УДК 517.977

ГРУППА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ГРУППОВОГО КОЛЬЦА ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ СТЕПЕНИ 14

А.В. Каргаполов

Описывается группа центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени 14. Впервые получено описание группы центральных единиц знакопеременной группы, ранг которой больше единицы.

Ключевые слова: групповое кольцо, знакопеременная группа, центральная единица, локальная единица, неприводимые характеры.

Введение

Ранее группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп A_n для $n<7$ были описаны в работе [1]. Дальнейшее продвижение уже было затруднительно получить без использования компьютера. Также в работе [2] Ферраз нашел, что ранг r_n группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп равен 0 тогда и только тогда, когда $n\in\{1,2,3,4,7,8,9,12\}$. В работе [3] доказано, что ранг r_n равен 1 тогда и только тогда, когда $n\in\{5,6,10,11,13,16,17,21,25\}$. В работе [4] полностью описываются группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп в случаях, когда $n\in\{10,11,13,16,17,21,25\}$. В совокупности с [1] получено полное описание групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп, имеющих ранг 1. В работе идет исследование самого первого случая, когда ранг >1, а именно $n=14$, в этом случае ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы A_{14} равен 3.

Основные определения

Обозначение 1. Если K – ассоциативное кольцо с 1, то $U_n(K)=\{x\in K\mid \exists x'\in K\ xx'=x'x=1\}$ группа его единиц (= обратимых элементов) – мультипликативная группа кольца K.

Определение 1. Пусть K – кольцо. *Центральной единицей группового кольца* KG называется единица центра $Z(KG)$ этого кольца, то есть $u\in KG$ – центральная единица, если $u\in Z(KG)$ и существует такой элемент $u'\in Z(KG)$, что $uu'=1$.

Следующие результаты хорошо известны.

Лемма 1. *Группа центральных единиц совпадает с центром группы всех единиц группового кольца. Более точно, пусть K – кольцо, тогда*

$$U_n(Z(KG))=Z(KG)\cap U_n(KG)=Z(U_n(KG)).$$

Лемма 2. *Имеем*

$$U_n(Z(ZG))=<-1>\times V(Z(ZG)),$$

где $V(Z(ZG))=\{v\in U_n(Z(ZG))\mid \beta_v(1_G)=1\}$ – множество центральных единиц, у которых сумма коэффициентов при разложении по всем элементам группы равна 1.

Изучение локального случая

Пусть χ – нецелый неприводимый характер группы A_n, нецелые значения χ это $(1+b\sqrt{d})/2$ и $(1-b\sqrt{d})/2$, где b – натуральное число, d – целое число свободное от квадратов. Положим $\omega_d=(1+\sqrt{d})/2$, $\sigma=(1+b\sqrt{d})/2=\dfrac{1-b}{2}+b\omega_d$ и $*\sigma=(1-b\sqrt{d})/2=\dfrac{1-b}{2}+b\omega_d^*$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.

$$\omega_d^2 = \frac{d-1}{4} + \omega_d,\ \omega_d^* = 1-\omega_d,\ tr\ \omega_d = tr\ \omega_d^* = 1,\ tr\ \omega_d^2 = \frac{d-1}{2}+1,\ \omega_d\omega_d^* = \frac{1-d}{4}.$$

Лемма 4. *Пусть* λ *– единица кольца* $Z[b\omega_d]$, $u(\lambda)=\sum \gamma_i y_i$ *– локальная единица* $U(Z(ZA_n))$. *Тогда согласно* [5]

$$\gamma_i = \frac{tr(\chi(x_i)(\lambda-1))}{z}, \tag{1}$$

где $z = |A_n|/\deg\chi$, y_i *– классовые суммы для классов с представителями* x_i, γ_i *– целые числа.*

