УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Я.Т. Мегралиев[1]

Исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальные уравнения, существование, единственность, классическое решение.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2, 3], процесса влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями были ранее рассмотрены в работах [5–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t)-\alpha u_{ttxx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$ и поставим для него обратную краевую задачу с начальными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \tag{2}$$

нелокальными условиями:

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=u_{xxx}(0,t)=0,\ \int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T) \tag{3}$$

и дополнительным условием

$$u(0,t)=h(t)\ \ (0\le t\le T), \tag{4}$$

где $\alpha>0$ – заданное число, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение. Классическим решением задачи (1)–(4) назовём пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в (1);
2) $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;
3) все условия (1)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Лемма 1. Пусть

$$\varphi(x)\in C[0,1]\ ,\int_0^1\varphi(x)dx=0\ ,\ \psi(x)\in C[0,1],\ \int_0^1\psi(x)dx=0\ ,\ f(x,t)\in C(D_T),$$

[1] Мегралиев Яшар Топуш – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, механико-математический факультет, Бакинский государственный университет. e-mail: yashar_aze@mail.ru

$\int_0^1 f(x,t)dx=0 \ (0\le t\le T)$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\ne 0(0\le t\le T)$, $\varphi(0)=h(0)$, $\psi(0)=h'(0)$.

Тогда задача нахождения решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)–(4), из (1), (2):

$$u_x(0,t)=0, u_x(1,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=0,\ u_{xxx}(1,t)=0 \ \ (0\le t\le T), \tag{5}$$

$$h''(t)-\alpha u_{ttxx}(0,t)+u_{xxxx}(0,t)=a(t)h(t)+f(0,t) \ \ (0\le t\le T). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)–(4). Интегрируем уравнение (1) от 0 до 1 по x, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-\alpha(u_{ttx}(1,t)-u_{ttx}(0,t))+u_{xxx}(1,t)-u_{xxx}(0,t)=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx \ (0\le t\le T). \tag{7}$$

Отсюда с учётом $\int_0^1 f(x,t)dx=0$ и (3), легко приходим к выполнению (5).

Далее, так как $h(t)\in C^2[0,T]$, дифференцируем (4) два раза по t, получаем:

$$u_{tt}(0,t)=h''(t) \ \ (0\le t\le T). \tag{8}$$

В уравнение (1) подставим $x=0$, находим:

$$u_{tt}(0,t)-\alpha u_{ttxx}(0,t)+u_{xxxx}(0,t)=a(t)u(0,t)+f(0,t) \ \ (0\le t\le T) \tag{9}$$

Отсюда с учетом (4) и (8), легко приходим к выполнению (6).

Теперь предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1), (2), (5), (6). Тогда из (7), с учетом (5), имеем:

$$y''(t)-a(t)y(t)=0 \ \ \ (0\le t\le T), \tag{10}$$

где

$$y(t)=\int_0^1 u(x,t)dx \ \ (0\le t\le T). \tag{11}$$

В силу условий леммы 1 очевидно, что

$$y(0)=\int_0^1 u(x,0)dx=\int_0^1 \varphi(x)dx=0,\ \ y'(0)=\int_0^1 u_t(x,0)dx=\int_0^1 \psi(x)dx=0. \tag{12}$$

Из (10), с учетом (12) очевидно, что $y(t)\equiv 0$ $(0\le t\le T)$. Отсюда, в силу (11), легко приходим к выполнению (3).

Далее, из (6) и (9) имеем:

$$\frac{d^2}{d^2}(u(0,t)-h(t))=a(t)(u(0,t)-h(t)), \ (0\le t\le T). \tag{13}$$

В силу $\varphi(0)=h(0)$, $\psi(0)=h'(0)$ находим:

$$u(0,0)-h(0)=\varphi(0)-h(0)=0,\ \ u_t(0,0)-h'(0)=\psi(0)-h'(0)=0. \tag{14}$$

Из (13) с учетом (14) ясно, что выполняется и условие (4). Лемма доказана.

