УДК 517.956

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ II

В.В. Карачик[1]

Предлагается метод построения полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида.

Ключевые слова: полиномиальные решения, линейные дифференциальные уравнения в частных производных.

1. Введение

Предлагаемая вашему вниманию статья является продолжением результатов автора, изложенных в работе [1] и посвящена построению полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида. Изучению полиномиальных решений конкретных уравнений в частных производных посвящено много работ. В основном это исследования полигармонических [2, 3], поливолновых [4], тепловых [5] и других полиномов [6]. В [7] исследуются базисные системы полиномиальных решений множества различных уравнений, однако при построении решений существенно используется структура дифференциального оператора уравнения. В [8] сделаны первые попытки общего подхода нахождения полиномиальных решений. В [9] построены полиномиальные решения неоднородного полигармонического уравнения и уравнения Гельмгольца. В настоящей работе не имеет значения ни структура оператора уравнения, ни тип дифференциального уравнения. Используя результаты, полученные в работе автора [1] и понятие f -нормированной системы функций [10], приводится метод построения полиномиальных решений дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами общего вида (2).

2. Полные системы полиномиальных решений

Пусть матрица $L(x)$ в системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$L(D)u(x) = f(x) \tag{1}$$

квадратная и невырожденная. Выберем в теореме 4 из [1] в качестве векторов $\vartheta^{(i)}(x)$ столбцы присоединенной (взаимной) к матрице $L(x)$ матрицы $L^{\vee}(x)$. В этом случае $\forall i, R^{(i)}(x) = \det L(x)$ и значит для того, чтобы, воспользовавшись теоремой 4 из [1], записать произвольное полиномиальное решение системы (1), мы должны найти полиномы $P^{(i)}(x)$, которые удовлетворяют уравнению $\det L(D)P^{(i)}(x) = f_i(x)$. Таким образом, решение системы (1) с квадратной, невырожденной матрицей, сводится к отысканию полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений вида

$$L(D)u \equiv \sum_{k\le|\alpha|\le q} a_\alpha D^\alpha u(x) = f(x), \tag{2}$$

где $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}$ – пространство полиномов и $x \in \mathbb{R}^n$. Следует отметить, что уравнение (2) является частным случаем системы (1) при $s = t = 1$ и, следовательно, к нему применимы все результаты, полученные в [1]. Такой подход к построению полиномиальных решений системы уравнений (1) при $s = t$ является универсальным, но увеличивает порядок дифференциального уравнения из (1), делая его равным степени полинома $\det L(x)$.

Исследуем способы построения полиномиальных решений уравнения (2). Для этой цели введем следующее необходимое понятие.

---

[1] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: karachik@susu.ru

Пусть L_1, L_2 – линейные операторы, действующие на функции $f(x)$, принадлежащие множеству X такому, что $L_k X \subset X$ ($k=1,2$) и определенные в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Упорядоченную систему функций $\{f_k(x): k \in \mathbb{N}_0, f_k \in X\}$ назовем f-нормированной относительно (L_1, L_2) в области Ω с основанием $f_0(x)$, если всюду в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x); \quad L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega.$$

Основное свойство f-нормированной системы функций относительно (L_1, L_2) в области Ω состоит в том, что ряд $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ формально удовлетворяет в Ω уравнению $L_1 u(x) - L_2 u(x) = f(x)$.

Важным частным случаем введеного понятия является $L_2 = I$, где I – единичный оператор. Тогда f-нормированную относительно (L, I) систему функций $\{f_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$ будем называть f*-нормированной относительно* L. В этом случае в Ω имеют место следующие равенства [10]:

$$Lf_0(x) = f(x); \quad Lf_k(x) = f_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega. \qquad (*)$$

Более того, если $\forall k, WLf_k(x) = LWf_k(x)$ в Ω, тогда нетрудно установить, что система функций $\{W^k f_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$ будет f-нормированной относительно (L, W) в Ω.

