УДК 517.968

ОБ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.Л. Медведев, К.М. Расулов

В работе получен алгоритм решения одной из основных четырехэлементных краевых задач типа Римана в классах кусочно-бианалитических функций, линией скачков которых является единичная окружность, указаны условия, при которых решение задачи может быть получено конструктивно и явно в интегралах типа Коши. Исследована картина разрешимости задачи и установлена ее нетеровость.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L. Область, дополняющую $T^+ \cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- и будем считать, что начало координат находится в T^+. В дальнейшем в основном пользуемся терминами и обозначениями, принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно-бианалитические функции $F(z) = \left\{F^+(z), F^-(z)\right\}$ *класса* $A_2\left(T^\pm\right) \cap H^{(2)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на* L *условиям:*

$$A_{k1}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} + (-1)^{k-1}A_{k2}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}}} = G_{k1}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} + (-1)^{k-1}G_{k2}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}}} + i^{k-1}g_k(t), \quad (1)$$

где $k = 1, 2$, $A_{kj}(t), G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $(j = 1, 2)$ *– заданные на контуре* L *функции класса* $H(L)$ *(Гёльдера),* i *– мнимая единица, причем для определенности будем предполагать, что выполняется следующее «начальное условие»*

$$F^+(0) = 0. \quad (2)$$

Сформулированную задачу будем называть *задачей* GR_4, а соответствующую однородную задачу $(g_k(t) \equiv 0,\ k = 1, 2)$ назовем *задачей* GR_4^0.

Отметим, что в частном случае, когда $A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$, $A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 1$, задача GR_4 представляет собой основную (*двухэлементную*) краевую задачу типа Римана для бианалитических функций, сформулированную Ф.Д. Гаховым в его известной монографии (см. [2], с. 319). Двухэлементная задача типа Римана (1) для бианалитических функций в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами подробно исследована в работах одного из авторов (см. [1] и имеющуюся там библиографию).

В данной заметке задача GR_4 исследуется в сформулированной выше постановке в случае, когда контур L есть единичная окружность: $L = \left\{t : |t| = 1\right\}$.

2. О сведении задачи GR_4 к двум векторно-матричным задачам Римана для аналитических функций. Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что всякую исчезающую на бесконечности кусочно-бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде

$$F^\pm(z) = \varphi_0^\pm(z) + \bar{z}\varphi_1^\pm(z),\ z \in T^\pm, \quad (3)$$

где $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ – аналитические соответственно в T^+ и T^- функции, причем $\prod\left\{\varphi_k^-, \infty\right\} \geq 1 + k$, $k = 0, 1$ (здесь $\prod\left\{\varphi_k^-, \infty\right\}$ означает порядок функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$).

С учетом представления (3), известных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

и тождества $t\cdot\bar{t}=1$ $(t\in L)$ краевые условия (1) можно переписать в следующем виде:

$$t^{-1}A_{k1}(t)\Phi_k^+(t)+tA_{k2}(t)\overline{\Phi_k^+(t)}=t^{-1}G_{k1}(t)\Phi_k^-(t)+tG_{k2}(t)\overline{\Phi_k^-(t)}+g_k(t),\quad k=1,2,\qquad(4)$$

где приняты обозначения:

$$\Phi_k^{\pm}(z)=z\frac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}+(-1)^{k-1}z\varphi_1^{\pm}(z),\quad z\in T^{\pm}.$$

Из равенства (4), переходя к комплексно сопряженным значениям, получаем:

$$t^2\overline{A_{k1}(t)}\cdot t\overline{\Phi_k^+(t)}+t^{-1}\overline{A_{k2}(t)}\Phi_k^+(t)=t^2\overline{G_{k1}(t)}\cdot t\overline{\Phi_k^-(t)}+t^{-1}\overline{G_{k2}(t)}\Phi_k^-(t)+\overline{g_k(t)},\quad k=1,2.\qquad(5)$$

Далее, введем в рассмотрение аналитические соответственно в T^+ и T^- функции $\psi_{kj}^+(z)$ и $\psi_{kj}^-(z)$ $(k=1,2;\ j=1,2)$, которые определим так:

$$\psi_{k1}^{\pm}(z)=\Phi_k^{\pm}(z),\ \psi_{k2}^{\pm}(z)=\frac{1}{z}\cdot\overline{\Phi_k^{\mp}}\left(\frac{1}{z}\right),\quad z\in T^{\pm}.\qquad(6)$$

Если предположить, что

$$\overline{A_{k1}(t)}G_{k1}(t)-A_{k2}(t)\overline{G_{k2}(t)}\neq 0,\quad t\in L,\quad k=1,2,\qquad(7)$$

