УДК 519.833.7

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА И ЕЕ ГАРАНТИРОВАННОМ ПО ВЫИГРЫШАМ И РИСКАМ РЕШЕНИИ[1]

К.Н. Кудрявцев

Рассмотрена математическая модель рынка бесконечно делимого продукта с двумя товаропроизводителями и учетом возможности неожиданного появления импортера, представляющая собой кооперативную игру с побочными платежами и при неопределенности. Для данной игры найдено гарантированное по выигрышам и рискам решение.

1. Введение

Рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности, которая отождествляется с упорядоченной четверкой

$$\Gamma=\left\langle\{1,2\},\{X_i\}_{i=1,2},Y,\{f_i(x,y)\}_{i=1,2}\right\rangle.$$

Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков. Стратегии i'-го игрока x_i являются элементами множество стратегий $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$. В экономических задачах стратегиями могут быть, например, цены и объемы поставок товара на рынок (определяемые продавцом), устанавливаемые руководством премии, штрафы и другие меры поощрения и наказания, внедрение ресурсосберегающих технологий и т.д. О неопределенности $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ игроки не имеют каких-либо статистических данных, известны только границы изменения неопределенности. В «роли» неопределенности могут выступать, например, непредсказуемые для игроков изменения погодных условий, конъюнктуры рынка, законодательства, неожиданные скачки курсов валют и т.п.

В результате согласованного выбора игроками своих стратегий $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2)$ складывается ситуация $x=(x_1,x_2)\in X=X_1\times X_2\subseteq\mathbb{R}^n$ $(n=n_1+n_2)$. Независимо от действий игроков реализуется одна из неопределенностей $y\in Y$.

На образовавшихся в результате парах $(x,y)\in X\times Y$ определена скалярная функция выигрыша 2-го игрока $f_i(x,y): X\times Y\to\mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. Значение функции выигрыша $f_i(x,y)$ на реализовавшейся ситуации x и появившейся независимо неопределенности y есть *предварительный выигрыш* /-го игрока. Полученный таким образом суммарный выигрыш $f_1(x,y)+f_2(x,y)$ игроки предполагают в дальнейшем распределить между собой. Аналогично игроки поступают и с рисками.

Цель i-го игрока, на «содержательном уровне», состоит в совместном и согласованном с партнером выборе такой своей стратегии и такого перераспределения суммы выигрышей и суммы рисков, чтобы полученный в результате его окончательный выигрыш стал возможно *большим,* а окончательный риск (определенный ниже) возможно *меньшим.*

2. Гарантированное по выигрышам и рискам решение

Следуя принципу минимаксного сожаления Сэвиджа [1] и учитывая «кооперативный характер» игры (1) введем функцию риска /-го игрока $\Phi_i(x,y)$ (i= 1,2) в виде [2]

$$\Phi_i(x,y)=f_i\left(x^P(y),y\right)-f_i(x,y)\ (i=1,2), \tag{2}$$

где $x^P(y)\in X$ $\forall y\in Y$ - максимальная по Парето альтернатива в двухкритериальной задаче

$$\Gamma(y)=\left\langle X,\{f_i(x,y)\}_{i=1,2}\right\rangle,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00419).

полученной из игры (1) при каждой фиксированной неопределенности $y \in Y$.

Согласно [3, с. 80]: Если существуют альтернатива $x^P(y)$ и число $\alpha \in (0,1)$ такие, что

$$\max_{x \in X}\left[\alpha f_1(x,y)+(1-\alpha)f_2(x,y)\right] = Idem\left[x \to x^P(y)\right] \quad \forall y \in Y, \tag{4}$$

то $x^P(y)$ является максимальной по Парето в задаче (3) при каждом $y \in Y$.

В (4) и далее $Idem\left[x \to x^P(y)\right]$ означает скобку [...] в левой части тождества (4), где x заменено на $x^P(y)$.

Значение функции риска $\Phi_i(x,y)$ (i = 1, 2) называется [4, с. 15] риском i-го игрока. Функция $\Phi_i(x,y)$ численно оценивает риск i-го игрока, связанный с тем, что он выбрал свою стратегию из ситуации x, а не из $x^P(y)$, хотя последняя и доставляет максимум по Парето в двухкритериальной задаче (3).

