УДК 517.948

О РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ[1]

Е.В. Табаринцева[2]

Рассматривается задача восстановления граничного условия по дополнительной информации о решении параболического уравнения. Приближенное решение поставленной задачи строится методом вспомогательных граничных условий с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева [1] и с использованием одной из схем апостериорного выбора параметра регуляризации. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов равномерной регуляризации.

Ключевые слова: обратная задача, метод приближенного решения, оценка погрешности.

Постановка задачи

Рассматривается задача восстановления функции $v(t)=u(1,t)$, $z(t)\in L_2[0,\infty)$ (граничного условия), где функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u \ (0<x<1;\ t>0),\qquad (1)$$
$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0$$

и дополнительному условию

$$u(x_0,t)=p(t),\ x_0\in(0,1),\ t>0. \qquad (2)$$

Здесь $a(x)\in C^2[0,1],\ a(x)\geq 0$, h_0, h_1 – заданные постоянные, $u(\bullet,t)\in C^2(0,1)\bigcap C([0,1])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$.

Рассмотрим вспомогательную «прямую» задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x)u, \qquad (3)$$
$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0;\ u(x_0,t)=p(t),$$

где $a(x)\in C^2[0,1],\ x\in(0,x_0),\ t>0$, $u(\bullet,t)\in C^2(0,x_0)\bigcap C([0,x_0])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$.

Лемма 1. Пусть $p(t), p'(t)\in L_2[0,\infty)$. Тогда задача (3) имеет решение $u(\bullet,t)\in C^2(0;x_0)\bigcap C([0;x_0])$; $u(x,\bullet)\in W_2^1(0,\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим формальное решение задачи (3), которое может быть найдено методом Фурье:

$$u(x,t)=-\frac{x}{x_0}p(t)+\int_0^t\int_0^{x_0}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau, \qquad (4)$$

где

$$f(x,t)=-\frac{x}{x_0}\left(p'(t)+a(x)p(t)\right);$$

$$G(x,\varsigma,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n(x)$$

[1] Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00063.

[2] Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра функционального анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.
e-mail: eltab@rambler.ru

– функция Грина первой краевой задачи; $X_n(x)$ – собственные функции, образующие полную ортонормированную систему в $L_2[0;x_0]$; $-\lambda_n^2$ – собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Рассмотрим следующие функциональные ряды, сходящиеся равномерно на $[0;x_0]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X'_n(x))^2}{\lambda_n^4}$$

[6, с. 500]. Для произвольных $x,\varsigma\in[0,1],\ t>t_0>0$ с учетом неравенства Коши–Буняковского имеем оценки:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\le\frac{c_0}{t},\qquad(5)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n'(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n'(x))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\le\frac{c_1}{t^2},\qquad(6)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2 t}X_n(\varsigma)X_n''(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^4}\right)^{1/2}\le\frac{c_2}{t^2},\qquad(7)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n^2 t}\right)_t X_n(\varsigma)X_n(x)\right|\le\sup_{\lambda_n}\lambda_n^4 e^{-\lambda_n^2 t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_n(\varsigma))^2}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\le\frac{c_3}{t^2}.\qquad(8)$$

Из неравенств (5)–(8) следует, что функция $G(x,\varsigma,t)$ имеет непрерывные производные $G_x(x,\varsigma,t)$, $G_{xx}(x,\varsigma,t)$, $G_t(x,\varsigma,t)$ при всех $x,\varsigma\in[0,1],\ t>t_0>0$.

Рассмотрим произвольное число $t>0$ и зафиксируем t_0, $0<t_0<t$. Очевидно, при $0\le\tau\le t_0$ функции $G(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_x(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_{xx}(x,\varsigma,t-\tau)$, $G_t(x,\varsigma,t-\tau)$ непрерывны. Рассмотрим ряд

$$P(x,\varsigma,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\,|X_n(\varsigma)||X_n(x)|\qquad(9)$$

и ряд, полученный почленным интегрированием (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\,|X_n(\varsigma)||X_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}}{\lambda_n^2}|X_n(\varsigma)||X_n(x)|.\qquad(10)$$

Из оценки, аналогичной (5), следует сходимость ряда (10) при всех $x,\varsigma\in[0,1]$. По следствию из теоремы Б. Леви [7] ряд (9) сходится почти всюду на отрезке $0\le\tau\le t$ и функция $P(x,\varsigma,\tau)$ (а, следовательно, $G(x,\varsigma,t-\tau)$) суммируема на отрезке $0\le\tau\le t$.