Пример 1. Пусть $L(D)$ линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$L(D) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где $a_k(x)$ – аналитические в Ω функции, $\{\varphi_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$ – некоторая f-нормированная относительно $L(D)$ в Ω система функций и

$$W_f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_k(x) L^k(D).$$

Тогда, существует такая область $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, что для любой аналитической в Ω функции $F(x)$ справедливы равенства:

$$L(D) W_1(D) F(x) = F(x), \quad L(D) W_0(D) F(x) = 0$$

для $x \in \widetilde{\Omega}$. Оператор $W_f(D)$ является обобщением известных рядов Ли.

Это утверждение сразу следует из соответствующих результатов по обобщенным рядам Ли [11], если заметить, что при $\varphi_k(x) = \varphi^{k,!}(x) \equiv \varphi^k(x)/k!$, где $L(D)\varphi(x) = 1$, система функций $\{\varphi_k(x): k \in \mathbb{N}_0\}$ будет 1-нормированной относительно $L(D)$ в Ω.

В дальнейшем будем предполагать, что $X = \mathcal{P}$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, и операторы L_j ($j=1,2$) – дифференциальные операторы в частных произвольных с постоянными коэффициентами. Относительно существования f-нормированных относительно $L_j(D)$ систем полиномов, в силу теоремы 1 из [1], можем утверждать, что они всегда существуют.

Пример 2. Пусть $L(D) = D^\beta$, где $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Уравнение (2) с таким оператором $L(D)$ – простейшее из всех возможных. В соответствии с равенствами

$$D^\alpha x^{\beta,!} = \begin{cases} x^{\beta-\alpha,!}, & \alpha \le \beta, \\ 0, & \beta \nleq \alpha \end{cases}$$

система $\{x^{k\beta+\alpha,!}: k \in \mathbb{N}_0\}$, в которой $\beta \nleq \alpha$ является 0-нормированной относительно оператора D^β системой полиномов, имеющей основание $x^{\alpha,!}$: $D^\beta x^{k\beta+\alpha,!} = x^{(k-1).\beta+\alpha,!}$ и $D^\beta x^{\alpha,!} = 0$. Кроме того, система полиномов $\left\{x^{\alpha,!}:\alpha\in\mathbb{N}_0^n,\beta\nleq\alpha\right\}$ составляет базис в $\ker\mathcal{L}(D)\cap\mathcal{P}$, поскольку если $D^\beta x^\alpha=0$, то $\beta\nleq\alpha$.

Вернемся к уравнению (2). Для построения его полиномиальных решений воспользуемся основным свойством f -нормированных систем функций, которое в данном случае выглядит так: предположим, что оператор $L(D)$ как то разбит на сумму операторов $L_1(D)$ и $L_2(D)$ и $\left\{f_k(x):k\in\mathbb{N}_0\right\}$ – f -нормированная относительно оператора $L_1(D)$ система полиномов, тогда формальное решение уравнения (2) может быть записано в форме

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k L_2^k(D)f_k(x). \quad (3)$$

Основная проблема, которую необходимо решить в дальнейшем, состоит в подборе операторов $L_1(D)$ и $L_2(D)$ таким образом, чтобы ряд из (3) был не формальным решением уравнения (2), а его полиномиальным решением и по возможности наиболее общим.

Необходимы некоторые приготовления. Рассмотрим $\Gamma_0=\{\alpha\in\mathbb{N}_0^n:a_\alpha\neq 0,|\alpha|=k\}$ – множество индексов оператора $L_k(D)$ младших производных из (2). Обозначим $T_j=\Gamma_{j-1}\setminus\Gamma_j$ для $j\in I_{n-1}$ и $T_n=\Gamma_{n-1}$, где множество Γ_j определяется рекуррентно по формуле $\Gamma_j=\min\limits_j\Gamma_{j-1}$, а операция $\min\limits_j$ задана над множествами $B\subset\mathbb{N}_0^n$ следующим образом: $\min\limits_j B=\{\beta\in B:\forall\alpha\in B,\beta_j\le\alpha_j\}$. Выберем последовательность натуральных чисел $\left\{k_1,\ldots,k_{s_o}\right\}$ так, чтобы множества T_{k_i} были не пусты и $\Gamma_0=\bigcup\limits_{i=1}^{s_o}T_{k_i}$. Очевидно, что $i\neq j\Rightarrow T_{k_i}\cap T_{k_j}=\varnothing$. Из определения последовательности $\{k_i\}$ видно, что $k_{s_o}=n$. Определим символ $MinL_k$ как вектор β – единственный элемент множества T_n. Тогда, каждому множеству T_{k_i} ($0<i<s_o$) соответствует β_{k_i} -я компонента вектора β так, что $\Gamma_{k_{i-1}}=\cdots=\Gamma_{k_i-1}$ при условии, что $k_0=0$.