С целью исследования задачи (1), (2), (5), (6) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha}$ [7] совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x \ (\lambda_k=k\pi),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u)\equiv\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

причем $\alpha\ge 0$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}} = J(u).$$

Через E_T^{α} обозначим пространство $B_{2,T}^{\alpha} \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x,t),a(t)\}$ с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^{\alpha}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha}} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^{\alpha}$ и E_T^{α} являются банаховыми пространствами.

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1),(2),(5),(6) будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \tag{15}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k=0,1,...).$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$(1+\alpha\lambda_k^2)u_k''(t)+\lambda_k{}^4 u_k(t) = F_k(t;u,a) \ \ (0\le t\le T; k=0,1,...), \tag{16}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u_k'(0)=\psi_k \quad (k=0,1,...), \tag{17}$$

где

$$F_k(t;u,a)= f_k(t)+a(t)u_k(t),\ \ f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos\lambda_k x dx,\ \ \psi_k = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\lambda_k x dx \quad (k=0,1,...).$$

Решая задачу (16), (17), находим:

$$u_0(t)=\varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau, \tag{18}$$

$$u_k(t)=\varphi_k\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_k \sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad (k=1,2,...), \tag{19}$$

где $\beta_k = \dfrac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\alpha\lambda_k^2}}$ $(k=1,2,...)$.

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ в (15) для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1), (2), (5) и (6) получаем:

$$u(x,t)=\varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x. \tag{20}$$

Теперь из (6) с учетом (15) имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\lambda_k^2 u_k''(t)+\lambda_k^4 u_k(t))\right\}. \tag{21}$$

Далее из (16) с учетом (19) получаем:

$$\vartheta_k(t)\equiv \alpha\lambda_k^2 u_k''(t)+\lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t;u,a)-u_k''(t) = \frac{\lambda_k^4}{1+\alpha\lambda_k^2}u_k(t)+\frac{\alpha\lambda_k^2}{1+\alpha\lambda_k^2}F_k(t;u,a) = \beta_k^2\{\varphi_k\cos\beta_k t +$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t F_k(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\} + \frac{\alpha\lambda_k^2}{1+\alpha\lambda_k^2}F_k(t;u,a) \quad (k=1,2,...). \tag{22}$$

Тогда из (21) с учетом (22) находим:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_k(t)\right\}\equiv h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha\lambda_k^2}{1+\alpha\lambda_k^2}F_k(t;u,a)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta_k^2\varphi_k\cos\beta_k t+\beta_k\psi_k\sin\beta_k t+\frac{\beta_k}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^t F_k(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right]\right\}. \qquad (23)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2), (5), (6) свелось к решению системы (20), (23) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. Если $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое решение задачи (1), (2), (5), (6), то функции

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ \ (k=0,1,...)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (18), (19).

Замечание. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1), (2), (5), (6) достаточно доказать единственность решения системы (20), (23).

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где $\Phi_1(u,a)=\tilde u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde u_k(t)\cos\lambda_k x$, $\Phi_2(u,a)=\tilde a(t)$, а $\tilde u_0(t)$, $\tilde u_k(t)$ и $\tilde a(t)$ – равны соответственно правым частям (18), (19) и (23).

Очевидно, что

$$\alpha\lambda_k^2<1+\alpha\lambda_k^2<(1+\alpha)\lambda_k^2 \ \ (k=1,2,...),\ (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\lambda_k<\beta_k<\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k \ \ (k=1,2,...).$$

Учитывая эти соотношения, имеем:

$$\|\tilde u_0(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_0|+T|\psi_0|+T\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_0(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]}, \qquad (24)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\sqrt{(1+\alpha)T}}{\alpha}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_k(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (25)$$

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+\frac{1}{\sqrt6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt6}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\alpha\sqrt6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3|\varphi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{6\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\psi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \qquad (26)$$

Предположим, что данные задачи (1), (2), (5), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)=\varphi'''(0)=\varphi'''(1)=0$,
2. $\psi(x)\in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)=\psi'''(0)=\psi'''(1)=0$,

3. $f(x,t),\ f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),\ f_x(0,t)=f_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T)$,

4. $h(t)\in C^2[0,T],\ \ h(t)\ne 0\ \ \ (0\le t\le T)$.

