УДК 515.124.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА *h*(*X*, *k*)

С.В. Медведев[1]

Пространство *h*(*X*, *k*) – это наименьшее *h*-однородное пространство первой категории, которое содержит метрическое пространство *X* в качестве замкнутого подмножества. В заметке доказывается одна внутренняя характеристика пространства *h*(*X*, *k*).

Ключевые слова: h-однородное пространство, пространство первой категории, вложение.

В статье рассматриваются только нульмерные (в смысле Ind) метрические пространства.

В заметке продолжаются исследования, начатые в работах [1] и [2]. В [2] доказано, что для любого пространства X веса $\le k$ можно построить единственное с точностью до гомеоморфизма h-однородное пространство $h(X, k)$ первой категории и веса k, которое в некотором смысле является наименьшим среди всех h-однородных пространств, содержащих X в качестве замкнутого подмножества. Для пространства $h(X, k)$ выполняются следующие условия: $h(X, k)\in \sigma LF(X)$ и $h(X, k)\in u(X)$ (расшифровка обозначений дана ниже). Мы покажем, что *любое* однородное по весу пространство Y первой категории, удовлетворяющее условиям $w(Y) = k$, $Y\in u(X)$ и $Y\in \sigma LF(X)$, будет гомеоморфно пространству $h(X, k)$.

Основные результаты заметки: теоремы 2, 7 и 9.

Определения и обозначения. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства X и Y – гомеоморфные. $w(X)$ – вес пространства X. Для системы множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha\in A\}$ через $|\mathcal{U}|$ обозначается мощность семейства $\mathcal{U}$, $\bigcup\mathcal{U} = \bigcup\{U_\alpha : \alpha\in A\}$, $\mathrm{mesh}(\mathcal{U})$ – мелкость семейства $\mathcal{U}$ (верхняя грань диаметров множеств из $\mathcal{U}$). Для отображения $f : X \to Y$ положим $f(\mathcal{U}) = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$.

Наименьший бесконечный кардинал обозначается буквой ω; также $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Для пространства X через $\Im(X)$ обозначим семейство всех непустых открыто-замкнутых множеств из X. Пусть $F(X) = \{Y$ – пространство: Y гомеоморфно некоторому непустому замкнутому множеству из $X\}$. Положим $LF(X) = \{Y$ – пространство: для любой точки $y\in Y$ найдется такая окрестность $V\in \Im(Y)$, что $V\in F(X)\}$. Далее, введем класс $\sigma LF(X) = \{Y$: пространство Y представимо в виде $Y = \cup\{Y_n: n\in \omega\}$, где каждое множество Y_n замкнуто в Y и $Y_n \in LF(X)\}$. Аналогично, пусть $H_0(X)$ – семейство всех непустых замкнутых нигде не плотных множеств из X. Положим $H(X) = \{Y: Y \approx Z$, если $Z\in H_0(X)\}$ и $LH(X) = \{Y: \forall y\in Y\ \exists V\in \Im(Y)\ (y\in V$ и $V\in H(X))\}$. Мы пишем $Y\in \sigma LH(X)$, если пространство Y можно представить в виде счетного объединения замкнутых подмножеств, каждое из которых принадлежит семейству $LH(X)$. Очевидно, что всегда $\sigma LH(X) \subseteq \sigma LF(X)$. Заметим (см. лемма 1 в [2]), что если $\mathrm{Ind}X = 0$ и $Y\in \sigma LF(X)$, то $\mathrm{Ind}Y = 0$.

Пространство X называется *пространством первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Пространство Y называется *u-однородным* относительно пространства X, если любое непустое открыто-замкнутое множество из Y содержит замкнутую копию пространства X; запись $Y\in u(X)$. Другими словами, $Y\in u(X)$, если $X\in F(V)$ для любого $V\in \Im(Y)$. Мы пишем $Y\in un(X)$, если $X\in H(V)$ для любого $V\in \Im(Y)$. Если $X\in u(X)$, то X называется *u-однородным* пространством. X называется *h-однородным* пространством, если каждое открыто-замкнутое множество из X гомеоморфно всему пространству X. Очевидно, что каждое h-однородное пространство будет и u-однородным пространством.