Используя свойство абсолютной непрерывности интеграла, по заданному числу $\varepsilon>0$ выберем $t_0>0$ такое, что

$$\left|\int_{t_0}^{t}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|<\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_{0}^{t}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|<\left|\int_{0}^{t_0}G(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\tau\right|+\varepsilon\le C\left|\int_{0}^{t_0}f(\varsigma,\tau)d\tau\right|+\varepsilon\le C\max_{x\in[0,1]}|g(x,t_0|.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x,t)=\int_0^{x_0}\int_0^{t_0}\big(G(x,\xi,t-\tau)(a(\varsigma)\varsigma p(\tau))\big)d\tau d\varsigma.$$

Так как $G(x,\varsigma,t)\in L_2[0,\infty);\ p(t)\in L_2[0,\infty)$, то $g(x,t)\in L_2[0,\infty)$ при всех $x\in[0,x_0]$. Действительно, так как $G(x,\varsigma,t)\in L_2[0,T];\ p(t)\in L_2[0,T]$, то $g(x,t)\in L_2[0,T]$ при любом $T>0$ в силу неравенства $\int_0^T\left(\int_0^t G(x,\xi,t-\tau)p(\tau)d\tau\right)^2 dt \le \int_0^T\int_0^t G^2(x,\xi,t-\tau)d\tau dt\int_0^T p^2(\tau)d\tau$. Далее выполняется неравенство

$$\int_T^\infty\left(\int_0^t G(x,\xi,t-\tau)p(\tau)d\tau\right)^2 dt \le 2\int_T^\infty\int_0^{t-1} G^2(x,\xi,t-\tau)d\tau dt\int_0^\infty p^2(\tau)d\tau + 2\int_T^\infty\int_{t-1}^t G^2(x,\xi,t-\tau)p^2(\tau)d\tau dt .$$

Оценим интегралы в правой части последнего неравенства:

$$\int_T^\infty\int_0^{t-1} G^2(x,\xi,t-\tau)d\tau dt \le \int_T^\infty\int_0^{t-1}\frac{d\tau\, dt}{(t-\tau)^2} \le \ln\frac{T}{T-1};$$

$$\int_T^\infty\int_{t-1}^t G^2(x,\xi,t-\tau)p^2(\tau)d\tau dt = \int_T^\infty\int_0^\infty \Phi^2(x,\xi,t-\tau)p^2(\tau)d\tau dt ,$$

где функция

$$\Phi(x,\xi,s) = \begin{cases} G(x,\xi,s),\ s\in(0,1], \\ 0,\ s\notin(0,1] \end{cases}$$

интегрируема на [0, ∞).

Из (5) следует оценка

$$|u(x,t)| \le C\max_{x\in[0,1]}|g(x,t)|.$$

Рассмотрим ряд

$$S(x,t,\tau) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 f_n(t)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}X_n(x), \tag{11}$$

где $f_n(t) = \int_{x_0}^1 f(\xi,t)X_n(\xi)d\xi = \frac{v'(t)-p'(t)}{1-x_0}\int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi)d\xi + \frac{p'(t)-x_0v'(t)}{1-x_0}\int_{x_0}^1 X_n(\xi)d\xi$ – коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$. Воспользуемся следующим утверждением [10, с. 414]:

Утверждение 1. Существует такая постоянная *C*, что для каждого n и в каждой точке $x\in[x_0,1]$

$$\left|X_n(x) - \sqrt{\frac{2}{1-x_0}}\sin\lambda_n x\right| \le \frac{C}{n}.$$

Из утверждения 1 следует, что

$$\left|\int_{x_0}^1 X_n(\xi)d\xi\right| \le \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}}\frac{2}{\lambda_n} + \frac{C(1-x_0)}{n}; \tag{12}$$

$$\left|\int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi)d\xi\right| \le \sqrt{\frac{2}{(1-x_0)}}\left|\int_{x_0}^1 \xi\sin\lambda_n\xi d\xi\right| + \frac{c}{n}\int_{x_0}^1 \xi d\xi \le \frac{c_1}{\lambda_n} + \frac{c_2}{n}. \tag{13}$$

Так как существует такая константа c, что при каждом n

$$\left|\lambda_n^2 - \frac{\pi^2 n^2}{(1-x_0)^2}\right| \le c$$

[10, с. 414], то из оценок (12) и (13) следует существование такой постоянной D, что

$$\left|\int_{x_0}^1 X_n(\xi)d\xi\right| \le \frac{D}{\lambda_n}, \tag{14}$$

$$\left|\int_{x_0}^1 \xi X_n(\xi)d\xi\right| \le \frac{D}{\lambda_n} \tag{15}$$

при всех n. С учетом (14) и (15) из неравенства (12) следует

$$|S(x,t,\tau)| \le D_1 \frac{|v'(t)|+|p'(t)|}{1-x_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} X_n(x) \right| \le \max_{\lambda} \lambda^{3/2} e^{-\lambda^2(t-\tau)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|. \quad (16)$$

Так как в силу утверждения 1 ряд в правой части (16) сходится при каждом $x \in [x_0;1]$, то оценка (16) принимает вид

$$|S(x,t,\tau)| \le \frac{r(x)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Следовательно, функция $S(x,t,\tau)$ суммируема на отрезке $\tau \in [0,t]$ при каждом x.
Далее, используя неравенство (5)

$$|u_x(x,t)| \le C_1 |p(t)|; \quad (17)$$
$$|u_{xx}(x,t)| \le C_2 |p(t)|;$$
$$|u_t(x,t)| \le C_3 \left(|p(t)|+|p'(t)|\right).$$

Из полученных оценок следует, что $u_{xx}(x,t),\ u_t(x,t) \in L_2(0,\infty)$ при любом $x \in [0,x_0]$.

Таким образом, функция $u(x,t)$ является решением задачи (3).

Решая задачу (3), определим функцию $q(t) = u_x(x_0,t)$. Из оценки (17) следует неравенство

$$\|q(t)\|_{L_2[0,\infty)} \le C_1 \|p(t)\|_{L_2[0,\infty)}.$$

Следовательно, исходная задача сведется к задаче восстановления функции $v(t) = u(1,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \quad (18)$$
$$u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=p(t);\ u_x(x_0,t)=q(t),$$

$x \in (x_0,1),\ t>0$.

Замечание. Так как задачу (18) можно разбить на две задачи с однородными начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \quad (19)$$
$$u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=p(t);\ u_x(x_0,t)=0$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \quad (20)$$
$$u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=0;\ u_x(x_0,t)=q(t),$$

то далее для определенности рассматривается задача (20).

Сведение задачи (20) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть функции $q(t),\ q'(t)$ в задаче (20) принадлежат $L_2(0,\infty)$. Рассмотрим вспомогательную прямую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \quad (21)$$
$$u(x,0)=0;\ u(x_0,t)=0;\ u(1,t)=v(t),$$

$x \in (x_0,1),\ t>0$.

Как и при исследовании вспомогательной задачи (3), убедимся, что задача (21) имеет решение

$u(x,t)$: $u(\bullet,t) \in C^2(x_0;1) \cap C([x_0;1])$; $u(x,\bullet) \in W_2^1(0,\infty)$. Из оценки $|S(x,t,\tau)| \le \frac{r(x)}{\sqrt{t-\tau}}$ следует также, что функция

$$u_{xx}(x,t)=\int_0^t\int_0^{x_0} G_{xx}(x,\xi,t-\tau)f(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau,$$

интегрируема на любом отрезке $t\in[0,T]$, а из принадлежности функций $G_{xx}(x,\varsigma,t)$ и $f(x,t)$ пространству $L_2(0,\infty)$ при всех $x,\xi\in[x_0;1]$ следует, что $u_{xx}(x,t)$ суммируема на $[0,\infty)$ при всех $x\in[x_0;1]$. Следовательно, интеграл $\int_0^\infty u_{xx}(x,t)e^{-\lambda t}dt$ сходится равномерно по $x\in[x_0;1]$, $\lambda\in[0,\infty)$. Таким образом, к задаче (20) применимо преобразование Фурье на полупрямой $t\in(0,\infty)$.