то равенства (4), (5) можно записать в следующей векторно-матричной форме:

$$\psi_k^+(t)=G_k(t)\psi_k^-(t)+Q_k(t),\quad t\in L,\quad k=1,2,\qquad(8)$$

где

$$G_k(t)=\left(\overline{\delta_k(t)}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}|G_{k1}(t)|^2-|G_{k2}(t)|^2 & \beta_k(t)\\ -\overline{\beta_k(t)} & |A_{k1}(t)|^2-|A_{k2}(t)|^2\end{pmatrix},\ Q_k(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\overline{G_{k1}(t)}g_k(t)-G_{k2}(t)\overline{g_k(t)}}{t\cdot\overline{\delta_k(t)}}\\ \dfrac{\overline{A_{k2}(t)}g_k(t)-A_{k1}(t)\overline{g_k(t)}}{t^2\overline{\delta_k(t)}}\end{pmatrix},$$

$$\delta_k(t)=\overline{A_{k1}(t)}G_{k1}(t)-A_{k2}(t)\overline{G_{k2}(t)},\ \beta_k(t)=t^3\left(\overline{A_{k1}(t)}G_{k2}(t)-A_{k2}(t)\overline{G_{k1}(t)}\right),$$

а $\psi_k^{\pm}(z)=(\psi_{k1}^{\pm}(z),\psi_{k2}^{\pm}(z))$ – неизвестный кусочно-аналитический вектор (при каждом фиксированном значении k) с линией скачков L.

Таким образом, при выполнении условий (7), решение задачи GR_4 сводится к решению двух обычных векторно-матричных задач Римана вида (8) относительно двумерных кусочно-аналитических векторов $\psi_k^{\pm}(z)=(\psi_{k1}^{\pm}(z),\psi_{k2}^{\pm}(z))$.

Замечание 2.1. Здесь важно отметить, что если выполняются условия (7), то $\det G_k(t)=\dfrac{\delta_k(t)}{\overline{\delta_k(t)}}\neq 0,\ t\in L$. Следовательно, условия (7) необходимы и достаточны для *нетеровости* обеих векторно-матричных задач вида (8) (см., например, [3], с. 51).

Из приведенных выше рассуждений видно, что в случае, когда $L=\{t:|t|=1\}$ и выполняются условия (7), проблема исследования задачи GR_4 в классах кусочно-бианалитических функций сводится в основном к проблеме исследования двух векторно-матричных задач Римана вида (8). Известно, что в общем случае решение векторно-матричных задач такого вида сводится к решению определенных систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода (см., например, [3], гл. 1 или [4], гл. 1). Поскольку законченного решения метод интегральных уравнений не дает (как в смысле установления условий разрешимости, так и в смысле эффективного получения самих решений), то очень важно установление частных случаев, когда векторно-матричные задачи вида (8) допускают вполне конструктивные и эффективные решения.

Структура матриц $G_k(t)$ $(k=1,2)$ в краевых условиях (8) позволяет получить конструктивные решения векторно-матричных задач Римана вида (8) (а значит, и поставленной задачи GR_4), например, в следующих трех случаях:

I. *Общий случай*, когда выполняются условия:

$$|A_{k1}(t)|\neq|A_{k2}(t)|\ \text{и}\ |G_{k1}(t)|\neq|G_{k2}(t)|,\ t\in L, k=1,2;\qquad(9)$$

II. *Вырожденный случай*, когда для каждого из двух значений параметра k выполняется одно из следующих условий:

$$|G_{k1}(t)| \equiv |G_{k2}(t)|,\ |A_{k1}(t)| \neq |A_{k2}(t)|,\ t \in L; \tag{10}$$

$$|A_{k1}(t)| \equiv |A_{k2}(t)|,\ |G_{k1}(t)| \neq |G_{k2}(t)|,\ t \in L; \tag{11}$$

$$|G_{k1}(t)| \equiv |G_{k2}(t)|,\ |A_{k1}(t)| \equiv |A_{k2}(t)|,\ t \in L; \tag{12}$$

III. *Полувырожденный случай*, когда при одном значении параметра k выполняется условие (9), а при другом значении этого параметра выполняется одно из условий (10)–(12).

Ниже покажем, что в каждом из указанных случаев задача GR_4 допускает вполне эффективное решение.

