

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛЕЖАЩЕЙ КАПЛИ

А.Е. Коренченко, А.Ж. Илимбаева, В.П. Бескачко

Проведено математическое моделирование течений в капле вязкой жидкости, лежащей на твердой поверхности и выведенной из состояния механического равновесия. Определены собственные частоты и коэффициенты затухания свободных колебаний капель различных жидкостей. Проведено сравнение результатов численного эксперимента и аналитической теории, известной для сферической капли.

Ключевые слова: поверхностное натяжение, лежащая капля, численное моделирование.

Введение

Исследования колеблющейся левитирующей капли в последнее время часто используются для определения физико-химических свойств жидкостей [1]. Обработка результатов почти всех таких экспериментов проводится на основании аналитической теории, предложенной в [2, 3] и пригодной для малых колебаний сферической капли идеальной жидкости в отсутствие объемных сил. Согласно [2] колебания формы капли описываются как

$$r(\theta, \varphi, t) = R + \varepsilon(t)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где R – радиус равновеликой жидкой сферы, находящейся в равновесии, Y_{lm} – сферическая гармоника, $\varepsilon(t)$ – гармоническая функция времени, $\varepsilon(t) = A \sin(\omega_n t + \varphi)$. Частоты колебаний капли согласно [2] описываются формулой

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2) \frac{4\pi}{3} \frac{\sigma}{M}, \quad (1)$$

где $n \geq 2$ – натуральное число, σ – коэффициент поверхностного натяжения, M – масса капли. Основная частота колебаний получается при $n = 2$, при этом капля имеет вид эллипсоида вращения, отношение полуосей которого гармонически изменяется во времени.

Коэффициент затухания p для основной моды свободных колебаний капли, определенный как величина, обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, определяется формулой [3]

$$p = \frac{20\pi}{3} \frac{R}{M} \eta, \quad (2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Существуют исследования, в которых формулы (1), (2) применяются для анализа колебаний лежащей [4] или подвешенной [5, 6] капли с целью определения поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Для такого обобщения, однако, нет достаточных оснований. Во-первых, формулы (1), (2) получены при условии отсутствия массовых сил, а все эксперименты [4–6] проводятся в поле сил тяжести, во-вторых, присутствие твердой подложки неизбежно внесет асимметрию в течение жидкости внутри капли при колебаниях, и в-третьих, в [7] показано, что всякое отличие равновесной формы капли от сферической приводит к изменению и расщеплению частот колебаний. Следовательно, параметры свободных колебаний капли в поле силы тяжести, лежащей на твердой подложке, должны отличаться от таковых для свободных колебаний сферической капли, причем тем сильнее, чем капля крупнее. В [8] проведен анализ колебаний капли, зажатой между двумя плоскими поверхностями, и показана возможность определения вязкости и поверхностного натяжения в таком эксперименте. Анализ колебаний лежащей капли и сравнение их параметров (частоты и коэффициента затухания) с таковыми для свободной капли (1), (2) ранее не проводились и составляют цель настоящей работы.

Математическая модель и принятые приближения

Пусть капля находится на твердой горизонтальной подложке (рис. 1) в условиях, когда справедливы следующие приближения: 1) отсутствует испарение с поверхности жидкости, 2) имеет место осевая симметрия формы капли, распределений давления и течений в ней, 3) влиянием газовой среды на движение капли можно пренебречь, 4) тепловыделение, обусловленное трением в жидкости, незначительно и им можно пренебречь, 5) жидкость несжимаема, 6) на твердой границе выполнено условие прилипания, 7) отсутствует гистерезис смачивания. Тогда уравнения движения жидкости в капле можно записать в виде:

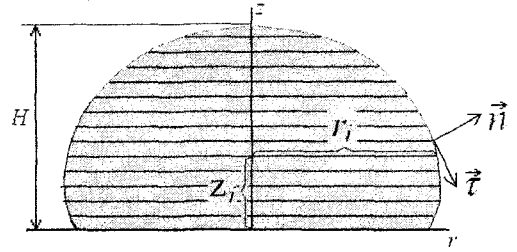


Рис. 1. Схема эксперимента

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) V_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) V_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \rho \left(- \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - 2 \frac{\partial V_z}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial z} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) представляют собой уравнения Навье–Стокса, а (5) – уравнение Пуассона для давления. В (3)–(5) использованы следующие обозначения: $\vec{V} = \{V_r, V_z\}$ – вектор скорости, P – давление сверх гидростатического, ρ , ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости, g – ускорение свободного падения.