Применяя к задаче (20) преобразование Фурье, имеем следующую задачу для линейного обыкновенного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}&U_{xx}(x,\lambda)=i\lambda U(x,\lambda)-a(x)U(x,\lambda);\\&U(x_o,\lambda)=0;\,U_x(x_o,\lambda)=Q(\lambda).\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь $U(x,\lambda)=Fu=\int_0^\infty e^{-i\lambda t}u(x,t)dt$ – образ Фурье функции $u(x,t)$.

Обозначим через $\varphi(x,t)$ решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям $\varphi(x_0,t)=0;\ \varphi_x(x_0,t)=1$.

Теорема 1. Существуют постоянные C_1,C_2,C_3,C_4,τ такие, что

$$C_1\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)}{\sqrt{\lambda}}\le|\varphi(x,\lambda)|\le C_2\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-x_0)}{\sqrt{\lambda}};$$
$$C_3\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0)\le|\varphi_x(x,\lambda)|\le C_4\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}(x-x_0)$$

при $\lambda>\tau.$

Доказательство теоремы аналогично проведенному в [2].

Решение задачи (22) имеет вид

$$V(\lambda)=Q(\lambda)\varphi(1,\lambda).$$

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $X=L_2(0,\infty)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом, определенных при $t\in[0,\infty)$ (принимающих действительные значения), Φ – пространство функций, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im}z<0$ и таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(s+i\sigma)|^2\,ds<C$$

при всех $\sigma<0$. Выполняется следующая теорема (см., напр., [9])

Теорема 2. Класс функций Φ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)dt,$$

где интеграл сходится в среднем и $\int_0^\infty|f(t)|^2dt<\infty$.

Рассмотрим равенство Парсеваля (см. [8]):

$$\int_0^\infty|f(t)|^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda.$$

Так как, очевидно, для функции $f(t)$ с действительными значениями выполняется равенство $F(-\lambda)=\overline{F}(\lambda)$, то из равенства Парсеваля следует

$$\int_0^\infty|f(t)|^2dt=4\pi\int_0^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda.$$

Следовательно, линейный оператор $F_0 : L_2[0,1] \to \Phi$, действующий по правилу

$$F_0(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-i\lambda t} f(t) dt,$$

является изометрией. Следовательно, пространства X и Y также изометричны.

Таким образом, задача (20) сводится к задаче вычисления элемента $V(\lambda) \in \Phi$ такого, что

$$V(\lambda) = \varphi(1,\lambda) Q(\lambda) = AQ(\lambda), \tag{23}$$

где $A : \Phi \to \Phi$ – неограниченный линейный оператор.

Метод вспомогательных граничных условий

Пусть вместо точного начального условия $q(t)$ в задаче (20) известны δ-приближение $q_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|q - q_\delta\| \le \delta$. Пусть известно также, что при точно заданном начальном условии $q(t)$ задача (20) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$M_r = \{v \in X;\ \ v' \in X,\ \ \|v\|^2_X + \|v'\|^2_X \le r^2\}.$$

Используя метрическую эквивалентность задач (20) и (23), построим предварительно приближенное решение задачи (23). Известно, что при заданном условии Q задача (23) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации:

$$\tilde{M}_r = \{G \in Y;\ \ \lambda G \in Y,\ \ \|\lambda G\|_Y \le r\}.$$

Требуется построить устойчивое приближенное решение задачи (23) и оценить его уклонение от точного решения.