3. О решении задачи GR_4. Остановимся сначала на построении конструктивного алгоритма решения исследуемой задачи в случае I. Заметим, что при выполнении условий (7) коэффициент $G_k(t)$ каждой векторно-матричной задачи Римана вида (8) (т.е. задачи, получаемой из (8) при каждом фиксированном значении параметра k) обладает следующим важным свойством: *все главные миноры матрицы $G_k(t)$ отличны от нуля на L*. Но при выполнении этого условия известно (см., например, [1], §18), что векторно-матричная задача Римана для аналитических функций допускает вполне конструктивное решение. В самом деле, перепишем в развернутом виде матричное равенство (8):

$$\psi_{k1}^{+}(t) = \frac{|G_{k1}(t)|^2 - |G_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k1}^{-}(t) + \frac{\beta_k(t)}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) + \frac{\overline{G_{k1}(t)}g_k(t) - G_{k2}(t)\overline{g_k(t)}}{t\overline{\delta_k(t)}}, \tag{13}$$

$$\psi_{k2}^{+}(t) = -\frac{\overline{\beta_k(t)}}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k1}^{-}(t) + \frac{|A_{k1}(t)|^2 - |A_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) + \frac{\overline{A_{k2}(t)}g_k(t) - A_{k1}(t)\overline{g_k(t)}}{t^2\overline{\delta_k(t)}}. \tag{14}$$

Вводя обозначения

$$Q_{k1}(t) = \frac{\beta_k(t)}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) + \frac{\overline{G_{k1}(t)}g_k(t) - G_{k2}(t)\overline{g_k(t)}}{t\overline{\delta_k(t)}}, \quad k = 1, 2, \tag{15}$$

равенства (13), в свою очередь, можно записать так:

$$\psi_{k1}^{+}(t) = \frac{|G_{k1}(t)|^2 - |G_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\psi_{k1}^{-}(t) + Q_{k1}(t), \quad k = 1, 2. \tag{16}$$

Далее, если временно рассматривать $Q_k(t), t \in L$ (при фиксированном значении k) как известную функцию, то равенство (16) будет представлять собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно неизвестной кусочно-аналитической функции $\psi_{k1}^{\pm}(z)$, исчезающей на бесконечности.

Пусть

$$Ind\left(\frac{|G_{k1}(t)|^2 - |G_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\right) = Ind\,\delta_k(t) = \chi_k, \quad k = 1, 2.$$

Тогда, как известно (см., например, [2], с. 113), при $\chi_k \geq 0$ скалярная задача Римана вида (16) (при каждом фиксированном k) безусловно разрешима и ее общее решение задается так:

$$\psi_{k1}^{\pm}(z) = \mathrm{X}_k^{\pm}(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q_{k1}(\tau)}{\mathrm{X}_k^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + P_{\chi_k - 1}(z)\right), z \in T^{\pm}, \tag{17}$$

где $\mathrm{X}_k^{\pm}(z)$ – каноническая функция задачи, $P_{\chi_k-1}(z)$ – полином степени $\chi_k - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами. Если же $\chi_k < 0$, то решение задачи Римана (16) также дается формулой (17), где нужно положить $P_{\chi_k-1}(z) \equiv 0$, при соблюдении следующих $-\chi_k$ условий разрешимости:

$$\int_L \frac{Q_{k1}(\tau)}{X_k^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0, \quad j = 1,2,\dots,-\chi_k.$$

Подставив граничное значение функции $\psi_{k1}^-(z)$, найденной по формуле (17), в равенство (14), получим краевое условие *обобщенной* скалярной задачи Римана относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\psi_{k2}^\pm(z)$:

$$\psi_{k2}^+(t) - \frac{|A_{k1}(t)|^2 - |A_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}} \overline{\psi_{k2}^-(t)} + \int_L B_{k2}(t,\tau) \psi_{k2}^-(\tau) d\tau = Q_{k2}(t), \quad t \in L, \quad k = 1,2, \tag{18}$$

где $B_{k2}(t,\tau)$ – фредгольмово ядро, $Q_{k2}(t)$ – функция класса $H(L)$, вполне определенным образом выражаемые через известные функции $A_{kj}(t), G_{kj}(t), g_k(t)$ $(j = 1,2)$.

Ясно, что при выполнении условий (7) и (9) обобщенная скалярная задача Римана (18) является задачей нормального типа и в этом случае она допускает конструктивное решение (см., например, [1], § 2).