Тогда из (16)–(18) имеем:

$$\|\tilde u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\le A_1(T)+B_1(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{27}$$

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{28}$$

где $A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{T}\,\|f(x,t)x\|_{L_2(D_T)}+2\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$

$+\frac{2\sqrt{(1+\alpha)T}}{\alpha}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}$; $A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+\frac{1}{\sqrt{6}}\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$

$\left.+\frac{1}{\alpha\sqrt{6}}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{1}{\sqrt{6\alpha}}\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}\sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right\}$; $B_1(T)=T^2+\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha}T$;

$$B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{6\alpha}}T+\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Из неравенств (27), (28) заключаем:

$$\|\tilde u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{29}$$

где $A(T)=A_1(T)+A_2(T)$, $B(T)=B_1(T)+B_2(T)$.

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–4 и

$$(A(T)+2)^2B(T)<1. \tag{30}$$

Тогда задача (1), (2), (5), (6) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E^5_T}\le R=A(T)+2)$ пространства E^5_T единственное решение.

Доказательство. В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \tag{31}$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)\ (i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (20) и (23).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E^5_T. Аналогично (29) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^5_T}\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{32}$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_2\|_{E^5_T}\le B(T)R\left(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\right). \tag{33}$$

Тогда, из оценок (32), (33) с учетом (30) следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является в шаре $K=K_R$ единственным решением уравнения (31), т.е $\{u,a\}$ является в шаре $K=K_R$ единственным решением системы (20), (23).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^5_{2,T}$, имеет непрерывные производные $u(x,t),\ u_x(x,t),\ u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Из (8) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\le\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}+\frac{1}{\alpha}\left\|\|f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (5) и (6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1), (2), (5), (6), причем в силу леммы 2 оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \int_0^1 \psi(x)dx = 0, \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ (0 \le t \le T), \ \varphi(0) = h(0), \ \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача (1)–(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

Литература

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Диф. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – Р. 1925–1935.
2. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math.. – 1963. – Vol. 5, № 21. – P. 155–160.
3. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Диф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – Р. 294–304.
4. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.
5. Гордезиани, Д.Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Мат. моделирование. – 2000. – Т. 12, № 1. – С. 94–103.
6. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Диф. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 887–892.
7. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев, А.А. Велиев. – Баку: Чашыоглы, 2010. – 168 с.

Поступила в редакцию 13 мая 2011 г.

INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH ORDER WITH INTEGRAL CONDITION

***Ya.T. Mehraliyev*[1]**

In the article the author analyses one inverse boundary problem for a partial differential equation of fourth order with integral condition. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, the theorem of existence and uniqueness of solution is proved for the latter. Then, using these facts the author proves existence and uniqueness of classical solution of the original problem.

Keywords: inverse problem, differential equations, existence, uniqueness, classical solution.

References

1. Samarskii A.A. *Dif. uravneniia.* 1980. Vol. 16, no 11. pp. 1925–1935.
2. Cannon J.R. *Quart. Appl. Math.* 1963. Vol. 5, no. 21. pp. 155–160.
3. Ionkin N.I. *Dif. uravneniia*. 1977. Vol. 13, no. 2. pp. 294–304.
4. Nakhushev A.M. *Dif. uravneniia*. 1982. Vol. 18, no. 1. pp. 72–81.
5. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Mat. modelirovanie*. 2000. Vol. 12, no. 1. pp. 94–103.
6. Pul'kina L.S. *Dif. uravneniia*. 2004. Vol. 40, no. 7. pp. 887–892.
7. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlia odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka s nelineinoi operatornoi pravoi chast'iu* (Investigation of one-dimensional mixed problems for a class of third-order pseudohyperbolic equations with nonlinear right-hand side of the operator). Baku: Chashyogly, 2010. 168 p.

[1] Mehraliyev Yashar Topush is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate professor, Differential and Integral Equations Department, Baku State University. e-mail: yashar_aze@mail.ru