УДК 517.17+517.51

ПРИМЕР ВСЮДУ РАЗРЫВНОГО БИЕКТИВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ОБРАТНОЕ К КОТОРОМУ НЕПРЕРЫВНО В СЧЁТНОМ МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК

А.Ю. Эвнин

Приводится пример всюду разрывного биективного отображения $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, обратное к которому непрерывно в счётном множестве точек.

Ключевые слова: всюду разрывная функция, обратная функция.

В известном сборнике задач [1] имеется задача 673, которая может быть сформулирована следующим образом: верно ли, что если обратимая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ всюду разрывна, то обратная к ней функция также всюду разрывна?

В качестве контрпримера там же приводится функция

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\\ \pi-\operatorname{arctg} x, & \text{если } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Функция эта всюду определена на $\mathbb{R}$ и разрывна во всех точках. Обратная к ней функция такова:

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & \text{если } |x|<\dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{tg} x\in\mathbb{Q},\\ -\operatorname{tg} x, & \text{если } \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2},\ \operatorname{tg} x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Заметим, что ни одна точка не входит в область определения функции g вместе с некоторой своей окрестностью. Поэтому говорить о непрерывности этой функции можно только в смысле непрерывности по множеству [2].

Автору заметки удалось построить пример (подтверждающий отрицательный ответ к задаче 673), в котором областью определения обратной функции является вся числовая прямая.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\notin\mathbb{Q},\\ x, & \text{если } x\in\mathbb{Q}\setminus\left(\mathbb{Z}\cup\left\{\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{3},\ldots\right\}\right),\\ 0, & \text{если } x=0,\\ 2n, & \text{если } x=\dfrac{1}{2n},\ \text{где } n\in\mathbb{Z}, n\neq 0,\\ 2n+1, & \text{если } x=n,\ \text{где } n\in\mathbb{Z}, n\neq 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x=\dfrac{1}{2n+1},\ \text{где } n\in\mathbb{Z}, n\neq 0.\end{cases}$$

Несложно видеть, что функция f является биекцией $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и всюду разрывна (в т.ч. в точке $x=0$ – за счёт того, что $f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=2n$). Кроме того, эта функция обладает таким свойством: $|f(x)|\geq|x|$ для любого x. Поэтому если $|f(x)|<\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число, то выполняется неравенство $x<\varepsilon$. Это говорит о непрерывности в нуле функции, обратной к f.

Приведём теперь пример всюду разрывной функции, обратная к которой непрерывна **во всех целых точках**.

Ниже $[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x:

$$f(x)=\begin{cases} 2\left[x+\dfrac{1}{2}\right]-x, & \text{если } x\notin\mathbb{Q},\\ x, & \text{если } x\in\mathbb{Q}, \{x\}\ne\dfrac{1}{n}, \{x\}\ne\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \text{ где } n=4,5,6,\ldots,\\ \dfrac{1}{n+1}+[x], & \text{если } \{x\}=\dfrac{1}{2n-1}, \text{ где } n=3,4,5,\ldots,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}+[x], & \text{если } \{x\}=\dfrac{1}{2n}, \text{ где } n=2,3,4,\ldots,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n-3}+[x], & \text{если } \{x\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \text{ где } n=4,5,6,\ldots. \end{cases}$$

Несложно проверить, что f является биекцией $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Пусть I – множество иррациональных чисел, B – множество рациональных чисел с дробной частью $\dfrac{1}{n}$ или $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}$, где $n\in\mathbb{Z}, n\ge 4$, A – множество остальных рациональных чисел. Заметим, что частичный предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ и $x\in I$ равен x_0 тогда и только тогда, когда $x_0\in\mathbb{Z}$. Поскольку частичный предел $f(x)$ при $x\to x_0$ и $x\in A$ равен x_0, получаем, что в нецелых точках функция $f(x)$ разрывна. Разрывность $f(x)$ в целых точках следует из того, что её частичный предел при $x\to x_0$ равен $x_0+\dfrac{1}{2}$, если дробная часть x имеет вид $\{x\}=\dfrac{1}{2n}$ при $n=2,3,\ldots$.

Итак, функция $f(x)$ всюду разрывна. В то же время, как нетрудно видеть, обратная к ней функция в целых точках непрерывна.

Литература

1. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: АСТ, 2009. – 624 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. школа, 1981. – Т. 1. – 687 с.

Поступила в редакцию 30 января 2011 г.

THE EXAMPLE OF THE BIJECTIVE MAPPING $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SUCH THAT f IS EVERYWHERE DISCONTINUOUS, BUT AN INVERSE OF THE f IS CONTINUOUS AT A COUNTABLE SET OF POINTS

In this paper we consider the example of the bijective mapping $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that f is everywhere discontinuous, but an inverse of the f is continuous at a countable set of points.

Keywords: everywhere discontinuous function, an inverse function.

Evnin Alexander Yurievich is Cand. Sc. (Pedagogical), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.

Эвнин Александр Юрьевич – кандидат педагогических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: evnin@prima.susu.ac.ru