приведёнными в [2].

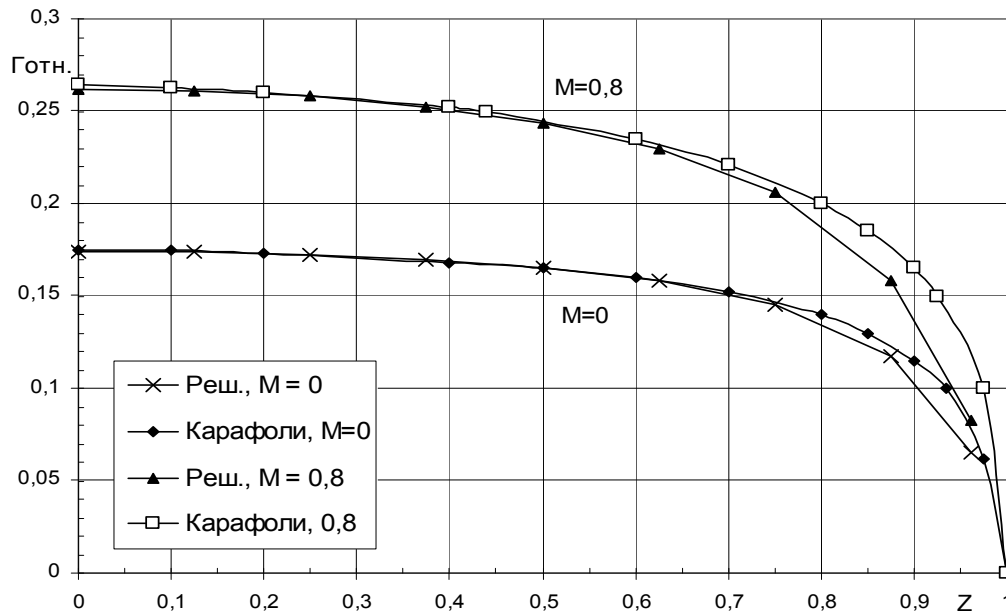


Рис. 2

Следующий пример относится к нагрузкам при вращении крыла по крену.

В программу, реализующую предложенный метод, заложен алгоритм, учитывающий влияние угловых скоростей по трём осям. Вращение крыла по крену сводится к случаю дополнительной крутки сечений, в соответствии с распределением нормальных скоростей, обусловленных вращением. Очевидно, что в этом случае пользоваться условиями симметрии нельзя, даже при симметричном в плане крыле и отсутствии угла скольжения.

Для случая прямоугольного крыла с удлинением  $\lambda = 6$  и размахом  $L = 4$  м, имеющего (для определённости) угол атаки  $3^\circ$ , скорость  $34$  м/с и угловую скорость  $\omega x_1 = 0,2$  1/с, получена эпюра распределения циркуляции по размаху (рис. 3).

При этом момент по крену составил  $M_x = -4,3$  кГ·м, коэффициент момента крыла по крену  $m_x = -0,005575$ , безразмерная угловая скорость:  $\omega x_1 = \omega x_1 \cdot L/V = 0,0235$ , а коэффициент по безразмерной угловой скорости  $m_x^{\omega x_1} = -0,237$ , что вполне соответствует имеющимся данным [5, рис. 10.45].

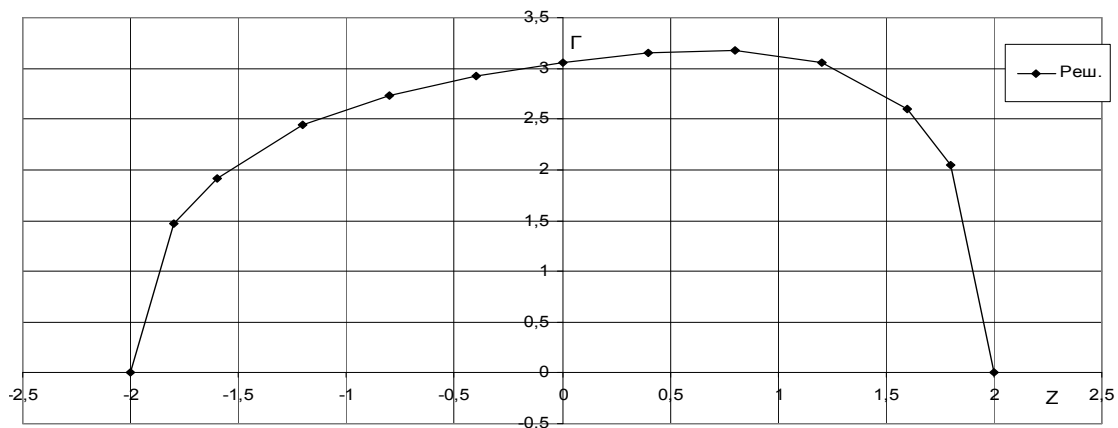


Рис. 3

### Крыло на корпусе

Доработка метода, обусловленная присутствием корпуса, сводилась к учёту следующих факторов:

1) на консолях крыла возникают дополнительные углы атаки, обусловленные нормальными к крылу и к оси корпуса скоростями потока от потенциального обтекания корпуса;

2) для совокупности свободных вихрей, сходящих с крыла, применяется непосредственный учёт граничных условий в части требования о непроницаемости поверхности корпуса; для случая кругового корпуса он сводится к введению внутрь его семейства сопряжённых вихрей, связанных с исходной совокупностью свободных вихрей крыла в соответствии с известным правилом:

$$R_{\text{сопр}i} = R_{\text{корп}}^2 / R_{\text{своб}i};$$

3) несущий вихрь консоли крыла не может оборваться у поверхности корпуса, а сопряжённые вихри не могут, внезапно возникнув, висеть изолированно внутри корпуса; в рамках принятой схематической модели явления эта ситуация может быть разрешена единственным образом: на стыке консоли крыла с корпусом вводится вихревая конструкция, в которой несущий вихрь консоли крыла входит внутрь корпуса и соединяется с сопряжёнными вихрями. Таким образом, в рамках данной простой модели подкорпусная часть крыла заменяется несимметричной консолью крыла, занимающей часть диаметра корпуса (назовём её центропланной частью крыла). Это же рассуждение применимо и к другой консоли крыла;

4) в уравнения Прандтля, записываемые для выделенных сечений крыла, вводятся дополнительные члены, учитывающие скос потока от наличия сопряжённых вихрей; при этом количество неизвестных не возрастает, поскольку циркуляция сопряжённых вихрей совпадает (с точностью до знака) с циркуляцией исходных свободных вихрей.

Механизм действия сопряжённых вихрей на расчётные сечения консолей крыла в данном случае и схема отсчёта сечений иллюстрируются на рис. 4 (для ясности изложения всё крыло с полным размахом 4 м здесь разбито лишь на четыре отсека).