Для каждой функции выигрыша $f_i(x,y)$ (i =1, 2) введем следующие максимины

$$f_1^0[y] = \max_{x_1 \in X_1}\min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1,x_2,y),$$
$$f_2^0[y] = \max_{x_2 \in X_2}\min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1,x_2,y) \quad \forall y \in Y. \tag{5}$$

Аналогично для каждой функции риска $\Phi_i(x,y)$ (i = 1, 2) далее используем следующие минимаксы

$$\Phi_1^0[y] = \min_{x_1 \in X_1}\max_{x_2 \in X_2} \Phi_1(x_1,x_2,y),$$
$$\Phi_2^0[y] = \min_{x_2 \in X_2}\max_{x_1 \in X_1} \Phi_2(x_1,x_2,y) \quad \forall y \in Y. \tag{6}$$

Будем предполагать, что каждый игрок может передать партнеру часть своего выигрыша и часть риска. При этом считаем, что выигрыши суммируются только с выигрышами, а риски с рисками.

Ниже применяются вектора $f = (f_1, f_2)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ и полагаем, что все максимумы и минимумы в следующем определении достигаются, а функции $f_i(x,y)$ и $\Phi_i(x,y)$ непрерывны на произведении компактов $X \times Y$.

Определение 2.1. Гарантированным по выигрышам и рискам решением (ГВР) кооперативной игры двух лиц с побочными платежами и при неопределенности (1) называется [2] тройка (x^*, f^*, Φ^*), для которой существует неопределенность $y_P \in Y$ такая, что выполняются следующие три условия:

1^0 *условие коллективной рациональности*

$$\max_{x \in X}\sum_{i=1}^{2} f_i(x, y_P) = Idem\left[x \to x^*\right]; \tag{7}$$

2^0 условие *«неухудшаемости» суммарного выигрыша и риска*

$$\min_{y \in Y}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i(x^*,y) - \Phi_i(x^*,y)\right] = Idem[y \to y_P]; \tag{8}$$

3^0 *условие индивидуальной рациональности*:

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x^*, y_P) = \sum_{i=1}^{2} f_i^* \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{2}\Phi_i(x^*, y_P) = \sum_{i=1}^{2}\Phi_i^*,$$

и справедлива система из четырех неравенств

$$f_i^* \geq f_i^0\left[y_P\right], \ \Phi_i^* \leq \Phi_i^0\left[y_P\right] \ (i = 1, 2); \tag{9}$$

при этом пару $f^* = \left(f_1^*, f_2^*\right)$ назовем *гарантированным векторным дележом*, пар $\Phi^* = \left(\Phi_1^*, \Phi_2^*\right)$ - *гарантированным векторным риском* (1), а x^* - ситуацией, гарантирующей эти дележи и риски.

Замечание 2.1. [2] Пара $\left(x^*, y_P\right)$, найденная из требований 1^0 и 2^0 определения 2.1 является седловой точкой для антагонистической игры

$$\left\langle X, Y, \sum_{i=1}^{2}\left[f_i(x,y) - \Phi_i(x,y)\right]\right\rangle,$$

то есть

$$\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i(x,y_P) - \Phi_i(x,y_P)\right] = \sum_{i=1}^{2}\left[f_i\left(x^*,y_P\right) - \Phi_i\left(x^*,y_P\right)\right] = \min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i\left(x^*,y\right) - \Phi_i\left(x^*,y\right)\right].$$

В работе [2] установлены свойства гарантированного по выигрышам и рискам решения и предложен способ его построения. В настоящей статье найдено ГВР для модели рынка с двумя производителями и учетом в этой модели непредсказуемых «действий» импортера.

3. Модель рынка с двумя товаропроизводителями и учетом импорта

Рассматривается функционирование рынка бесконечно делимого продукта (например, рынок зерна, муки, сахара) с учетом возможности неожиданного появления еще одного продавца (импортера). Предполагается, что функция спроса на продукт известна. Спрос определяется следующим образом: «*спрос* показывает то количество продукта, на которое (при прочих равных условиях) будет предъявлен спрос при разных ценах» [5], т.е. спрос показывает количество продукта, которое потребители вынуждены покупать по разным возможным ценам. При рассмотрении величины спроса (а также предложения) здесь принимается условие неизменности всех влияющих факторов, кроме цены товара. Спрос представляется в виде невозрастающей функции, которая определена при положительных значениях аргумента и принимает только положительные значения. Будем рассматривать функцию спроса с постоянным коэффициентом эластичности. Такую функцию можно [5] представить в виде

$$\varphi(p) = b - \frac{b}{a}p,\ 0 < p < a,$$

где b/a - коэффициент эластичности спроса на данном рынке, $p \in (0, a)$ - цена товара, a - его максимально возможная цена, b - максимальное количество товара, которое может поглотить рынок.