Лемма 5. *Пусть* $\lambda = \alpha + \beta\omega_d$, *тогда*

$$tr(\lambda-1) = 2(\alpha-1)+\beta, \tag{2}$$

$$tr(\sigma(\lambda-1)) = (\alpha-1) + \frac{1+bd}{2}\beta, \tag{3}$$

$$tr(^*\sigma(\lambda-1)) = (\alpha-1) + \frac{1-bd}{2}\beta. \tag{4}$$

Доказательство. В самом деле

$$tr(\lambda-1) = tr((\alpha-1)+\beta w_d) = 2(\alpha-1)+\beta,$$

$$tr(\sigma(\lambda-1)) = tr\left(\left(\frac{1-b}{2}+\beta\omega_d\right)\left(\alpha-1+\beta\omega_d\right)\right) = tr\left(b\beta\omega_d^2 + \left(b\left(\alpha-1\right)+\frac{1-b}{2}\beta\right)\omega_d + \frac{1-b}{2}(\alpha-1)\right) =$$

$$= b\beta\frac{d+1}{2} + b\left(\alpha-1\right) + \frac{1-b}{2}\beta + 2\left(1-b\right)\left(\alpha-1\right) = \left(\alpha-1\right) + \frac{bd+b+1-b}{2}\beta = \left(\alpha-1\right)+\frac{1+bd}{2}\beta,$$

$$tr(^*\sigma(\lambda-1)) = tr\left(\left(\frac{1-b}{2}+b-b\omega_d\right)\left(\alpha-1+\beta\omega_d\right)\right) = tr\left(\left(\frac{1+b}{2}-b\omega_d\right)\left(\alpha-1+\beta\omega_d\right)\right) =$$

$$= \left(\alpha-1\right) + \frac{1-bd}{2}\beta.$$

Лемма 6. *Локальная единица* $u(\lambda)\in U_n\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$ *тогда и только тогда, когда для некоторого целого* t

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{z}{2}\dfrac{bd+1}{bd}t, \\ \beta = -\dfrac{z}{bd}t. \end{cases}$$

По-другому $u(\lambda)\in U_n\left(Z\left(ZA_n\right)\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda \in 1 + zZ\left[b\omega_d\right]$.

Доказательство. По условию леммы 6 нужно, чтобы γ_i *для всех* i *были целыми. Из вида таблицы характеров следует, что будут интересны*

$$\begin{cases} \dfrac{tr\left(\lambda-1\right)}{z} = \dfrac{2\left(\alpha-1\right)+\beta}{z}, \\ \dfrac{tr\left(\sigma\left(\lambda-1\right)\right)}{z} = \dfrac{\left(\alpha-1\right)+\beta(1+bd)/2}{z}, \\ \dfrac{tr\left(^*\sigma\left(\lambda-1\right)\right)}{z} = \dfrac{\left(\alpha-1\right)+\beta(1-bd)/2}{z}. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, нужно чтобы выполнялись условия системы

$$\begin{cases} z\,|\,2\left(\alpha-1\right)+\beta \\ z\,|\left(\alpha-1\right)+\beta\left(1+bd\right)/2 \\ z\,|\left(\alpha-1\right)+\beta\left(1-bd\right)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\,|\,2\left(\alpha-1\right)+\beta \\ z\,|\left(\alpha-1\right)+\beta\left(1+bd\right)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\alpha-1\right)+\beta+zv_1=0 \\ \left(\alpha-1\right)+\beta\left(1+bd\right)/2+zv_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\alpha-1\right) = -\beta/2 - zv_1/2 \\ -\beta/2 - zv_1/2 + \beta\left(1+bd\right)/2 + zv_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\alpha-1\right) = -\beta/2 - zv_1/2 \\ \beta = zv_1/bd - 2zv_2/bd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\alpha-1\right) = z\left(2v_2-v_1\right)/2bd - zv_1/2 \\ \beta = -2\left(2v_2-v_1\right)/bd \end{cases}.$$

Так как интересует делимость на z, то можно упростить решение:

$$\begin{cases}(\alpha-1)=z(2v_2-v_1)/2bd-zv_1/2+zv_2\\ \beta=-2(2v_2-v_1)/bd\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1+zt/2bd+zt/2\\ \beta=-zt/bd\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}a=1+\dfrac{z}{2}\dfrac{bd+1}{bd}t\\ \beta=-\dfrac{z}{bd}t\end{matrix}.$$

Лемма доказана.

Будем изучать $u(\lambda)$ для характеров $\chi=\chi_{20}$ степени 4752, $\chi=\chi_{57}$ степени $29\,952$, $\chi=\chi_{59}$ степени $34\,320$.