Пример 3. Пусть

$$L(D)=\frac{\partial^5}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3\partial x_4}+\frac{\partial^5}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3^2}+\frac{\partial^5}{\partial x_1^2\partial x_3^2\partial x_4}+\frac{\partial^6}{\partial x_4^6},$$

тогда

$$\Gamma_0=\left\{(1,2,1,1);(1,2,2,0);(2,0,2,1)\right\},\ \Gamma_1=\Gamma_2=\left\{(1,2,1,1);(1,2,2,0)\right\},\ \Gamma_3=\left\{(1,2,1,1)\right\}.$$

Поэтому $T_1=\Gamma_0\setminus\Gamma_1=\left\{(2,0,2,1)\right\}$, $T_2=\Gamma_1\setminus\Gamma_2=$, $T_3=\Gamma_2\setminus\Gamma_3=\left\{(1,2,2,0)\right\}$, $T_4=\Gamma_3=\left\{(1,2,1,1)\right\}$. Поэтому в нашем случае $\beta=(1,2,1,1)$, $k_1=1,k_2=3,k_3=4$ и $\Gamma_0=T_1\cup T_3\cup T_4$, а, следовательно, $s_o=3$.

Пусть $p\in\mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение

$$K^p(D)u(x)\equiv\left(K_1(D)+K_2(D)\right)^p u(x)=0,$$

в котором $K_1(x)$ и $K_2(x)$ однородные полиномы степени k и кроме этого полином $K_1(x)$ по отношению к x_l имеет минимальную степень большую чем β_l, а полином $K_2(x)$ – однороден по x_l степени β_l. Определим множества полиномов $\Lambda_{m,r}^s$ следующим рекуррентным соотношением:

$$\Lambda_{m,r}^s=\left(\ker K^r(D)\cap\mathcal{P}_s\right)\setminus\Lambda_{m,r-1}^s, r>1;\quad \Lambda_{m,1}^s=\ker K(D)\cap\mathcal{P}_s,$$

в котором $s=m+k(p-1)$, а $\mathcal{P}_s$ – множество однородных полиномов степени s.

Лемма 1. Всякий полином $\vartheta_p(x)\in\Lambda_{m,p}^s$ может быть записан в форме

$$\vartheta_p(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+p-1}{p-1} K_1^i(D) u_{i+p-1}(x), \tag{4}$$

где $\delta(m) = m + (p-1)\beta_l$, а $\{u_i(x) : i \in \mathbb{N}_0\}$ – некоторая 0-нормированная система полиномов относительно оператора $K_2(D)$, удовлетворяющая условию $u_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$.

Доказательство. Во-первых, необходимо отметить, что по теореме 1 из [1] для любого основания $u_0(x) \in \ker K_2(D) \cap \mathcal{P}_m$ существует 0-нормированная относительно $K_2(D)$ система полиномов такая, что $u_i(x) \in \mathcal{P}_{m+ik}$. Определим полином $S_n^{(p)}(x)$ следующим равенством:

$$S_n^{(p)}(x) = \binom{n+p-1}{p-1} K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x).$$

Пусть полиномы $\vartheta_r(x)$, $1 \le r \le p$ определяются из равенства

$$\vartheta_r(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-1}(x). \tag{5}$$