В модели приняты следующие граничные условия:

1) на твердой подложке равны нулю обе составляющие скорости:

$$V_r|_{z=0} = 0, \quad V_z|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

2) касательное напряжение равно нулю в каждой точке границы раздела «жидкость–газ»:

$$\left(2n_z n_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + (n_z^2 - n_r^2) \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

где $\vec{n} = \{n_r, n_z\}$ – вектор нормали к поверхности жидкости, Γ – граница «жидкость–газ»,

3) разность нормальных давлений определяется формулой Лапласа

$$\left(-P + 2n_z^2 \rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} - 2n_z n_r \rho \nu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + 2n_r^2 \rho \nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \Big|_{\Gamma} = \sigma K, \quad (8)$$

здесь K – кривизна поверхности капли.

Для замыкания системы (3)–(8) в граничных ячейках записывается уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (3)–(9) приводятся к безразмерной форме так, что все расстояния относятся к R , скорости – к ν/R , давление – к $\rho \nu^2/R^2$, время – к R^2/ν .

Численный метод решения

Для решения системы уравнений (3)–(9) использовалась разностная схема, построенная на основе равномерной пространственной сетки. Пространственные производные внутри капли аппроксимировались центральными разностями, на границе – односторонними. Временная производная вычислялась вперед по времени. Сетка перестраивалась на каждом временном шаге в соответствии с изменениями в форме капли. Системы линеаризованных разностных уравнений решались методом исключения Гаусса. При проведении тестовых расчетов шаг по времени и пространству уменьшался до тех пор, пока результаты не переставали зависеть от параметров разностной схемы.

В численном решении задачи можно выделить три этапа. На первом проводится решение уравнения (5) с граничным условием (8) для определения поля давления при фиксированных распределении скорости и форме капли. На втором этапе проводится решение уравнений (3), (4) при граничных условиях (6), (7), (9) и находится поле скоростей при фиксированных давлении и форме поверхности капли. На третьем этапе из уравнений

$$r_i^{t+\Delta t} = r_i^t + V_r|_r \cdot \Delta t, \quad z_i^{t+\Delta t}|_r = z_i^t|_r + V_z|_r \cdot \Delta t \quad (10)$$

определяется новая форма капли. В (10) r_i есть поперечный радиус капли на высоте z_i (рис. 1).

Радиус пятна смачивания определяется из условия отсутствия гистерезиса смачивания, т.е. в предположении, что краевой угол всегда один и тот же и определяется свойствами границы жидкость–газ–твердое тело. При построении новой формы капли участки между точками свободной границы $(r_i^{t+\Delta t}, z_i^{t+\Delta t})|_r$

аппроксимируются отрезками прямых. Затем производится построение новой разностной сетки с учетом изменений формы. Таким образом, использованный численный метод является одним из методов расщепления по физическим процессам [9].

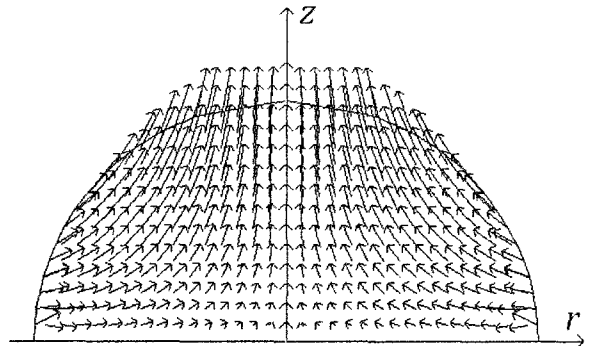


Рис. 2. Основная мода колебаний. Мгновенное распределение скорости течений в капле

Обсуждение результатов

В разностной формулировке форма капли определяется радиусами своих поперечных сечений, поэтому для моделирования ее начального неравновесного состояния достаточно задать произвольные радиусы $\{r_i\}$, совместимые с безразмерным объемом капли, равным $V = 4\pi/3$. В расчетах в качестве неравновесных начальных $\{r_i\}$ использовались равновесные значения, найденные в предварительном расчете для капли жидкости с поверхностным натяжением, немного отличающимся от исходного. Наибольшее отклонение радиуса r_i от равновесного значения составляло менее 1 мкм.