«*Предложение* показывает, какое количество товара будет предъявлено к продаже по разным ценам» [5]. Предложение описывается неубывающей функцией цены. Эта функция также определена для положительных значений аргумента и принимает положительные значения.

Далее ограничимся случаем двух товаропроизводителей и линейными функциями предложений с постоянными коэффициентами эластичности $x_i\ (i = 1,2)$ и y:

$$\psi_i(p) = x_i p\ \ (i = 1, 2),\ \psi_3(p) = yp\ \ (0 < p < +\infty).$$

При этом предполагаем, что пределы изменения индивидуальных коэффициентов эластичности заданы

$$x_i \in X_i = [k, K]\ (i = 1, 2),\ y \in Y = (0, M], \tag{10}$$

где постоянные $K > k > 0$ и $M > 0$.

Так как товаропроизводители предлагают один и тот же товар на одном и том же рынке (и поэтому находятся в одних и тех же условиях), то предполагаем, что пределы изменения их индивидуальных коэффициентов эластичности совпадают.

Совокупное предложение $\psi(p)$ всех поставщиков товара на рынок получаем суммированием всех индивидуальных функций предложения, включая и импортера $\left(\psi_3(p) = yp\right)$, т.е.

$$\psi(p)=\sum_{j=1}^{3}\psi_j(p)=(x_1+x_2+y)p.$$

Считается, что цена продукта $\bar{p}$ формируется в результате равновесия между спросом и предложением. Именно,

$$\bar{p}\in\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$$

является равновесной ценой, если выполняется равенство

$$b-\frac{b}{a}\bar{p}=(x_1+x_2+y)\bar{p}.$$

Отсюда получаем

$$\bar{p}=\frac{b}{\frac{b}{a}+x_1+x_2+y}$$

- равновесную цену $\bar{p}$ в данной задаче.

Прибыль, получаемая i-м товаропроизводителем (i = 1, 2) с проданного товара определяется значением функции

$$f_i(x_1,x_2,y)=(x_i\bar{p})\bar{p}=\frac{x_ib^2}{\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+y\right)^2}\quad (i=1,2). \tag{11}$$

Увеличение прибыли /-го товаропроизводителя (i = 1,2) достигается за счет подходящего выбора коэффициента эластичност x_i в пределах, установленных в (10).

Предполагается, что продавцы (например, в рамках одной торговой сети, или являясь членами одной этнической группы, семьи) могут совместно выбирать свои коэффициенты эластичности и передавать друг другу не только часть полученной прибыли, но и «делиться» рисками.

«Экономическая цель» /-го товаропроизводителя состоит в получении возможно большей прибыли и в меньшем риске после перераспределения общей прибыли и суммарного риска.

В качестве математической модели представленного выше взаимодействия товаропроизводителей и импортера рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности вида (1), именно,

$$\left\langle \{1,2\},\{X_i\}_{i=1,2},Y,\left\{f_i(x,y)=\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+y\right)^{-2}x_ib^2\right\}_{i=1,2}\right\rangle. \tag{12}$$

Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков (производителей); множества $X_i=[k,K]$ стратегий /-го игрока x_i $(i=1,2)$ и множество $Y=(0,M]$ неопределенностей y определены в (10); функция выигрыша $f_i(x,y)$ у i-го игрока имеет вид (11).

Упорядоченная четверка (12) является математической моделью рынка с двумя производителями и учетом «действий» импортера. Одновременно с тем, с «точки зрения» теории игр, упорядоченная четверка (12) есть кооперативная игра двух лиц при неопределенности и с побочными платежами.

Игра (12) происходит следующим образом. Игроки совместно, путем переговоров, выбирают свои стратегии (которые, напомним, представляют собой «их» коэффициенты эластичности). В результате образуется ситуация $x=(x_1,x_2)\in X=X_1\times X_2$. Независимо от такого выбора в игре (12) реализуется неопределенность $y\in Y$ (коэффициент эластичности импортера). На полученных в результате парах $(x,y)\in X\times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y)$ $(i=1,$ $2)$ из (11), оценивающая его предварительную прибыль. После этого игроки согласованно перераспределяют суммарную прибыль, исходя из условий индивидуальной рациональности (9).