Вместо некорректно поставленной задачи (20) рассмотрим вспомогательную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \\ u(x,0) = 0;\ u(x_0,t) = 0;\ u_x(x_0,t) + \varepsilon u(1,t) = q_\delta(t), \end{gathered} \tag{24}$$

В качестве приближенного решения задачи (20) будем рассматривать элемент

$$v_\delta(t) = u_\delta^\varepsilon(1,t), \tag{25}$$

где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (24). Применяя к задаче (24) преобразование Фурье, находим, что в качестве приближенного решения задачи (23) рассматривается элемент

$$V_\delta^\varepsilon = \frac{\varphi(1,\lambda)}{1 + \varepsilon\varphi(1,\lambda)}. \tag{26}$$

Оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий

Рассмотрим приближенное решение (26) задачи (23). В качестве характеристики точности приближенного решения (26) рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon,\delta) = \sup\left\{\left\|V_\delta^\varepsilon - V\right\| : V \in \tilde{M}_r;\ \|V - V_\delta\| \le \delta\right\}.$$

Воспользуемся очевидной оценкой

$$\Delta(\varepsilon,\delta) \le \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon,\delta),$$

где

$$\Delta_1(\varepsilon) = \sup\{\left\|V^\varepsilon - V\right\| :\ V \in \tilde{M}_r\},$$

$V^\varepsilon = U_\varepsilon(1,\lambda)$, где $u^\varepsilon(x,t)$ – решение задачи (24) с точно заданным условием $q(t)$;

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) = \sup\{\left\|V_\delta^\varepsilon - V^\varepsilon\right\| : \|Q - Q_\delta\| \le \delta\}.$$

Оценим величины $\Delta_1(\varepsilon)$, $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$.

Для величины $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$ имеем очевидную оценку

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) \le \delta \sup_{\lambda\ge 0} \frac{|\varphi(1,\lambda)|}{|1+\varepsilon\varphi(1,\lambda)|} \le \delta \sup_{\operatorname{Re} z\ge 0} \frac{|z|}{|1+\varepsilon z|} \le \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Далее,

$$\Delta_1(\varepsilon) \le r \sup_{\lambda\ge 0} \frac{\varepsilon|\varphi(1,\lambda)|}{\sqrt{1+\lambda^2}\;|1+\varepsilon\varphi(1,\lambda)|}.$$

Рассмотрим значение λ_ε, выбранное из условия $\varepsilon|\varphi(1,\lambda_\varepsilon)|=1$. С учетом теоремы 1 имеем следующее неравенство:

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon|\varphi(1,\lambda)|}{\sqrt{1+\lambda^2}\;|1+\varepsilon\varphi(1,\lambda)|} \le \sup_{0\le\lambda\le\lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \le \frac{C}{(\ln\varepsilon)^2}.$$

Далее, очевидно,

$$\sup_{\lambda\ge\lambda_\varepsilon} \frac{\varepsilon|\varphi(1,\lambda)|}{\sqrt{1+\lambda^2}\;|1+\varepsilon\varphi(1,\lambda)|} \le \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \le \frac{C}{(\ln\varepsilon)^2}.$$

Следовательно, $\Delta_1(\varepsilon) \le \dfrac{C_r}{(\ln\varepsilon)^2}$.

Выбирая зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ из условия

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{C_r}{(\ln\varepsilon)^2}$$

(квазиоптимальный выбор параметра регуляризации, [4]), получаем, что оценка погрешности приближенного решения (26) на множестве $\tilde{M}_r$ имеет вид

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C_5}{\ln^2\delta}. \tag{27}$$

В силу изометричности преобразования Фурье из оценки (27) следует

Теорема 3. При сформулированных выше условиях существуют постоянные $\delta_0; C_6$ такие, что для любого $\delta\in(0,\delta_0)$ справедливы оценки погрешности метода вспомогательных граничных условий на множестве M_r

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C_6}{\ln^2\delta}.$$

Замечание. Из оценки (27) и оценки погрешности оптимального метода решения задачи (20) (см., напр., [2]) следует, что метод вспомогательных граничных условий является оптимальным по порядку.