Лемма 7. *Значения характеров* χ_{20}, χ_{57}, χ_{59} *лежат в кольцах* $Z[\omega_{13}]$, $Z[\omega_{33}]$, $Z[3\omega_5]$, *при этом группы единиц данных колец:*

$$U(Z[\omega_{13}])=<-1>\times<1+\omega_{13}>,$$
$$U(Z[\omega_{33}])=<-1>\times<19+8\omega_{33}>,$$
$$U(Z[3\omega_5])=<-1>\times<2+3\omega_5>.$$

Поэтому

$$\lambda_{20}=\varepsilon_{20}(1+\omega_{13})^k,\ \lambda_{57}=\varepsilon_{57}(19+8\omega_{33})^m,\ \lambda_{59}=\varepsilon_{59}(2+3\omega_5)^n, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{20},\varepsilon_{57},\varepsilon_{59}\in\{-1,1\}$ *и* $k,m,n\in Z$.

Обозначение 2. $z_{20}=z(\chi_{20})=\dfrac{|A_{14}|}{\deg\chi_{20}}=\dfrac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{4752}=\dfrac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{2^4\cdot3^3\cdot11}=$

$=2^6\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot13=9\,172\,800$,

$$z_{57}=z(\chi_{57})=\frac{|A_{14}|}{\deg\chi_{57}}=\frac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{29\,952}=\frac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{2^8\cdot3^2\cdot13}=2^2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^2\cdot11=1\,455\,300$$

$$z_{59}=z(\chi_{59})=\frac{|A_{14}|}{\deg\chi_{59}}=\frac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{34\,320}=\frac{2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}{2^4\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13}=2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7^2=1\,270\,080.$$

Лемма 8. *Пусть* $l=\exp(U(Z[\omega]/zZ[\omega]))$ *– показатель группы единиц* $U(Z[\omega]/zZ[\omega])$, *фактор кольца* $Z[\omega]/zZ[\omega]$. *Тогда*

$$l_{20}=43\,680,\ \text{для}\ z_{20}=2^6\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot13=9\,172\,800, \tag{7}$$

$$l_{57}=55\,440,\ \text{для}\ z_{57}=2^2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^2\cdot11=1\,455\,300, \tag{8}$$

$$l_{59}=30\,240,\ \text{для}\ z_{59}=2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7^2=1\,270\,080. \tag{9}$$

Доказательство. Так как $z_{20}=2^6\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot13=9\,172\,800$, то по лемме 3 из [1] l_{20} – наименьшее общее кратное чисел $\exp(U(Z[\omega]/P^{6e_2}))$, $\exp(U(Z[\omega]/T^{2e_3}))$, $\exp(U(Z[\omega]/F^{2e_5}))$, $\exp(U(Z[\omega]/S^{2e_7}))$, $\exp(U(Z[\omega]/E^{e_{13}}))$, где P – простой идеал из $Z[\omega]$, содержащий 2, и e_2 – его индекс ветвления над $2Z$, T – простой идеал из $Z[\omega]$, содержащий 3, и e_3 – его индекс ветвления над $3Z$, F – простой идеал из $Z[\omega]$, содержащий 5, и e_5 – его индекс ветвления над $5Z$, S – простой идеал из $Z[\omega]$, содержащий 7, и e_7 – его индекс ветвления над $7Z$, E – простой идеал из $Z[\omega]$, содержащий 13, и e_{13} – его индекс ветвления над $13Z$.

Теперь по предложению 5 из [6] имеем

$$\exp(U(Z[\omega]/P^{6e_2}))=3\cdot2^5=96,\qquad \exp(U(Z[\omega]/T^{2e_3}))=2\cdot3=6,$$

$$\exp(U(Z[\omega]/F^{2e_5}))=4\cdot5=20,\qquad \exp(U(Z[\omega]/S^{2e_7}))=6\cdot7=42,$$

$$\exp\left(U\left(Z[\omega]/E^{e_{13}}\right)\right)=12\cdot 13=156.$$

Отсюда $l_{20}=\text{НОК}(96,6,20,42,156)=2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13=43\,680$.

Доказательство утверждения для l_{57} и l_{59} опустим, так как оно аналогичное.

Теорема 1. *Допустим, что* $u_{20}(\lambda)\in U(Z(ZA_{14}))$. *Тогда* $\lambda=(1+\omega_{13})^{3360k}$ *для подходящего целого* k.

Доказательство. По лемме 7

$$\lambda=\varepsilon(1+\omega_{13})^k=\alpha_k+\beta_k\omega_{13},$$

где $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $k,\alpha,\beta\in Z$.