Наконец, решая (при каждом фиксированном значении параметра k) обобщенную задачу Римана (18), например, пользуясь методом, предложенным в [1], определим функции $\psi_{k2}^\pm(z)$. Затем, подставив граничные значения найденной функции $\psi_{k2}^-(z)$ в выражение для свободного члена краевого условия (16) и решив обычную задачу Римана (16), определим кусочно-аналитическую функцию $\psi_{k1}^\pm(z)$. По найденным функциям $\psi_{k1}^\pm(z)$ и $\psi_{k2}^\pm(z)$, пользуясь формулами (6), определим кусочно-аналитические функции $\Phi_k^\pm(z), k = 1,2$. Тогда, с учетом начального условия (2), нетрудно восстановить аналитические компоненты искомой кусочно-бианалитической функции $F^\pm(z)$:

$$\varphi_1^\pm(z) = \frac{1}{2z}\left(\Phi_1^\pm(z) - \Phi_2^\pm(z)\right), \ \varphi_0^\pm(z) = \int_{\Gamma^\pm} \frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^\pm(\zeta) + \Phi_2^\pm(\zeta) - 2\frac{d\varphi_1^\pm(\zeta)}{d\zeta}\right) d\zeta,$$

где Γ^+ (Γ^-) – произвольная гладкая кривая, лежащая в T^+ (T^-) и соединяющая точки 0 и z (∞ и z). Следовательно, в силу (3), решение искомой задачи GR_4 можно получить по формуле:

$$F^\pm(z) = \frac{1}{2z}\left(\Phi_1^\pm(z) - \Phi_2^\pm(z)\right) + \bar{z} \int_{\Gamma^\pm} \frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^\pm(\zeta) + \Phi_2^\pm(\zeta) - 2\frac{d\varphi_1^\pm(\zeta)}{d\zeta}\right) d\zeta, \ z \in T^\pm.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если на* $L = \{t : |t| = 1\}$ *выполняются условия* (7) *и* (9), *то решение задачи* GR_4 *сводится к последовательному решению двух обобщенных скалярных задач Римана вида* (18) и *двух обычных скалярных задач Римана вида* (.16) *в классах исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций с линией скачков L.*

Очевидно, что в *вырожденном* (II) и *полувырожденном* (III) случаях можно применить тот же алгоритм решения задачи GR_4, ЧТО и в рассмотренном *общем случае.* Например, если коэффициенты поставленной задачи обладают одним из свойств (10), (11) или (12) (случай II), то решение каждой векторно-матричной задачи Римана вида (8) будет сводиться к решению двух скалярных задач Римана в классах кусочно-аналитических функций, исчезающих на бесконечности (см. формулы (13), (14)). Соответственно, с учетом рассуждений п. 2, для решения задачи GR_4 потребуется решить четыре обычные скалярные задачи Римана. Аналогично, в случае III решение искомой задачи GR_4 сводится к решению четырех скалярных задач Римана в классах аналитических функций, исчезающих на бесконечности: одной обобщенной задачи вида (18) и трех обычных задач вида (16).

Замечание 3.1. Так как в вырожденном случае (II) решение задачи GR_4 редуцируется к решению четырех обычных скалярных задач Римана, то в этом случае решение задачи GR_4 (В случае ее разрешимости) можно получить явно в интегралах типа Коши, т.е. при выполнении условия (7) и одного из условий (10)-(12) исследуемая задача допускает решение в замкнутой форме (в квадратурах).

4. О качественном исследовании задачи GR_4. Картину разрешимости задачи GR_4 и вывод о ее нетеровости несложно установить основываясь на теореме 3.1. Действительно, из теоремы 3.1 видно, что картина разрешимости задачи GR_4 определяется на основании картин разрешимости двух обобщенных скалярных задач Римана вида (18) и двух обычных задач Римана вида (16). При этом важно заметить, что индексы этих задач (для каждого фиксированного значения k) совпадают:

$$Ind\left(\frac{|G_{k1}(t)|^2-|G_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\right)=Ind\left(\frac{|A_{k1}(t)|^2-|A_{k2}(t)|^2}{\overline{\delta_k(t)}}\right)=Ind\delta_k(t)=\chi_k,\quad k=1,2.$$

Следовательно, для полного изучения картины разрешимости задачи GR_4 на основании картин разрешимости краевых задач Римана вида (18) и (16), следует рассмотреть следующие четыре различных случая, которые полностью охватывают все возможные ситуации:

1) $\chi_1\geq 0,\chi_2\geq 0$; 2) $\chi_1<0,\chi_2\geq 0$; 3) $\chi_1\geq 0,\chi_2<0$; 4) $\chi_1<0,\chi_2<0$.

Далее, пользуясь схемой исследования картины разрешимости обобщенной задачи Римана вида (18), приведенной в монографии [1], нетрудно установить справедливость следующего,утверждения.

Теорема 4.1. *Если на* $L=\{t:|t|=1\}$ *выполняются условия* (7) *и* (9), *то число линейно независимых решений однородной за*GR_4^0 *и число условий разрешимости неоднородной задачи* GR^* *конечны, то есть задача* GR_4 *является нетеровой.*

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. - Смоленск: СГПУ, 1998. - 343 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - М.: Наука, 1977.-448 с.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1970. - 379 с.

Поступила в редакцию 23 июня 2006 г.