На «содержательном уровне» цель /-го игрока состоит в согласованном с партнером выборе такой своей стратегии $x_i\in X_i$ $(i=1,2)$ и такого согласованного перераспределения предварительных выигрышей и рисков, при которых его окончательный выигрыш (прибыль) будет возможно *большим,* а его перераспределенный риск возможно *меньшим.* Одновременно, оба игрока ориентируются на возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$.

Далее, не оговаривая особо, будем предполагать выполненными ограничения из [6, с. 176]

$$0<k<K<\frac{b}{2a}, \quad 0<M. \tag{13}$$

Лемма 3.1. Функции риска вида (2) для функций выигрыша (11) имеют вид

$$\Phi_i(x,y)=\frac{Kb^2}{\left(\frac{b}{a}+2K+y\right)^2}-\frac{x_i b^2}{\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+y\right)^2} \quad (i=1,2). \tag{14}$$

Доказательство. Используя (4), найдем максимальную по Парето альтернативу $x^p(y)$ в двухкритериальной задаче

$$\Gamma(y)=\left\langle X,\left\{f_i(x,y)=\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+y\right)^{-2}x_i b^2\right\}_{i=1,2}\right\rangle, \tag{15}$$

полученной из (12) при каждой фиксированной неопределенности $y \in Y$.

Считая в (4) постоянную $\alpha=1/2$, построим функцию

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}f_1(x,y)+\frac{1}{2}f_2(x,y)=\frac{b^2(x_1+x_2)}{2\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+y\right)^2}. \tag{16}$$

Представим (16) как функцию одной переменной $u=x_1+x_2$ при какой-либо фиксированной неопределенности $y \in Y$

$$\varphi(u,y)=\frac{ub^2}{2\left(\frac{b}{a}+u+y\right)^2}.$$

Найдем производные

$$\frac{d\varphi(u,y)}{du}=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\frac{b}{a}-u+y}{\left(\frac{b}{a}+u+y\right)^3} \quad \text{и} \quad \frac{d^2\varphi(u,y)}{du^2}=-\frac{b^2\left(2\frac{b}{a}-u+2y\right)}{\left(\frac{b}{a}+u+y\right)^4}.$$

Отсюда получаем, что максимум функции $\varphi(u,y)$ на числовой оси $\{u\}$ достигается в точке $u=b/a+y$, а точка перегиба есть $u=2(b/a+y)$.

На промежутке $(0,2(b/a+y)]$ производная $\dfrac{d^2\varphi(u,y)}{du^2}<0$ и поэтому $\varphi(u,y)$ является вогнутой по u; на $[2(b/a+y),+\infty)$ будет $\dfrac{d^2\varphi(u,y)}{du^2}>0$ и поэтому $\varphi(u,y)$ выпукла по u.

Наконец, горизонтальной асимптотой функции $\varphi(u,y)$ при $u\to+\infty$ является положительная полуось $u\in(0,+\infty)$.

Таким образом, график функции $\varphi(u,y)$ имеет вид, представленный на рисунке. Согласно рисунку и ограничениям (13) $\max\limits_{u\in[2k,2K]}\varphi(u,y)$ достигается при $u=2K$ для каждого $y \in Y$.

Итак, максимальной по Парето альтернативой в двухкритериальной задаче (15) будет ситуация $x^p(y)=(K,K)$. При этом функция риска (2) принимает вид (14).

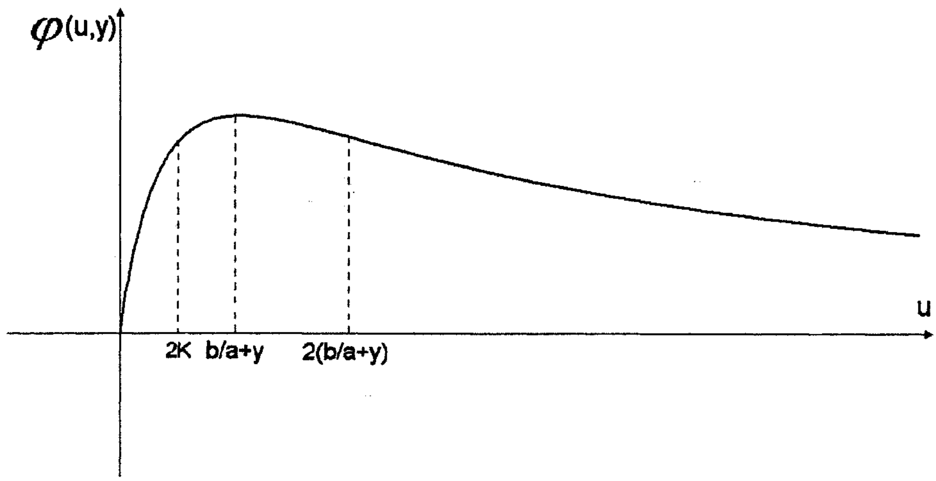

График функции $\varphi(u,y)$

Утверждение 3.1. Гарантированным по выигрышам и рискам решением кооперативной игры двух лиц при неопределенности и с побочными платежами (12) является тройка (x^*, f^*, Φ^*), где гарантированный векторный дележ