Поймём, что достаточно рассматривать случай, когда $k\ge 0$. Заметим, что

$$\lambda^*=\alpha_k+\beta_k\omega_{13}^*=\varepsilon\left(1+\omega_{13}^*\right)^k=\varepsilon(1+\omega_{13})^{-k}.$$

Тогда

$$u(\lambda)u\left(\lambda^*\right)=1.$$

Из алгебраической сопряжённости характеров χ_{20} и χ_{21} получаем, что одновременно $u(\lambda)$ и $u\left(\lambda^*\right)$ принадлежат $U(Z(ZA_{14}))$. Отсюда и получаем, что достаточно рассматривать случай, когда $k\ge 0$.

Итак, $k\ge 0$. Пусть для любого неотрицательного целого k

$$(1+\omega_{13})^k=\alpha_k+\beta_k\omega_{13}.$$

По лемме 6 получим

$$\alpha_k\equiv 1+4\,939\,200\cdot t\ (\mathrm{mod}\ 9\,172\,800)\ \text{и}\ \beta_k\equiv 8\,467\,200\cdot t\ (\mathrm{mod}\ 9\,172\,800). \qquad (10)$$

По китайской теореме об остатках получим, что эти условия равносильны системе условий:

$$\begin{cases}\alpha_k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 64)\\ \beta_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 64)\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha_k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 9)\\ \beta_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha_k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 25)\\ \beta_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 25)\end{cases},$$

$$\begin{cases}\alpha_k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 49)\\ \beta_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 49)\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha_k\equiv 1+6\cdot t\ (\mathrm{mod}\ 13)\\ \beta_k\equiv t\ (\mathrm{mod}\ 13)\end{cases}. \qquad (11)$$

Согласно лемме 7 [4] имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{k+2}=3\alpha_{k+1}+\alpha_k,\ \alpha_0=1,\ \alpha_1=1,$$
$$\beta_{k+2}=3\beta_{k+1}+\beta_k,\ \beta_0=0,\ \beta_1=1,$$

поскольку $tr(1+\omega_{13})=3$ и $Norm(1+\omega_{13})=-1$ по лемме 5. Посчитаем последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ по модулям $64, 9, 25, 49, 13$.

По модулю 64 имеем:

$$\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}=\{1,1,4,13,43,14,21,13,60,1,63,62,57,41,52,5,3,14,45,21,44,25,55,62,49,17,36,$$
$$61,27,14,5,29,28,49,47,62,41,57,20,53,51,14,29,37,12,9,39,62,33,33,4,45,$$
$$11,14,53,45,60,33,31,62,25,9,52,37,35,14,13,53,44,57,23,62,17,49,36,29,59,$$
$$14,37,61,28,17,15,62,9,25,20,21,19,14,61,5,12,41,7,62,1,1,\ldots\},$$

$$\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}=\{0,1,3,10,33,45,40,37,23,42,21,41,16,25,27,42,25,53,56,29,15,10,45,17,32,49,$$
$$51,10,17,61,8,21,7,42,5,57,48,9,11,42,9,5,24,13,63,10,29,33,0,33,35,10,1,$$
$$13,40,5,55,42,53,9,16,57,59,42,57,21,56,61,47,10,13,49,32,17,19,10,49,29,8,$$
$$53,39,42,37,25,48,41,43,42,41,37,24,45,31,10,61,1,0,1,\ldots\}.$$

Получаем, что эти последовательности периодичны с периодом 96, по соотношениям (11) подходят

$$\begin{cases} \alpha_{96p_1} \equiv 1 \pmod{64}, \\ \beta_{96p_1} \equiv 0 \pmod{64} \end{cases}$$

для любого целого $p_1 \geq 0$. По модулю 9 подходят α_{6p_2} и β_{6p_2} для любого целого $p_2 \geq 0$. По модулю 25 подходят α_{60p_3} и β_{60p_3} для любого целого $p_3 \geq 0$. По модулю 49 подходят α_{112p_4} и β_{112p_4} для любого целого $p_4 \geq 0$. По модулю 13 подходят α_{4p_5} и β_{4p_5} для любого целого $p_5 \geq 0$. Таким образом, получаем $k = 96p_1 = 6p_2 = 60p_3 = 112p_4 = 4p_5$.

Наименьшее общее кратное чисел $96, 6, 60, 112, 4$ равно

$$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3360.$$

Применение леммы 10 завершает доказательство.