Замечание. Возьмем пространство X. Так как в этой статье мы рассматриваем только нульмерные (в смысле Ind) метрические пространства, то можно считать, что $X \subseteq B(k)$, где $k = w(X)$. Пусть ρ – стандартная метрика на пространстве Бэра $B(k)$. В дальнейшем мы будем считать, что топология на произвольном пространстве X всегда порождена сужением метрики ρ на X.

[1] Медведев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет.
e-mail: medv@math.susu.ac.ru

Пусть F_i – замкнутое нигде не плотное подмножество из пространства X_i, где $i \in \{1;2\}$. Пусть дан гомеоморфизм $f : F_1 \to F_2$. Тогда в пространстве X_i можно построить семейства множеств $\mathcal{U}_n^i = \{U_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n\}$, удовлетворяющие следующим условиям для любых $n \in \omega$ и $i \in \{1;2\}$:

s1) семейство $\mathcal{U}_n^i$ дискретно в X_i и состоит из открыто-замкнутых множеств пространства X_i;

s2) $\operatorname{mesh}\left(\mathcal{U}_n^i\right) \le (n+1)^{-1}$ в метрике ρ;

s3) для любого $U \in \mathcal{U}_{n+1}^i$ существует такое $W \in \mathcal{U}_n^i$, что $U \subseteq W$;

s4) $\cup\mathcal{U}_n^i$ – открыто-замкнутая окрестность множества F_i и $\bigcap\{\cup\mathcal{U}_n^i : n \in \omega\} = F_i$;

s5) $V_{\alpha,n}^i = U_{\alpha,n}^i \setminus \left(\cup\mathcal{U}_{n+1}^i\right)$ – непустое открыто-замкнутое множество в X_i для любого $\alpha \in A_n$;

s6) $\cup\{V_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n, n \in \omega\} = X_i \setminus F_i$ и $V_{\alpha,n}^i \cap V_{\beta,m}^i = \varnothing$, если $(\alpha,n) \ne (\beta,m)$;

s7) $f\left(F_1 \cap U_{\alpha,n}^1\right) = F_2 \cap U_{\alpha,n}^2$ для любого $\alpha \in A_n$.

Семейство множеств $\{F_i \cap U_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n, n \in \omega\}$ образует базу для F_i, $i \in \{1;2\}$. Семейство $\{\mathcal{U}_n^i : n \in \omega\}$ называется *внешней базой* множества F_i, а семейство $\mathcal{V}_i = \{V_{\alpha,n}^i : \alpha \in A_n,\ n \in \omega\}$ – *системой остаточных множеств* для множества F_i в пространстве X_i, $i \in \{1;2\}$. Используя свойство (s7), определим биекцию $\chi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ по правилу $\chi(U_{\alpha,n}^1) = U_{\alpha,n}^2$ и биекцию $\psi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ по правилу $\psi(V_{\alpha,n}^1) = V_{\alpha,n}^2$ для любых $\alpha \in A_n$, $n \in \omega$. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ – *изоморфные системы остаточных множеств* в пространствах X_1 и X_2 соответственно, связанные биекцией ψ и согласованные с гомеоморфизмом $f : F_1 \to F_2$.

Отметим важное свойство изоморфных систем остаточных множеств (см. [1], [3]).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ – изоморфные системы остаточных множеств в пространствах X_1 и X_2 соответственно, связанные биекцией ψ и согласованные с гомеоморфизмом $f : F_1 \to F_2$. Для любой последовательности множеств $\{U_i : i \in \omega\}$ из $\mathcal{V}_1$ выберем произвольно точки $x_i \in U_i$ и точки $y_i \in \psi(U_i)$, где $i \in \omega$. Пусть точка $x \in F_1$ и $y = f(x) \in F_2$. Тогда последовательность точек $\{x_i : i \in \omega\}$ сходится к точке x в пространстве X_1 тогда и только тогда, когда последовательность точек $\{y_i : i \in \omega\}$ сходится к точке y в пространстве X_2.*

Теорема 2. *Пусть X и Y – пространства первой категории, причем $X = \cup\{X_i\colon i \in \omega\}$, где каждое множество X_i замкнуто в X, и $Y \in u(X_i)$ для любого $i \in \omega$. Тогда $Y \in un(X)$.*

Доказательство. Так как пространство X первой категории, то без ограничения общности можно дополнительно считать, что каждое X_i нигде не плотно в X. Так как Y – пространство первой категории, то $Y = \cup\{Y_j\colon j \in \omega\}$, где каждое $Y_j \in H_0(Y)$.