Ясно, что $\vartheta_p(x)$, найденный по этой формуле, совпадает с (4). Тогда для $r > 1$ можно записать

$$K(D)\vartheta_r(x) = (K_1(D) + K_2(D)) \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-1}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^{i+1}(D) u_{i+r-1}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\delta(m)+1} (-1)^{i-1} \binom{i+r-2}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-1}{r-1} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) =$$

$$= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \left(\binom{i+r-1}{r-1} - \binom{i+r-2}{r-1} \right) K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) =$$

$$= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i \binom{i+r-2}{r-2} K_1^i(D) u_{i+r-2}(x) = (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(r)}(x) + \vartheta_{r-1}(x).$$

Аналогично, при $r = 1$ можно найти

$$K(D)\vartheta_1(x) = (K_1(D) + K_2(D)) \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^i(D) u_i(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^i(D) u_{i-1}(x) = \sum_{i=0}^{\delta(m)} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) - \sum_{i=0}^{\delta(m)-1} (-1)^i K_1^{i+1}(D) u_i(x) = \tag{6}$$

$$= (-1)^{\delta(m)} S_{\delta(m)}^{(1)}(x).$$

Далее следует заметить, что для $r \le p$ верны рассуждения

$$S_n^{(p)}(x) = 0 \Rightarrow K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = K_2^{p-r}(D) K_1^{n+1}(D) u_{n+p-1}(x) = K_1^{n+1}(D) u_{n+r-1}(x) \Rightarrow S_n^{(r)}(x) = 0.$$

Поэтому для выполнения условий

$$K(D)\vartheta_r(x) = \vartheta_{r-1}(x),\ 2 \le r \le p; \quad K(D)\vartheta_1(x) = 0,$$

необходимо, чтобы $S_{\delta(m)}^{(p)}(x) = 0$. Поскольку степень полинома $u_{n+p-1}(x)$ по переменной x_l равна $m + (n+p-1)\beta_l$, а оператор $K_1^{n+1}(D)$ снижает степень полинома по переменной x_l не меньше чем на $\beta_l + 1$, то степень полинома $K_1^n(D) u_{n+p-1}(x)$ по переменной x_l не больше, чем $m + (n+p-1)\beta_l - n(\beta_l + 1) = m + (p-1)\beta_l - n$. Если n выбрано так, что $m + (p-1)\beta_l \le n$, то $S_n^{(p)}(x) = 0$. Поскольку $\delta(m) = m + (p-1)\beta_l$, то $S_{\delta(m)}^{(p)}(x) = 0$. Кроме этого, общая степень полинома $\vartheta_p(x)$ равна $m+k(p-1)$. Далее, так как $K^i(D)\vartheta_p(x)=\vartheta_{p-i}(x)\neq 0$ для $i=0,1,\ldots,p-1$ (первый член в сумме (5), через которую представляется полином $\vartheta_{p-i}(x)$) обладает наибольшей по x_l степенью и равен $u_{p-i-1}\neq 0$) и $K^p(D)\vartheta_p(x)=0$, то справедливо включение $\vartheta_p(x)\in\Lambda^s_{m,p}$.

Убедимся, что линейная независимость полиномов $u_0^{(1)}(x)$ и $u_0^{(2)}(x)$ (это основания соответствующих 0-нормированных систем) приводит к линейной независимости полиномов $u_{p-1}^{(1)}(x)$ и $u_{p-1}^{(2)}(x)$. Действительно, если полиномы $u_{p-1}^{(1)}(x)$ и $u_{p-1}^{(2)}(x)$ линейно зависимы, то $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha u_{p-1}^{(1)}(x)+\beta u_{p-1}^{(2)}(x)=0\Rightarrow K_2^{p-1}(D)(\alpha u_{p-1}^{(1)}(x)+\beta u_{p-1}^{(2)}(x))=0\Rightarrow\alpha u_0^{(1)}(x)+\beta u_0^{(2)}(x)=0$, т.е. полиномы $u_0^{(1)}(x)$ и $u_0^{(2)}(x)$ линейно зависимы. Противоречие. Значит, $u_{p-1}^{(1)}(x)$ и $u_{p-1}^{(2)}(x)$ линейно независимы. Из этого, в свою очередь, следует линейная независимость полиномов $\vartheta_p^{(1)}(x)$ и $\vartheta_p^{(2)}(x)$, поскольку в сумме (4) только первые слагаемые $u_{p-1}^{(1)}(x)$ и $u_{p-1}^{(2)}(x)$ имеют старшую степень по переменной x_l, и они линейно независимы. Следовательно,

$$\dim\Lambda^s_{m,p}\geq\dim\left(\ker K_2(D)\cap\mathcal{P}_m\right). \tag{7}$$