Теорема 2. *Допустим, что* $u_{57}(\lambda) \in U(Z(ZA_{14}))$. *Тогда* $\lambda = (19 + 8\omega_{33})^{840m}$ *для подходящего целого* m.

Теорема 3. *Допустим, что* $u_{59}(\lambda) \in U(Z(ZA_{14}))$. *Тогда* $\lambda = (2 + 3\omega_5)^{504n}$ *для подходящего целого* n.

Изучение глобального случая

Лемма 9. *Пусть* $u = u_{20}(\lambda_{20}) u_{57}(\lambda_{57}) u_{59}(\lambda_{59}) \in U(Z(ZA_{14}))$, *тогда*

$$\lambda_{20} = (1 + \omega_{13})^k = \alpha_k + \beta_k \omega_{13} \text{ и } \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{9\,172\,800},$$

$$\lambda_{57} = (19 + 8\omega_{33})^m = \alpha'_m + \beta'_m \omega_{33} \text{ и } \alpha'_m + 17\beta'_m \equiv 1 \pmod{1\,455\,300},$$

$$\lambda_{59} = (2 + 3\omega_5)^n = \alpha''_n + \beta''_n \omega_5 \text{ и } \alpha''_n + 8\beta''_n \equiv 1 \pmod{1\,270\,080}.$$

Доказательство. Докажем истинность леммы для характера χ_{20} (для χ_{57} и χ_{59} доказательство аналогичное).

Рассмотрим коэффициент $\gamma_v(x)$ соответствующий 48-му столбцу в таблице характеров группы A_{14}. Из леммы 1.45 [5]:

$$\gamma_v(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in Irr(G)} (\deg \chi) \overline{\chi(x)} \beta_v(x). \tag{12}$$

В сумме (12) $\beta_v(x) = 1$ для всех характеров, за исключением χ_{20}, χ_{57} и χ_{59}, следовательно нужно вычислить эту независящую от λ часть и уже на основе данного значения искать нужную степень единицы кольца $Z[\omega_{13}]$. Заметим также, что в столбце 48 таблицы характеров в строках, соответствующих характерам χ_{57} и χ_{59}, стоят нули, таким образом получаем следующее выражение для γ:

$$\gamma = -\frac{1}{9\,172\,800} + \deg \chi_{20} \left(\frac{\omega_{13}(1+\omega_{13})^k}{|A_{14}|} + \frac{\omega_{13}^*(1+\omega_{13}^*)^k}{|A_{14}|} \right) =$$

$$= -\frac{1}{9\,172\,800} + \frac{1}{9\,172\,800} \left(\omega_{13}(1+\omega_{13})^k + \omega_{13}^*(1+\omega_{13}^*)^k \right) =$$

$$= \frac{1}{9\,172\,800} \left(\alpha_k (\omega_{13} + \omega_{13}^*) + \beta_k (\omega_{13}^2 + \omega_{13}^{*2}) \right) = \frac{1}{9\,172\,800} (\alpha_k + 7\beta_k - 1). \tag{13}$$

Из (13) следует, что для целочисленности γ необходимо выполнение условия $\alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{9\,172\,800}$. *Лемма доказана.*

Найдем степени фундаментальных единиц квадратичных полей, которые необходимы для получения глобальных центральных единиц группы $U(Z(ZA_{14}))$.

Лемма 10. *Пусть* $u = u_{20}(\lambda_{20})u_{57}(\lambda_{57})u_{59}(\lambda_{59}) \in U(Z(ZA_{14}))$, *тогда*

$$\lambda_{20} = (1+\omega_{13})^{3360k} \text{ и } u_{20} \in U(Z(ZA_{14})),$$
$$\lambda_{57} = (19+8\omega_{33})^{840m} \text{ и } u_{57} \in U(Z(ZA_{14})),$$
$$\lambda_{59} = (2+3\omega_{5})^{504n} \text{ и } u_{59} \in U(Z(ZA_{14}))$$

для подходящих $k, n, m \in Z$.

Доказательство. Докажем истинность леммы для характера χ_{20} (для χ_{57} и χ_{59} доказательство аналогичное).