Зафиксируем открыто-замкнутое множество $W \subseteq Y$. Так как множество Y_0 нигде не плотно в W, то существует такое непустое открыто-замкнутое множество $D_0 \subset W$, что $D_0 \cup Y_0 = \varnothing$ и $W \setminus D_0 \ne \varnothing$. Пусть $\mathcal{D}_0 = \{D_0\}$. Положим $T_0 = X_0$. Так как $W \in un(X_i)$ для любого $i \in \omega$, то существует гомеоморфизм $f_0\colon T_0 \to Z_0$ для некоторого множества $Z_0 \in H_0(D_0)$. Построим изоморфные системы остаточных множеств $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{V}_0$ в пространствах X и D_0 соответственно, согласованные с f_0 и связанные биекцией $\psi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}_0$, причем $\bigcup\mathcal{U}_0 = X \setminus T_0$ и $\bigcup\mathcal{V}_0 = D_0 \setminus Z_0$. Так как Y_1 нигде не плотно в Y, то для каждого $U \in \mathcal{U}_0$ можно найти такое непустое открыто-замкнутое множество $D_U \subset \psi_0(U)$, что $D_U \cap Y_1 = \varnothing$ и множество $\psi_0(U) \setminus D_U$ не пусто. Обозначим $D_U = \varphi_0(U)$. Тогда для семейства $\mathcal{D}_1 = \{D_U : U \in \mathcal{U}_0\}$ определена биекция $\varphi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{D}_1$. Очевидно, что $\varphi_0(U) \subset \psi_0(U)$ для любого $U \in \mathcal{U}_0$. По построению, замыкание $\mathrm{cl}(\bigcup\mathcal{D}_1) = Z_0 \cap(\bigcup\mathcal{D}_1)$ и $Z_0 \cup(\bigcup\mathcal{D}_1) = \varnothing$.

Зафиксируем $U \in \mathcal{U}_0$. Найдем наименьшее число j такое, что пересечение $X_U = X_j \cap U$ не пусто. Так как $\varphi_0(U) \in un(X_j)$, то существует гомеоморфизм $f_{1U} : X_U \to Z_U$ для некоторого множества $Z_U \in H_0(\varphi_0(U))$. Возьмем изоморфные системы остаточных множеств $\mathcal{U}_{1U}$ и $\mathcal{V}_{1U}$ в пространствах X и $\varphi_0(U)$ соответственно, согласованные с f_{1U} и связанные биекцией $\psi_{1U} : \mathcal{U}_{1U} \to \mathcal{V}_{1U}$, причем $\bigcup \mathcal{U}_{1U} = U \setminus X_U$ и $\bigcup \mathcal{V}_{1U} = \varphi_0(U) \setminus Z_U$. Без ограничения общности можно считать, что mesh($\mathcal{U}_{1U}$) $\le 2^{-1}$ и mesh($\mathcal{V}_{1U}$) $\le 2^{-1}$. Определим множества $T_1 = T_0 \cup (\cup\{X_U\colon U \in \mathcal{U}_0\})$ и $Z_1 = Z_0 \cup (\cup\{Z_U\colon U \in \mathcal{U}_0\})$. По построению $X_1 \subset T_1$, $T_1 \in H_0(X)$ и $Z_1 \in H_0(W)$. Зададим отображение $f_1 : T_1 \to Z_1$ по правилу: $f_1(x) = f_0(x)$, если $x \in T_0$, и $f_1(x) = f_{1U}(x)$, если $x \in X_U$. Используя лемму 1, несложно проверить, что f_1 – гомеоморфизм. Положим $\mathcal{U}_1 = \{U^* : U^* \in \mathcal{U}_{1U},\ U \in \mathcal{U}_0\}$ и $\mathcal{V}_1 = \{V^*\colon V^* \in \mathcal{V}_{1U},\ U \in \mathcal{U}_0\}$. Определим биекцию $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ по правилу $\psi_1(U^*) = \psi_{1U}(U^*)$, если $U^* \in \mathcal{U}_{1U}$. Затем зафиксируем $U \in \mathcal{U}_1$. Внутри множества $\psi_1(U)$ найдем множество $D_U = \varphi_1(U)$, не пересекающееся с Y_2, и повторим указанную выше процедуру. В результате, по индукции мы построим множества $T_n \in H_0(X)$ и $Z_n \in H_0(W)$; семейства $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{V}_n$, состоящие из непересекающихся открыто-замкнутых множеств в пространствах X и W соответственно; семейство $\mathcal{D}_n$, состоящее из непустых открыто-замкнутых подмножеств W; биекции $\varphi_n : \mathcal{U}_n \to \mathcal{D}_{n+1}$; биекции $\psi_n : \mathcal{U}_n \to \mathcal{V}_n$ и гомеоморфизмы $f_n : T_n \to Z_n$, удовлетворяющие при любом $n \in \omega$ следующим соотношениям:

a1) $T_0 = X_0$, $X_{n+1} \cap T_n \subset T_{n+1}$ и $\bigcup \mathcal{U}_n = X \setminus T_n$,

a2) для любого $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ существует единственное множество $U^* \in \mathcal{U}_n$, для которого $U \subset U^*$,

a3) $\cup \mathcal{D}_{n+1} \subset \cup \mathcal{V}_n$, причем $\varphi_n(U) \subset \psi_n(U)$ и $\psi_n(U) \setminus \varphi_n(U) \ne \varnothing$ для любого $U \in \mathcal{U}_n$,

a4) $(Z_{n+1} \setminus Z_n) \subset \cup \mathcal{V}_n$ и $\cup \mathcal{V}_n = \cup \mathcal{D}_n \setminus Z_n$,

a5) замыкание $\mathrm{cl}(\cup \mathcal{D}_{n+1}) = (\cup \mathcal{D}_{n+1}) \cup Z_n$, причем $(\cup \mathcal{D}_{n+1}) \cap Z_n = \varnothing$,

a6) $(\cup \mathcal{D}_n) \cup (\cap\{Y_i\colon i \le n\}) = \varnothing$,

a7) $\mathrm{mesh}(\mathcal{U}_n) \le (n+1)^{-1}$ и $\mathrm{mesh}(\mathcal{V}_n) \le (n+1)^{-1}$,

a8) $f_{n+1}(U \cap T_{n+1}) = \varphi_n(U) \cap Z_{n+1}$ для любого $U \in \mathcal{U}_n$,

a9) сужение f_{n+1} на T_n совпадает с f_n.

Из $a1$ следует, что $X = \cup\{T_n\colon n \in \omega\}$. Положим $Z^* = \cup\{Z_n\colon n \in \omega\}$. Определим отображение $f : X \to Z^*$ по правилу: $f(x) = f_n(x)$, если $x \in T_n$. Из $a9$ вытекает корректность этого определения. Ясно, что f – биекция. Из леммы 1 вытекает, что f – гомеоморфизм.

Проверим, что Z^* – замкнутое множество в Y. Допустим, что существует точка $y \in \mathrm{cl}(Z^*) \setminus Z^*$. Тогда $y \in Y_n$ для некоторого n. Из $a4$ и $a3$ следует, что $\cup \mathcal{D}_m \subset \cup \mathcal{D}_n$ для любого $m \ge n$. Значит, множество $A_n = \cap\{Z_m\colon m \ge n\} \subset \cup \mathcal{D}_n$. Но $\mathrm{cl}(A_n) \subset (\cup \mathcal{D}_n) \cup Z_{n-1}$ согласно $a5$. Учитывая, что $\mathrm{cl}(Z^*) = \mathrm{cl}(A_n) \cap Z_{n-1}$, заключаем, что $y \in \mathrm{cl}(A_n) \cap Z_{n-1}$. Так как $y \notin Z^*$, то $y \notin Z_{n-1}$. Поэтому $y \in \cup \mathcal{D}_n$. С другой стороны, $y \notin \cup \mathcal{D}_n$ согласно $a6$. Получили противоречие. Итак, $\mathrm{cl}(Z^*) = Z^*$.