Если обозначить

$$l_\lambda=\dim\left(\left(\ker K_2^\lambda(D)\setminus\ker K_2^{\lambda-1}(D)\right)\bigcap\mathcal{P}_s\right),$$

где $s=m+k(p-1)$, тогда, используя предложение 1 из [1], нетрудно получить

$$l_\lambda=\binom{s-k(\lambda-1)+n-1}{n-1}-\binom{s-k\lambda+n-1}{n-1}.$$

Ясно, что $l_p\equiv\Lambda^s_{m,p}$. Так как подстановка $\lambda=p$ в предыдущее равенство дает

$$l_p=\binom{s-k(p-1)+n-1}{n-1}-\binom{s-kp+n-1}{n-1}=\binom{m+n-1}{n-1}-\binom{m-k+n-1}{n-1}=\dim(\ker K_2(D)\cap\mathcal{P}_m),$$

то неравенство (7) превращается в строгое равенство. Поэтому, если выбрать в (4) вместо $u_0(x)$ базисные полиномы из $\ker K_2(D)\cap\mathcal{P}_m$, то полиномы $\vartheta_p(x)$ будут базисом в $\Lambda^s_{m,p}$. Чтобы завершить доказательство остается заметить, что почленная линейная комбинация двух 0-нормированных относительно одного и того же оператора систем полиномов будет также 0-нормированной системой полиномов относительно этого же оператора. Лемма доказана. □

Предложение 1. Пусть операторы $K_1(D)$, $K_2(D)$ и $K(D)$ такие, как описаны в лемме 1. Тогда для любой 0-нормированной относительно оператора $K(D)$ системы полиномов $\{\vartheta_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$, удовлетворяющей условию $\vartheta_i(x)\in\mathcal{P}_{m+ik}$, и натурального числа n существует 0-нормированная относительно оператора $K_2(D)$ система полиномов $\{u_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$ такая, что

$$\vartheta_s(x)=\sum_{i=0}^{m+s\beta_l}(-1)^i\binom{i+s}{s}K_1^i(D)u_{i+s}(x) \tag{8}$$

для $s=0,1,\ldots,n$.

Доказательство. Поскольку $\vartheta_n(x)\in\mathcal{P}_{m+kn}$ и $\vartheta_n(x)$ – элемент множества $\{\vartheta_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$, то по лемме 1 найдется 0-нормированная относительно оператора $K_2(D)$ система полиномов $\{u_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$ такая, что выполнено равенство (8) при $s=n$. Принимая во внимание, что по лемме 1 верны равенства $K(D)\vartheta_s(x)=\vartheta_{s-1}(x)$ для $s>1$ и $K(D)\vartheta_0(x)=0$ завершаем доказательство. □

Предложение 2. Пусть $K(D)=K_1(D)+K_2(D)$. Если оператор $K_1(D)$ не однороден и наименьшая степень производных, входящих в него, больше σ – порядка однородного оператора

$K_2(D)$, то всякое полиномиальное степени m решение уравнения $K(D)v(x)=0$ может быть записано в виде

$$v(x)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i K_1^i(D)u_i(x), \tag{9}$$

где $\{u_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ – некоторая 0-нормированная относительно оператора $K_2(D)$ система полиномов такая, что $u_i(x)\in\mathcal{P}_{m+i\sigma}$.