Апостериорный выбор параметра регуляризации

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована следующая схема, не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи (ср. [7]).

Пусть параметр регуляризации выбирается из конечного множества

$$\Lambda_N = \{\varepsilon_i : 0<\varepsilon_0<\varepsilon_1<\ldots<\varepsilon_N\}.$$

Обозначим через $V_{\varepsilon_i}^{\delta} = R_{\varepsilon_i} Q_\delta$ соответствующие приближенные решения. Пусть V – точное решение задачи (17), $V\in\tilde{M}_r$. Обозначим через ε_{opt} квазиоптимальное значение параметра регуляризации, полученное по схеме М.М. Лаврентьева. Обозначим через ε^* оптимальное значение параметра регуляризации, выбираемое из множества Λ_N, т.е.

$$\varepsilon^* = \max\{\varepsilon_i : \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\},$$

где

$$M(\Lambda_N)=\left\{\varepsilon_i\in\Lambda_N:\frac{C_r}{\ln^2\varepsilon_i}\le\frac{\delta}{\varepsilon_i}\right\}.$$

Пусть $M(\Lambda_N)\ne\varnothing$; $\Delta_N\setminus M(\Lambda_N)\ne\varnothing$.

Наряду с $M(\Lambda_N)$, рассмотрим множество

$$M^+(\Lambda_N)=\left\{\varepsilon_i\in\Lambda_N:\left\|V_{\varepsilon_i}^{\delta}-V_{\varepsilon_j}^{\delta}\right\|\le 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_j}}\ \left(j=0,1,...,i\right)\right\}.$$

Лемма 2. $M(\Lambda_N)\subseteq M^+(\Lambda_N)$

Доказательство. Рассмотрим значения параметра регуляризации $\varepsilon_i,\varepsilon_j\in\Lambda_N$; $\varepsilon_i\in M(\Lambda_N)$, $j<i$. Имеем неравенство

$$\left\|V_{\varepsilon_i}^{\delta}-V_{\varepsilon_j}^{\delta}\right\|\le\left\|V_{\varepsilon_i}^{\delta}-V\right\|+\left\|V-V_{\varepsilon_j}^{\delta}\right\|+\left\|V_{\varepsilon_i}-V_{\varepsilon_j}^{\delta}\right\|\le\frac{C_r}{\ln^2\varepsilon_i}+\frac{\delta}{\varepsilon_i}+\frac{C_r}{\ln^2\varepsilon_j}+\frac{\delta}{\varepsilon_j}\le 4\frac{\delta}{\varepsilon_j}.$$

Следовательно, $\varepsilon_i\in M^+(\Lambda_N)$.

Обоснование одного из правил апостериорного выбора параметра регуляризации дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть параметр регуляризации выбран из условия

$$\varepsilon^+=\max\left\{\varepsilon_i:\varepsilon_i\in M^+(\Lambda_N)\right\}.$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon^+(\delta),\delta)=\sup\left\{\left\|V_{\delta}^{\varepsilon}-V\right\|:G\in\tilde{M}_r;\left\|Q-Q_{\delta}\right\|\le\delta\right\}\le\frac{6C_5}{\ln^2\delta}.$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon^*=\varepsilon_l$ следует, что для ε_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{r\varepsilon_{i+1}}{e^{\frac{1}{2\varepsilon_{i+1}}}}\ge\delta=\frac{r\varepsilon_{opt}}{e^{\frac{1}{2\varepsilon_{opt}}}}.$$

Следовательно, в силу монотонности функции $s(x)=\dfrac{rx}{e^{\frac{1}{2x}}}$ на промежутке $x\in(0,\infty)$, $\varepsilon_{l+1}\ge\varepsilon_{opt}$ и

$$\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{i+1}}}\le\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_{opt}}}.$$

В силу леммы 2, так как $M(\Lambda_N)\subseteq M^+(\Lambda_N)$,

$$\varepsilon^*=\varepsilon_l=\max\left\{\varepsilon_i:\varepsilon_i\in M(\Lambda_N)\right\}\le\varepsilon^+=\max\left\{\varepsilon_i:\varepsilon_i\in M^+(\Lambda_N)\right\}.$$