Остается проверить, что множество Z^* нигде не плотно в Y. Возьмем произвольное открытое множество O из Y и точку $y \in O \cup Z^*$. Тогда O содержит окрестность V^* точки y радиуса j^{-1} для некоторого j. По построению каждое множество Z_n нигде не плотно в Z^*. Тогда множество индексов $\{n\colon Z_n \cup V^* \ne \varnothing\}$ бесконечно. Поэтому найдется такое $m > j$, что $Z_m \cup V^* \ne \varnothing$. Пусть $z \in Z_m \cup V^*$. Из свойств $s2$, $s3$ и $s4$ системы остаточных множеств вытекает, что найдется множество $V \in \mathcal{V}_m$, лежащее в окрестности точки z радиуса $(m+1)^{-1}$. Тогда $V \subset V^* \subset O$, ведь $m > j$. Пусть $V = \psi_m(U)$ для некоторого $U \in \mathcal{U}_m$. Из $a3$ следует, что множество V (следовательно, и O) содержит непустое открытое подмножество $\psi_m(U) \setminus \varphi_m(U)$, которое не пересекается с Z^*. Поэтому Z^* нигде не плотно в Y. Таким образом, $W \in un(X)$. Следовательно, $Y \in un(X)$. □

Следствие 3. *Пусть X и Y – пространства первой категории, причем $Y \in u(X)$. Тогда $Y \in un(X)$.*

Лемма 4. *Пусть $Y \in u(X)$ и Y – пространство первой категории. Тогда $Y \in un(X)$.*

Доказательство. Если X – пространство первой категории, то применяем следствие 3.

Пусть X не является пространством первой категории. Положим $X^* = \cap\{U$: U – открытое множество в X первой категории$\}$. По теореме Банаха X^* – пространство первой категории. Тогда замкнутое в X множество $X^0 = X \setminus X^*$ нигде не локально первой категории. При этом $B = X^0 \bigcap \mathrm{cl}(X^*)$ – замкнутое нигде не плотное множество в X; допускается случай $B = \varnothing$.

Возьмем $W \in \Im(Y)$. По условию леммы существует гомеоморфизм f: $X \to Z$ для некоторого замкнутого множества $Z \subset W$. Так как X^0 нигде не локально первой категории, то $f(X^0) \in H_0(W)$.

Первый случай. Пусть $B = \varnothing$. Тогда $f(X^*)$ и $f(X^0)$ – непересекающиеся замкнутые множества в W. Любое метрическое пространство нормально, поэтому у множеств $f(X^*)$ и $f(X^0)$ в W существуют непересекающиеся открыто-замкнутые окрестности W^* и W^0 соответственно. Так как $Y \in u(X)$, то $Y \in u(X^*)$. Следовательно, по следствию 3 найдется множество $Z^* \in H_0(W^*)$, которое гомеоморфно X^*. Тогда $Z^* \cup f(X^0) \approx X$ и $Z^* \cup f(X^0) \in H_0(W)$. В этом случае все доказано.