Доказательство. Заметим, что формула (9) совпадает с формулой (3), записанной для уравнения $K(D)v(x)=0$ $(L_1=K_2, L_2=K_1)$, если $K_1^l(D)u_l(x)=0$ при $l>m$. Последнее же очевидно выполняется и значит (9) задает решение уравнения $K(D)v(x)=0$. Согласно предложению 1 из [1] имеем равенство $\dim(\ker K(D)\cap \mathrm{U}_m)=\dim(\ker K_2(D)\cap \mathrm{U}_m)$, где U_m – пространство полиномов степени m [1]. Поскольку линейная независимость полиномов $u_0^{(1)}(x)$ и $u_0^{(2)}(x)$ (основания соответствующих 0-нормированных систем) ведет к линейной независимости по старшему члену полиномов $v^{(1)}(x)$ и $v^{(2)}(x)$ из (3), то базис в $\ker K_2(D)\cap \mathrm{U}_m$ порождает по формуле (9) базис в $\ker K(D)\cap \mathrm{U}_m$. Разложим по этому базису $v(x)$ – произвольное полиномиальное степени m решение уравнения $K(D)v(x)=0$. Имеем $v(x)=\sum_j \alpha_j v^{(j)}(x)$. Тогда, если обозначить $u_i(x)=\sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x)$, то будем иметь

$$v(x)=\sum_j \alpha_j v^{(j)}(x)=\sum_j \alpha_j \sum_{i=0}^{m}(-1)^i K_1^i(D)u_i^{(j)}(x)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i K_1^i(D)\sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i K_1^i(D)u_i(x),$$

причем $K_2(D)u_0(x)=K_2(D)\sum_j \alpha_j u_0^{(j)}(x)=0$ и

$$K_2(D)u_i(x)=K_2(D)\sum_j \alpha_j u_i^{(j)}(x)=\sum_j \alpha_j u_{i-1}^{(j)}(x)=u_{i-1}(x).$$

Искомая 0-нормированная система $\{u_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ полиномов относительно оператора $K_2(D)$ построена. Доказательство завершено. □

Рассмотрим дифференциальные операторы $I_s(D)$ и $J_i(D)$, определяемые равенствами

$$I_s(D)=\sum_{i=s}^{s_o} J_i(D), \quad J_i(D)=\sum_{\alpha\in T_{k_i}} a_\alpha D^\alpha.$$

Пусть $\{\vartheta_i^{(j)}(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ при $j=1,\dots,N_m$ набор 0-нормированных относительно оператора $I_s(D)$ систем полиномов, удовлетворяющих условию $\vartheta_i^{(j)}(x)\in\mathcal{P}_{m+ik}$ с основаниями $\vartheta_0^{(j)}(x)$, образующими при $j=1,\dots,N_m$ базис среди полиномиальных степени m решений уравнения $I_s(D)v(x)=0$. Очевидно, что по теореме 1 из [1] такие системы всегда существуют.

Введем полиномы $u_j(x)$, определяемые из равенства

$$u_j(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(m)}(-1)^i\left(L(D)-I_s(D)\right)^i \vartheta_i^{(j)}(x), \tag{10}$$

где $\alpha(m)=m+\delta_1(m)+\dots+\delta_{s-1}(m)$ и $\delta_j(i)$ определяются рекуррентно: $\delta_j(i)=m+\beta_{k_j}(i+\delta_1(i)+\dots+\delta_{j-1}(i))$ для $j>1$, а $\delta_1(i)=m+\beta_{k_1}i$. Ясно, что $\alpha(m)=\alpha(m)_{|m=1}m$, поскольку $\delta_1(m)=m+\beta_{k_1}m=(1+\beta_{k_1})m=\delta_1(m)_{|m=1}m$ и по индукции $\delta_j(m)=m+\beta_{k_j}(m+\delta_1(m)+\dots+\delta_{j-1}(m))=\delta_j(m)_{|m=1}m$.

Теорема 1. Максимальная система линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени m решений однородного уравнения (2) ($f(x)=0$) может быть определена в виде $\{u_j(x): j=1,\ldots,N_m\}$, где $u_j(x)$ находятся из (10).