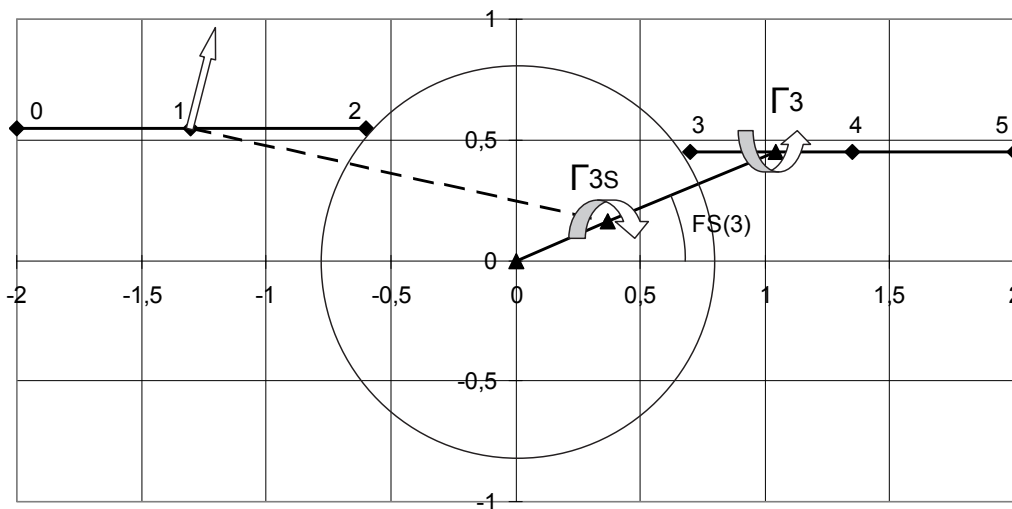


Рис. 4

В тексте программы для каждого сечения крыла определяются составляющие скорости, обусловленные ориентацией сечения относительно плоскости натекания потока, расстоянием от поверхности корпуса и угловыми скоростями компоновки, после чего вычисляются геометрические и аэродинамические углы атаки сечений. Далее записываются непосредственно уравнения-аналоги интегродифференциального уравнения крыла данной компоновки, в которые, дополнительно к обычным свободным вихрям отсеков, добавлены сопряжённые вихри. При этом в случае несреднеплана следует учитывать, что сопряжённые вихри имеют координаты  $Z^*(J_s)$  и  $Y^*(J_s) \neq 0$ , так что при подсчёте «плеч» сопряжённых вихрей появятся радикалы, а индуцированные ими скорости в сечениях крыла уже не будут нормальными к размаху крыла; при этом, следуя общей идеологии метода Прандтля, при определении углов скоса мы будем учитывать лишь нормальную к размаху составляющую скоростей.

Как видно из этой схемы, в излагаемом методе не накладывается каких-либо требований на взаимное расположение крыла и корпуса.

**Детальное изложение предлагаемого метода расчёта**

Общий вид алгебраического уравнения для произвольного сечения крыла (например, для сечения 3) будет таким:

$$X_1 \cdot \Delta L_1 + X_2 \cdot \Delta L_2 + X_3 \cdot \Delta L_3 + Cy_3^\alpha \cdot B_3 \cdot \frac{57,3}{8\pi} \cdot \left[ \frac{X_1 \cdot \Delta L_1}{Z_3 - Z_1^*} + \frac{X_2 \cdot \Delta L_2}{Z_3 - Z_2^*} + \dots + \frac{X_N \cdot \Delta L_N}{Z_3 - Z_N^*} - \frac{X_1 \cdot [Z_3 - Z^*(1s)] \cdot \Delta L_1}{\Delta R^2(3, 1s)} - \frac{X_2 \cdot [Z_3 - Z^*(2s)] \cdot \Delta L_2}{\Delta R^2(3, 2s)} - \dots - \frac{X_N \cdot [Z_3 - Z^*(Ns)] \cdot \Delta L_N}{\Delta R^2(3, Ns)} \right] = Cy_3^\alpha \cdot B_3 \cdot \frac{V_0}{2} \cdot (\alpha + \Delta\alpha_{уст} + \Delta\alpha_{\text{крут } 3} - \alpha_{03}).$$

Дополнительная особенность, отличающая исследуемую компоновку от изолированного крыла, связана с тем, что для изолированного крыла использовался сквозной проход отсеков, от 1-го до N-го, поскольку эпюра циркуляции в функции боковой координаты была по определению непрерывной. В рассматриваемом же случае эта непрерывность в определённом смысле нарушается, на участке центроплана имеет место нелинейное преобразование координаты Z, и деление на отсеки (каждому из которых должен отвечать определённый сопряжённый вихрь) здесь становится неравномерным.

Чтобы снизить погрешность, допускаемую вследствие приближённого учёта этой нелинейности, в данном случае проход отсеков осуществляется, как обычно, с 1-го до отсека N/2, а остальные рассматриваются справа налево, т. е. с N-го, поскольку граничное условие в крайних сечениях точно известно:  $\Gamma(0) = \Gamma(N + 1) = 0$ . Таким образом, в реализованной программе (например, при N = 12) запись уравнений по вышеприведённому шаблону используется до значения N = 6, для остальных – форма другая.