На рис. 2 изображено поле скоростей в поперечном сечении капли воды с радиусом равновесной капли, равным $R = 1,0$ мм. Изучение мгновенных картин распределения скоростей показывает, что в основной моде колебаний капля

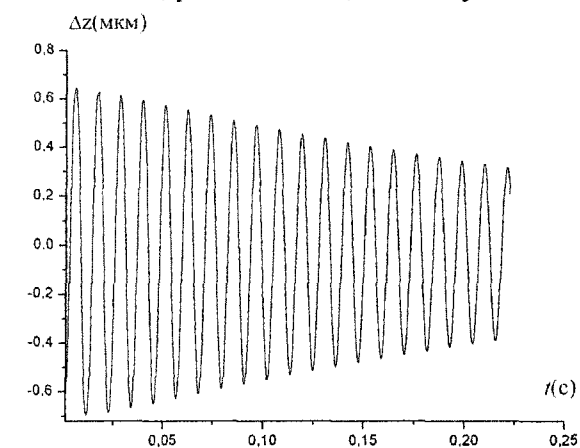


Рис. 3. Временная зависимость отклонения высоты колеблющейся капли от равновесной

остается выпуклой, испытывая периодические сжатия-расширения в осевом и радиальном направлениях – подобно тому, как колеблется свободная капля в своей основной моде. На рис. 3 изображена временная зависимость отклонения высоты капли от ее равновесного значения для тех же условий, что и на рис. 2. Анализ этой зависимости показывает, что на этапе, когда колебания уже установились, но еще не слишком малы, она хорошо аппроксимируется затухающей синусоидой $z = Ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi)$. Это позволяет определить коэффициент затухания p и частоту ω колебаний подгонкой этих параметров под

данные численного эксперимента. Последняя проводилась методом наименьших квадратов, а минимизация целевой функции – методом Розенброка [10].

На рис. 4 и 5 изображены зависимости частоты колебаний от поверхностного натяжения и коэффициента затухания от вязкости жидкости. Результаты расчетов показаны точками. Пунктирные кривые на рисунках представляют собой результаты аппроксимации численных данных степенной функцией вида $y = a(x-b)^c$. Для зависимости частоты от поверхностного натяжения, $\omega(\sigma)$, параметр c степенной функции оказался равен 0,497, а для зависимости $p(\nu)$ $c = 0,989$. Это позволяет заключить, что характер этих зависимостей качественно одинаков для лежащей и свободной капли: $\omega \sim \sqrt{\sigma}$ и $p \sim \nu$.

Однако абсолютные значения частот и коэффициентов затухания колебаний лежащей и свободной каплей одной и той же жидкости, имеющих одинаковый размер, существенно отличаются. Сплошными линиями на рис. 4 и 5 изображены аналитические зависимости (1), (2) для колебаний свободной капли. Видно, что частоты основной моды колебаний свободной и лежащей ка-

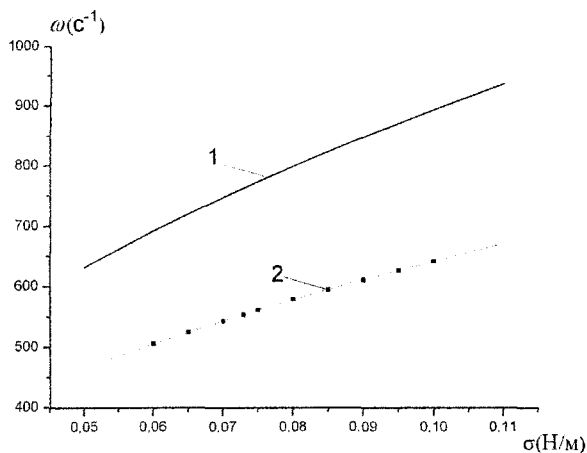


Рис. 4. Зависимость частоты свободных колебаний лежащей капли от поверхностного натяжения на границе «жидкость–газ»: 1 – аналитическая теория [2, 3], 2 – численный расчет