Доказательство. Пусть $J_0(D)=L(D)-L_k(D)$. Разложим оператор $L(D)$ в следующую сумму операторов:

$$L(D)=\sum_{i=0}^{s-1} J_i(D)+I_s(D).$$

Обозначим

$$K_1(D)=J_l(D), \quad K_2(D)=J_{l+1}(D)+\cdots+J_{s-1}(D)+I_s(D),$$

где $s>l\geq 1$ и $s>1$. Заметим, что полиномы $K_1(x)$ и $K_2(x)$ удовлетворяют всем требованиям леммы 1 и поэтому мы вправе использовать предложение 1. Воспользовавшись равенством (8) $s-1$ раз при $l=1,\ldots,s-1$ устанавливаем, что для произвольной 0-нормированной относительно оператора $J_1(D)+\cdots+J_{s-1}(D)+I_s(D)$ системы полиномов $\{w_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$, удовлетворяющих условию $w_i(x)\in\mathcal{P}_{m+ik}$ и натурального n найдется 0-нормированная относительно оператора $I_s(D)$ система полиномов $\{\vartheta_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ такая, что

$$w_i(x)=\sum_{i_1,\ldots,i_{s-1}}(-1)^{|i|_{s-1}}\binom{|i|_1}{i_1}\cdots\binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)\vartheta_{|i|_{s-1}}(x),$$

где $i=0,\ldots,n$, $|i|_j=i+i_1+\cdots+i_j$, причем $|i|_0=i$, а суммирование ведется по всем $i_1,\ldots,i_{s-1}$ из $\mathbb{N}_0$, удовлетворяющим неравенствам $i_j\leq m+|i|_{j-1}\beta_{k_j}$, $j\in I_{s-1}$. Отсюда нетрудно получить, что

$$w_i(x)=\sum_{k=0}^{\gamma_i(m)}(-1)^k\sum_{|i|_{s-1}=k}\binom{|i|_1}{i_1}\cdots\binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)\vartheta_{i+k}(x),$$

где $\gamma_i(m)=\delta_1(m)+\cdots+\delta_{s-1}(m)$ и, следовательно, поскольку

$$\sum_{|i|_{s-1}=k}\binom{|i|_1}{i_1}\cdots\binom{|i|_{s-1}}{i_{s-1}}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)=\sum_{i_1+\cdots+i_{s-1}=k}\frac{(i+i_1)!}{i!i_1!}\cdots\frac{(i+i_1+\cdots+i_{s-1})!}{(i+i_1+\cdots+i_{s-2})!i_{s-1}!}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)=$$

$$=\sum_{i_1+\cdots+i_{s-1}=k}\frac{(i+i_1+\cdots+i_{s-1})!}{i!i_1!\cdots i_{s-1}!}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)=\frac{(i+k)!}{i!k!}\sum_{i_1+\cdots+i_{s-1}=k}\frac{k!}{i_1!\cdots i_{s-1}!}J_1^{i_1}(D)\cdots J_{s-1}^{i_{s-1}}(D)=$$

$$=\binom{i+k}{i}\left(J_1(D)+\cdots+J_{s-1}(D)\right)^k,$$

будем иметь

$$w_i(x)=\sum_{k=0}^{\gamma_i(m)}(-1)^k\binom{i+k}{k}\left(J_1(D)+\cdots+J_{s-1}(D)\right)^k\vartheta_{i+k}(x). \tag{11}$$

Если $L(D)=L_k(D)$, то вычисляя

$$u(x)=w_0(x)=\sum_{k=0}^{\gamma_0(m)}(-1)^k\left(J_1(D)+\cdots+J_{s-1}(D)\right)^k\vartheta_k(x),$$

можно перейти к доказательству после формулы (13). Если же оператор $L(D)$ имеет степень больше k, то воспользуемся предложением 2, а именно формулой (9), при

$$K_1(D)=J_0(D), \quad K_2(D)=J_1(D)+\cdots+J_{s-1}(D)+I_s(D).$$

По этой формуле для любого $u(x)$ – полиномиального решения однородного уравнения (2) найдется соответствующая 0-нормированная относительно оператора $L(D)-J_0(D)$ система полиномов $\{w_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$, которая в свою очередь может быть задана системой $\{\vartheta_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$, такая, что

$$u(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j J_0^j(D)w_j(x). \tag{12}$$