$$f^* = \left(\left(\frac{b}{a} + 2K + M\right)^{-2} Kb^2, \left(\frac{b}{a} + 2K + M\right)^{-2} Kb^2\right),$$

гарантированный векторный риск $\Phi^* = (0,0)$, а ситуация, гарантирующая эти дележи и риски, будет $x^* = (K,K)$.

Доказательство. Найдем пару (x^*, y_p), гвечающую требованиям (7) и (8) определения 2.1. Поскольку, в силу выбора $\alpha = 1/2$,

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x, y_p) = 2\varphi(x, y_p),$$

то

$$x^* = x^p(y_p) = (x_1^p(y_p), x_2^p(y_p)) = (K,K).$$

Решим оптимизационную задачу (8) при условии, что $x^* = (K,K)$.

Следуя (8), построим

$$\omega(y) = \sum_{i=1}^{2}\left[f_i(x^*, y) - \Phi_i(x^*, y)\right]$$

или, с учетом (14),

$$\omega(y) = f_1(x^*, y) + f_2(x^*, y) = \frac{2Kb^2}{\left(\frac{b}{a} + 2K + y\right)^2}.$$

Функция $\omega(y)$ строго убывает при возрастании $y \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, следовательно минимум $\omega(y)$ при ограничениях (13) достигается на $y_p = M$.

Отсюда суммарный гарантированный выигрыш игроков

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x^*, y_p) = \frac{2Kb^2}{\left(\frac{b}{a} + 2K + M\right)^2},$$

а суммарный гарантированный риск

$$\sum_{i=1}^{2}\Phi_i\left(x^*,y_p\right)=0.$$

Далее, вычислим максимины $f_1^0[M]$ и $f_2^0[M]$, определенные в (5)

$$f_1^0[M]=\max_{x_1\in[k,K]}\min_{x_2\in[k,K]}\frac{x_1b^2}{\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+M\right)^2},\quad f_2^0[M]=\max_{x_2\in[k,K]}\min_{x_1\in[k,K]}\frac{x_2b^2}{\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+M\right)^2}.$$

Поскольку функция

$$f_1(x_1,x_2,M)=\frac{x_1b^2}{\left(\frac{b}{a}+x_1+x_2+M\right)^2}$$

строго убывает при возрастании x_2 от k до K при всех фиксированных x_1 и M, и строго возрастает при возрастании x_1 от k до K (удовлетворяющих ограничениям (13)) при всех фиксированных x_2 и M, то

$$f_1^0[M]=\frac{Kb^2}{\left(\frac{b}{a}+2K+M\right)^2}.$$

Аналогично

$$f_2^0[M]=\frac{Kb^2}{\left(\frac{b}{a}+2K+M\right)^2}.$$

Минимаксы (6) будут $\Phi_1^0[M]=\Phi_2^0[M]=0$ в силу того, что $x^p(M)=x^*$.

Так как $f_i\left(x^*,y_p\right)=f_i^0\left[y_p\right]$ и $\Phi_i\left(x^*,y_p\right)=\Phi_i^0\left[y_p\right]$ $(i=1,2)$, то

$$f_i^*=f_i\left(x^*,y_p\right)=Kb^2\left(\frac{b}{a}+2K+M\right)^{-2},\quad \Phi_i^*=\Phi\left(x^*,y_p\right)=0\ (i=1,2).$$

Автор благодарит профессора В.И. Жуковского за замечания.

Литература

1. Savage L.Y. The theory of statistical decusion // J. American Statistic Association. — 1951. — №46.-P. 55-67.

2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Одна кооперативная игра с побочными платежами и учетом рисков // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2005). -Vol.16. - Simferopol, 2006.

3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. -М.: Наука, 1982.

4. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. -М.: Едиториал УРСС, 2004.

5. Макконелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс. Принципы проблемы и политика. - М.: Республика, 1992.-Т. 1,2.

6. Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. - М.: МНИИПУ, 1997.

Поступила в редакцию 27 апреля 2006 г.