Из определения $M^+(\Lambda_N)$ следует

$$\Delta(\varepsilon^+(\delta),\delta)=\sup\left\{\left\|G_{\delta}^{\varepsilon^+}-G\right\|:G\in\tilde{M}_r;\left\|Z-Z_{\delta}\right\|\le\delta\right\}\le$$

$$\le\sup\left\{\left\|G_{\delta}^{\varepsilon^+}-G_{\delta}^{\varepsilon^*}\right\|:Z\in\tilde{M}_r;\left\|Z-Z_{\delta}\right\|\le\delta\right\}+\sup\left\{\left\|G_{\delta}^{\varepsilon^*}-G\right\|:G\in\tilde{M}_r;\left\|Z-Z_{\delta}\right\|\le\delta\right\}\le$$

$$\le 4\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon_l}}+\delta e^{\frac{1}{2\varepsilon^*}}+r\varepsilon^*\le 6\Delta(\varepsilon_{opt}(\delta),\delta)\le\frac{6C_5}{\ln(1/\delta)}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики // М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Сибирское отделение АН СССР, 1962. – 92 с.

2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316–318.

3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики / А.М. Ильин. – Челябинск, Издательский центр ЧелГУ, 2005. – 171 с.

4. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995. – 176 с.

5. Танана, В.П. Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи / В.П. Танана, Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 1(21). – С. 129–142.

6. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512 с.

7. Pereverzev, S. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems / S. Pereverzev, E. Schock // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – V. 43, № 5. – P. 2060–2076.

8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 623 с.

9. Виленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1965. – 588 с.

10. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 430 с.

Поступила в редакцию 15 февраля 2011 г.

ABOUT SOLUTION OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION BY MEANS OF SUBSIDIARY BOUNDARY CONDITIONS METHOD

E.V. Tabarintseva[1]

The author analyses the problem of recovery of boundary condition using additional information about parabolic equation solution. An approximate solution of the posed problem is done by the subsidiary boundary conditions method with choice of the regularization parameter by the Lavrentiev scheme [1] and one of the schemes of posteriori choice regularization parameter. The author obtains an order precise error evaluation of the built approximate solution at one of the uniform regularization classes.

Keywords: inverse problem, approximate method, error evaluation.

References

1. Lavrent'ev M.M. *O nekotoryh nekorrektnyh zadachah matematicheskoj fiziki* (About some ill-defined problems of mathematical physics). Novosibirsk, Sibirskoe otdelenie AN SSSR, 1962. 92 p.

2. Tanana V.P. *Dokl. RAN*. 2006. Vol. 407, no. 3. pp. 316–318. (in Russ.).

3. Il'in A.M. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics). Chelyabinsk, Izdatel'skij centr ChelGU, 2005. 171 p. (in Russ.).

4. Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I. *Differencial'no-operatornye uravnenija i nekorrektnye zadachi* (Differential-operator equations and ill-defined problems). Moscow, Nauka, 1995. 176 p. (in Russ.).

5. Tanana V.P., Tabarintseva E.V. Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. 2005. Vol. 8, no 1(21). pp. 129–142. (in Russ.).

6. Vladimirov V.S. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics) Moscow, Nauka, 1971. 512 p. (in Russ.).

7. Pereverzev S., Schock E. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems. *SIAM J.Numer. Anal*. 2005. Vol. 43, no 5. pp. 2060–2076.

8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis). Moscow, Nauka, 1989. 623 p. (in Russ.).

9. Vilenkin N.Ja. *Special'nye funkcii i teorija predstavlenij grupp* (Special functions and group representation theory). Moscow, Nauka, 1965. 588 p. (in Russ.).

10. Dieudonné J. *Osnovy sovremennogo analiza* (*Foundations of Modern Analysis*) Moscow, Mir, 1964. 430 p. (in Russ.). [Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960. 361 p.].

[1] Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University. e-mail: eltab@rambler.ru