Согласно лемме 9 и китайской теореме об остатках получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{64} \\ \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{9} \\ \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{25}. \\ \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{49} \\ \alpha_k + 7\beta_k \equiv 1 \pmod{13} \end{cases} \tag{14}$$

На основании уже вычисленных при доказательстве теоремы 1 последовательностей $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ по модулям $64, 9, 25, 49, 13$ проанализируем выражение $\alpha_k + 7\beta_k$.

По модулю 64 имеем:

$$\{\alpha_k + 7\beta_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1,8,25,19,18,9,45,16,29,39,18,29,41,24,49,43,50,1,53,32,21,31,50,53,$$
$$17,40,9,3,18,57,61,48,13,23,18,13,57,56,33,27,50,49,5,0,5,15,50,$$
$$37,33,8,57,51,18,41,13,16,61,7,18,61,9,24,17,11,50,33,21,32,53,$$
$$63,50,21,49,40,41,35,18,25,29,48,45,55,18,45,25,56,1,59,50,17,$$
$$37,0,37,47,50,5,1,8,\ldots\}.$$

Получаем, что эти последовательности периодичны с периодом 96, по соотношениям (14) подходят индексы 0, 17 и 86. На основании леммы 10 показатель группы единиц $l_{20} = 43680$, а так как 17, 86 не делят l_{20}, то подходят только α_{96p_1} и β_{96p_1} для любого целого $p_1 \ge 0$.

По модулю 9 подходят α_{6p_2} и β_{6p_2} для любого целого $p_2 \ge 0$.

По модулю 25 подходят α_{60p_3} и β_{60p_3} для любого целого $p_3 \ge 0$.

По модулю 49 подходят α_{112p_4} и β_{112p_4} для любого целого $p_4 \ge 0$.

По модулю 13 подходят α_{4p_5} и β_{4p_5} для любого целого $p_5 \ge 0$.

Таким образом, получаем

$$k = 96p_1 = 6p_2 = 60p_3 = 112p_4 = 4p_5.$$

Наименьшее общее кратное чисел $96, 6, 60, 112, 4$ равно

$$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3360.$$

Лемма доказана.

Следствием является теорема о строении группы центральных единиц $U(Z(ZA_{14}))$.

Теорема 4.

$$U(Z(ZA_{14})) = <-1> \times <u_{20}(1+\omega_{13})^{3360}> \times <u_{57}(19+8\omega_{33})^{840}> \times <u_{59}(2+3\omega_5)^{504}>.$$

Доказательство. На основании теорем 1, 2 и 3 известны локальные единицы группы $U(Z(ZA_{14}))$. Если учитывать композиции единиц квадратичных полей, порожденных различными характерами A_{14}, то могут появиться новые единицы группы $U(Z(ZA_{14}))$, которые отсутствуют в локальном случае.

В лемме 10 находится нижняя граница для степеней единиц квадратичных полей, она совпадает с локальным случаем. Следовательно, глобальный случай исчерпывается локальными единицами. *Теорема доказана.*

Литература

1. Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. / Р.Ж. Алеев // Матем. труды. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 3–37.

2. Ferraz R.A. Simple components and central units in group rings. / R.A. Ferraz // Intern. J. of Algebra. – 2004. – V. 279, № 1. – P. 191–203.

3. Алеев Р.Ж. Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / Р.Ж. Алеев, А.В. Каргаполов, В.В. Соколов // Фундамент. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, № 7. – С. 15–21.

4. Алеев Р.Ж. О группах центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп / Р.Ж. Алеев, В.В. Соколов // Труды института математики. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 3–11.

5. Алеев Р.Ж. Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. … д-ра физ.-мат. наук / Р.Ж. Алеев. – Челябинск, 2000. – 355 с.

6. Алеев Р.Ж. Числа Хигмана конечных групп / Р.Ж. Алеев // Матем. труды. – 2000. – Т. 3, № 2. – С 3–28.

Поступила в редакцию 3 февраля 2011 г.

CENTRAL UNIT GROUP OF INTEGRAL GROUP RING OF ALTERNATING GROUP OF DEGREE 14

Central unit group of integral group ring of alternating group of degree 14 is considered. For the first time full definition of central unit group of integral group ring of alternating group, whose rank is greater than one, was received.

Keywords: group ring, alternating group, central unit, local unit, irreducible characters.

Kargapolov Andrey Valerievich is Graduated Student, Algebra Department, South Ural State University.

Каргаполов Андрей Валерьевич – аспирант, кафедра алгебры, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: akargapolov@gmail.com