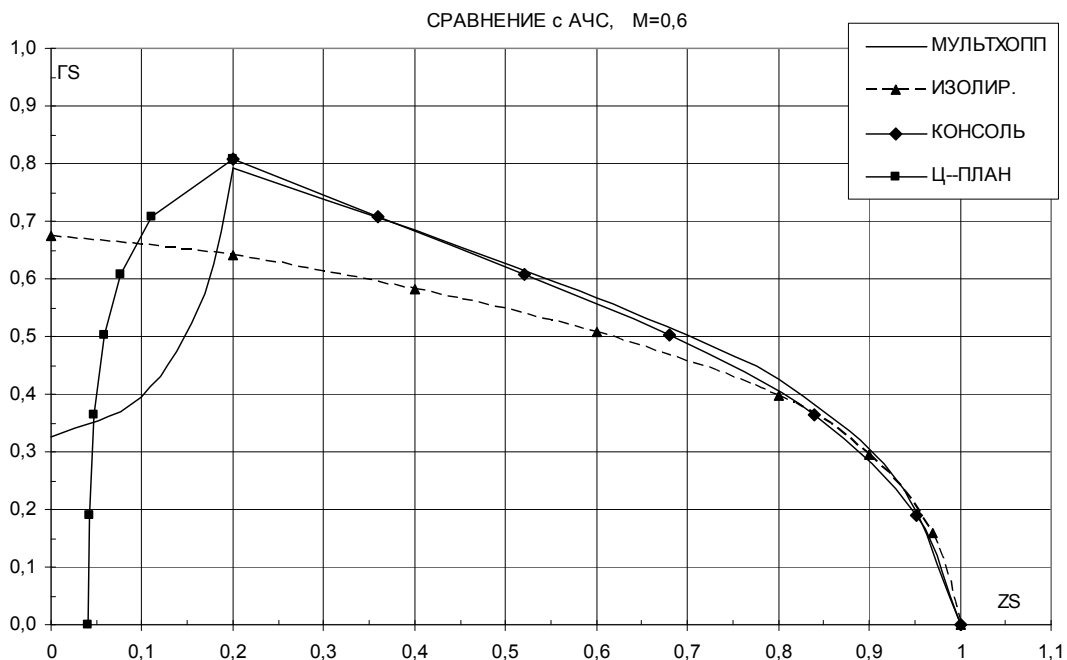


Рис. 5

Например, для сечения 10 уравнение будет иметь такой вид

$$-X_{10} \cdot \Delta L_{10} - X_{11} \cdot \Delta L_{11} - X_{12} \cdot \Delta L_{12} + Cy_{10}^\alpha \cdot B_{10} \cdot \frac{57,3}{8\pi} \cdot \left[ \frac{X_1 \cdot \Delta L_1}{Z_{10} - Z_1^*} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{X_2 \cdot \Delta L_2}{Z_{10} - Z_2^*} + \dots + \frac{X_N \cdot \Delta L_N}{Z_{10} - Z_N^*} - \frac{X_1 \cdot [Z_{10} - Z^*(1s)] \cdot \Delta L_1}{\Delta R^2(10, 1s)} - \frac{X_2 \cdot [Z_{10} - Z^*(2s)] \cdot \Delta L_2}{\Delta R^2(10, 2s)} - \dots - \\
 & - \frac{X_N \cdot [Z_{10} - Z^*(Ns)] \cdot \Delta L_N}{\Delta R^2(10, Ns)} \Bigg] = C_{y_{10}^\alpha} \cdot B_{10} \cdot \frac{V_0}{2} \cdot (\alpha + \Delta\alpha_{уст} + \Delta\alpha_{круп10} - \alpha_{010}) \cdot
 \end{aligned}$$

Сравнение решения, проведенного по изложенному методу, с одним из известных решений ( $D_{корп}/L_{кр} = 0,2$  при  $M = 0,6$  [4, фиг. 38] приведено на рис. 5.

Видно, что соответствие в распределении циркуляции по размаху консоли крыла можно считать прекрасным, но распределение по центроплану имеет различный характер. Последнее объясняется различием физической модели, соответствующей этим двум методам: в [4] расчёт проводится по методу Мультихуппа, в котором поперечное сечение корпуса переводится в вертикальный отрезок при помощи конформного преобразования; в предлагаемом же методе часть диаметра корпуса относится к крылу, т. е. заменяется горизонтальным отрезком.

При этом интегральная величина нагрузки по центроплану в двух методах отличается от соответствующей величины, рассчитанной по теории тонкого тела, на  $\pm 10\%$ , что можно считать допустимым.

### Литература

1. Аржаников, Н.С. *Аэродинамика* / Н.С. Аржаников, В.Н. Мальцев. – М.: Оборонгиз, 1956. – 483 с.
2. Караfoли, Е. *Аэродинамика крыла самолета* / Е. Караfoли. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 479 с.
3. Караfoли, Е. *Аэродинамика больших скоростей* / Е. Караfoли. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 739 с.
4. *Аэродинамика частей самолета при больших скоростях* / под ред. А.Ф. Доновэн, Г.Р. Лоуренс. – М.: ИИЛ, 1959. – 702 с.
5. Белоцерковский, С.М. *Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях* / С.М. Белоцерковский, Б.К. Скрипач. – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 424 с.

*Поступила в редакцию 27 июня 2011 г.*

**Старцев Эдуард Александрович.** Ведущий инженер, ОАО «ОКБ Новатор», г. Екатеринбург. Область научных интересов – аэродинамика и динамика полета.

**Startsev, Edward Alexandrovitch.** Principal engineer, «Novator» design bureau, Ekaterinburg. The area of scientific interests is aerodynamics and flight dynamics.