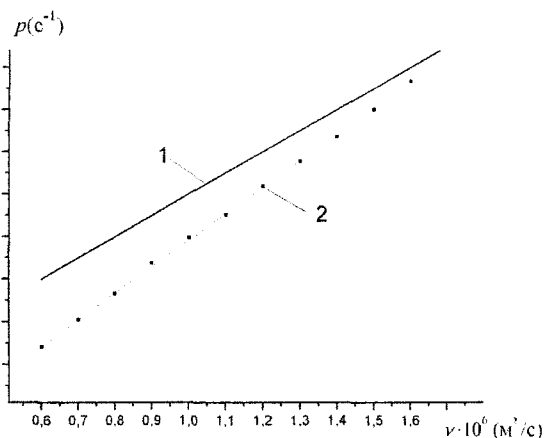


Рис. 5. Зависимость коэффициента затухания колебаний от вязкости жидкости: 1 – аналитическая теория [2, 3], 2 – численный расчет

пли отличаются в рассмотренном диапазоне изменения σ более чем на 30 %, причем разница возрастает с увеличением коэффициента поверхностного натяжения. Различие в значениях коэффициента затухания колебаний имеет такую же относительную величину и увеличивается с уменьшением коэффициента вязкости.

Заключение

Проведен численный анализ эволюции формы лежащей капли, выведенной в начальный момент из состояния механического равновесия. Показано, что обратный переход в положение равновесия происходит в виде затухающих колебаний, параметры которых (частота и коэффициент затухания) зависят от свойств жидкости. Величины этих параметров существенно отличаются для свободной и лежащей каплей, что необходимо учитывать при интерпретации опытных данных [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 10-03-00719-а.

Литература

1. Egrý, I. Surface tension of liquid metals and alloys / I. Egrý, E. Ricci, R. Novakovic, S. Ozawa // *Advances in Colloid and Interface Science*. – 2010. – V. 159. – P. 198–212.
2. Rayleigh, Lord. Capillary phenomena of jets / Lord Rayleigh // *Proc. Roy. Soc. London A*. – 1879. – V. 29. – P. 71–79.
3. Chandrasekhar, S. The oscillations of viscous liquid globe / S. Chandrasekhar // *Proc. Lond. Math. Soc.* – 1959. – V. 9. – P. 141–149.
4. Емец, Е.П. Определения вязко-упругих характеристик материалов при высоких температурах / Е.П. Емец, Г.Ю. Коломейцев, В.В. Широков // *Материалы научной сессии МИФИ*. – 2006. – С. 34–35.
5. Moon, J.H. The lowest oscillation mode of a pendant drop / J.H. Moon, B.H. Kang // *Phys. Fluids*. – 2006. – V. 18. – P. 021702.

6. A theoretical and experimental study on the oscillation of a hanging drop / T. Tsukada, M. Sato, N. Imaishi *et al.* // J. Chem. Eng. Jpn. – 1987. – V. 20. – P. 88–93.
7. Egry, I The oscillating drop technique revisited / I. Egry, H. Giffard, S. Schneider // Meas. Sci. Technol. – 2005. – V. 16. – P. 426–431.
8. Коренченко, А.Е. Колебания капли вязкой жидкости, ограниченной двумя плоскостями / А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2006. – Вып. 7. – № 7(62). – С. 104–108.
9. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1984. – 519 с.
10. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 602 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2011 г.

NUMERICAL STUDY OF FREE VIBRATIONS OF A SESSILE DROP

The mathematical modeling of the flows that appear in a viscous liquid sessile drop after its equilibrium state is disturbed has been carried out. The free oscillation's frequency and the decay coefficient are obtained for different liquids. The comparison of the numerical results with the analytical theory describing the vibrations of a semispherical free-force drop has been developed.

Keywords: surface tension, sessile droplet, computer simulation.

Korenchenko Anna Evgenievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), senior researcher, Institute of Metallurgy of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences.

Коренченко Анна Евгеньевна – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИМЕТ УрО РАН.

e-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

Pimbaeva Aigul Jepsaevna is Student, Physics Department, South Ural State University.

Илимбаева Айгуль Жепспаевна – студентка, физический факультет, Южно-Уральский государственный университет.

Beskachko Valeriy Petrovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, General and Theoretical Physics Department, South Ural State University.

Бескачко Валерий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра общей и теоретической физики, Южно-Уральский государственный университет.