Второй случай. Пусть $B \neq \varnothing$. Так как $B \in H_0(X^*)$, то можно построить изоморфные системы остаточных множеств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в пространствах X^* и W соответственно, согласованные с f и связанные биекцией $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, причем $\bigcup \mathcal{U} = X^* \setminus B$ и $\bigcup \mathcal{V} = W \setminus f(B)$. Для любого $U \in \mathcal{U}$ множество $U \cup X^*$ первой категории, поэтому по следствию 3 множество $\psi(U \cap X^*)$ содержит замкнутое нигде не плотное множество W_U, которое гомеоморфно $U \cap X^*$; пусть $f_U : U \cap X^* \to W_U$ – некоторый гомеоморфизм. Так как $f(X^0) \in H_0(W)$, то без ограничения общности можно считать, что множества W_U и $f(X^0)$ не пересекаются. Определим отображение $g : X \to W$ по правилу $g(x) = f(x)$, если $x \in X^0$, или $g(x) = f_U(x)$, если $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Несложно проверить, что g – биекция. Множества X^* и X^0 замкнуты в X, сужения g на X^* и X^0 – гомеоморфизмы, причем по построению $g(X^* \cap X^0) = g(X^*) \cap g(X^0) = f(B)$, поэтому g – гомеоморфизм. По построению $g(X) \in H_0(W)$. Второй случай разобран. □

Лемма 5. *Пусть X – пространство первой категории и $Y \in u(X)$. Тогда $Y \in un(X)$.*

Доказательство. Если Y – пространство первой категории, то применяем следствие 3.

Пусть Y не является пространством первой категории. Как в доказательстве леммы 4, представим пространство Y в виде $Y = Y^* \cap Y^0$, где Y^* – наибольшее открытое множество первой категории в Y, а Y^0 – замкнутое множество, которое нигде не локально первой категории. Возьмем произвольное открыто-замкнутое множество $W \subset Y$. Если $W \cup Y^*$ не пусто, то $W \cup Y^* \in un(X)$ по следствию 3. Если $W \cup Y^* = \varnothing$, то $\mathrm{int} Y^0 \neq \varnothing$ и по условию леммы пересечение $W \cup (\mathrm{int} Y^0)$ содержит замкнутую копию Z пространства X. Так как Y^0 нигде не локально первой категории, то Z нигде не плотно в Y^0 (следовательно, нигде не плотно в Y). В любом случае $Y \in un(X)$. □

Лемма 6. *Пусть X – пространство первой категории и $Y \in \sigma LF(X)$. Тогда $Y \in \sigma LH(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $Y \in F(X)$. То есть Y гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству D из пространства X. По определению пространства первой категории $X = \cup\{X_i : i \in \omega\}$, где каждое X_i – замкнутое нигде не плотное подмножество X. Тогда каждое множество $D \cap X_i \in H_0(X)$. Следовательно, Y является счетным объединением замкнутых подмножеств, каждое из которых принадлежит семейству $H(X)$.

Рассмотрим общий случай $Y \in \sigma LF(X)$. По определению $Y = \cup\{Y_n : n \in \omega\}$, где каждое множество Y_n замкнуто в Y и каждое $Y_n \in \sigma LF(X)$. Так как $\mathrm{Ind} Y = 0$, то $\mathrm{Ind} Y_n = 0$ для любого $n \in \omega$. Тогда $Y_n \approx \oplus\{Y_{n,\alpha} : \alpha \in A_n\}$, где каждое множество $Y_{n,\alpha} \in F(X)$. По первой части доказательства леммы каждое множество $Y_{n,\alpha}$ имеет вид $Y_{n,\alpha} = \bigcup\{Y_{n,\alpha,j} : \alpha \in A_n, j \in \omega\}$, где любое $Y_{n,\alpha,j} \in H(X)$. Множества $Y^*_{n,j} = \cup\{Y_{n,\alpha,j} : \alpha \in A_n\}$ замкнуты в Y и принадлежат семейству $LH(X)$. Итак, $Y = \cup\{Y^*_{n,j} : n \in \omega, j \in \omega\} \in \sigma LH(X)$. □

Теорема 7. *Пусть $Z \in \sigma LF(X)$ и $Y \in u(X)$ для пространства X, причем $w(Z) \leq k$, Y – пространство первой категории и Y нигде не локально веса $< k$. Тогда $Y \in un(Z)$.*

Доказательство. По определению $Z = \cup\{Z_n: n\in\omega\}$, где каждое множество Z_n замкнуто в Z и $Z_n\in LF(X)$. Более того, так как $\mathrm{Ind}Z = 0$, то каждое $Z_n =\oplus\{Z_{n,\alpha}: \alpha\in A_n\}$, где $Z_{n,\alpha}\in F(X)$ и мощность $|A_n| \le k$ для любого $n\in\omega$. Возьмем произвольное непустое открыто-замкнутое множество $W\subset Y$. Так как Y нигде не локально веса $< k$, то для любого $n\in\omega$ существует дискретное покрытие $\{W_\alpha: \alpha\in A_n\}$ множества W непустыми открыто-замкнутыми множествами. Согласно лемме 4, $Y\in un(X)$. Тогда каждое $W_\alpha\in un(Z_{n,\alpha})$. Следовательно, $W\in un(Z_n)$ для любого $n\in\omega$.

Рассмотрим вспомогательное пространство $Q\times Z$ первой категории, где Q – пространство рациональных чисел. Как известно, Q является объединением счетного числа точек $\{q_m: m\in\omega\}$. Очевидно, что всегда $\{q_m\}\times Z_n \approx Z_n$. Следовательно, $W\in un(\{q_m\}\times Z_n)$ для любых $m\in\omega$ и $n\in\omega$. По теореме 2 получаем, что $W\in un(Q\times Z)$. Так как $Z \in F(Q\times Z)$, то $W\in un(Z)$.

Множество $W\in \Im(Y)$ было выбрано произвольно, поэтому $Y\in un(Z)$. □

Следствие 8. *Пусть пространство первой категории Y нигде не локально веса $< k$ и $Y\in u(X)$ для некоторого пространства X. Тогда $Y\in un(h(X, k))$.*

Доказательство. Как указано во введении, h-однородное расширение $h(X, k)$ веса k пространства X принадлежит семейству $\sigma LF(X)$. Остается применить теорему 7. □

Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 9. *Пусть дано однородное по весу пространство Y первой категории, $w(Y) = k$, $Y\in\sigma LF(X)$ и $Y\in u(X)$ для некоторого пространства X. Тогда Y гомеоморфно пространству $h(X,k)$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $w(X) \le k$.

По следствию 8, $Y\in un(h(X, k))$. С другой стороны, из условий $h(X, k)\in u(X)$ и $Y\in \sigma LF(X)$ вытекает, что $Y\in \sigma LF(h(X, k))$. Тогда $h(X, k)\in un(Y)$ по теореме 7. Значит, Y является u-однородным пространством, т.е. $Y\in u(Y)$. По теореме Островского [3] Y будет h-однородным пространством. Тогда $Y\approx h(X, k)$ по теореме 8 из [3] (или по теореме 4 из [2]). □

Литература

1. Медведев, С.В. О замкнутых подмножествах в u-однородных пространствах первой категории / С.В. Медведев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2007. – Вып. 9. – № 19(91). – С. 37–41.

2. Medvedev, S.V. On properties of h-homogeneous spaces of first category / S.V. Medvedev // Topol. Applic. – 2010. – V. 157. – P. 2819–2828.

3. Островский, А.В. К вопросу Л.В. Келдыш о структуре борелевских множеств / А.В. Островский // Матем. Сборник. – 1986. – Т. 131, № 3. – С. 323–346.

Поступила в редакцию 1 апреля 2011 г.

SOME PROPERTIES OF THE SPACE *h*(*X*, *k*)

S.V. Medvedev[1]

The space $h(X, k)$ is the smallest h-homogeneous space of first category that contains the metric space X as a closed subset. In the paper we obtain one inner characterization of the space $h(X, k)$.

Keywords: h-homogeneous space, space of first category, embedding.

References

1. Medvedev S.V. *Vestnik YuUrGU, Seriia «Matematika, fizika, khimiia»*. 2007. Vol. 9, no. 19(91). pp. 37–41. (in Russ.).

2. Medvedev S.V. On properties of h-homogeneous spaces of first category. *Topol. Applic.* 2010. Vol. 157. pp. 2819–2828.

3. Ostrovskii A.V. *Matem. Sbornik*. 1986. Vol. 131, no. 3. pp. 323–346. (in Russ.).

[1] Medvedev Sergey Vasiljevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analysis Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, South Ural State University. e-mail: medv@math.susu.ac.ru