Подставляя сюда $w_j(x)$ из (11) и учитывая при этом, что $\gamma_i(m)\le\gamma_m(m)$ для $i\le m$ (увеличивая верхний предел в сумме из (11) мы добавляем в сумму лишь нулевые члены) и $\alpha(m)=m+\gamma_m(m)$, получим

$$u(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j J_0^j(D)\sum_{k=0}^{\gamma_m(m)}(-1)^k\binom{j+k}{k}\big(J_1(D)+\dots+J_{s-1}(D)\big)^k\vartheta_{j+k}(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\alpha(m)}(-1)^i\sum_{j+k=i}\binom{j+k}{k}J_0^j(D)\big(J_1(D)+\dots+J_{s-1}(D)\big)^k\vartheta_i(x).$$

Отсюда сразу находим

$$u(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(m)}(-1)^i\big(J_0(D)+J_1(D)+\dots+J_{s-1}(D)\big)^i\vartheta_i(x). \tag{13}$$

В силу леммы 1 линейная независимость полиномов $\vartheta_0^{(1)}(x)$ и $\vartheta_0^{(2)}(x)$ – оснований соответствующих 0-нормированных систем влечет за собой линейную независимость полиномов $w_0^{(1)}(x)$ и $w_0^{(2)}(x)$ из формулы (11), а из этого следует линейная независимость полиномов $u^{(1)}(x)$ и $u^{(2)}(x)$, находимых по формуле (12), поскольку в сумме (12) первые слагаемые $w_0^{(1)}(x)$ и $w_0^{(2)}(x)$ имеют наибольшую степень, а они линейно независимы. Поэтому, учитывая что в соответствии с предложением 1 из [1] $N_m(n,k)$ – максимальное число линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени m решений однородного уравнения (2) равно числу базисных полиномиальных степени m решений уравнения $I_s(D)v(x)=0$, т.е. $N_m(n,k)=N_m$, то система полиномов $\{u_j(x): j=1,\dots,N_m\}$ является максимальной системой линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени m решений однородного уравнения (2). Доказательство теоремы завершено. □

Замечание 1. Значение $\alpha(m)$, вычисленное для некоторых конкретных примеров оказывается довольно завышенным, поскольку в теореме оно служит лишь для доказательства того, что $u_j(x)$ – полином.

Пример 4. Пусть $L(D)=L_2(D)=\Delta$. Используя теорему 1, найдем связь между гармоническими полиномами от n переменных и гармоническими полиномами от $n-1$ переменной. В соответствии с определением вектора $\beta=MinL_2$ найдем $\beta=(0,\dots,0,2)$, $k_i=i$ и поэтому $\beta_{k_i}=0$, $\delta_1(m)=m$. Выберем $s=2$ и поэтому $I_2(D)=\widetilde{\Delta}\equiv\Delta-\partial^2/\partial x_1^2$, $\alpha(m)=2m$. Чтобы использовать теорему 1 мы должны найти такие 0-нормированные относительно $\widetilde{\Delta}$ системы полиномов, чтобы их основания образовывали базис в $\ker\widetilde{\Delta}\cap\mathcal{P}_m$.

По формуле (11) из [1] находим максимальное число линейно независимых однородных степени m гармонических полиномов от n переменных $N_m(n,2)=\binom{m+n-1}{n-1}-\binom{m-2+n-1}{n-1}$ ($s=t=1$, $V_m^1=\{0\}$). Проверим, что системы полиномов $\left\{h_{i,j}^s(\tilde{x})x_1^{m-s,!}: i\in\mathbb{N}_0\right\}$, где $j=1,\dots,N_s(n-1,2)$, $s=0,\dots,m$, $\tilde{x}=(x_2,\dots,x_n)$ и

$$h_{i,j}^s(\tilde{x})=\frac{\|\tilde{x}\|^{2i}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}H_s^j(\tilde{x}),$$

$(a,b)_k=a(a+b)(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера (при соглашении $(a,b)_0=1$), а система полиномов $\{H_s^j(\tilde{x}): j=1,\dots,N_s(n-1,2),\ s=0,\dots,m\}$ образует базис в однородных гармонических полиномах степени s от $n-1$ переменной являются 0-нормированными относительно $\widetilde{\Delta}$. Действительно, поскольку $\Delta\|x\|^m H_s(x)=m(m+2s+n-2)\|x\|^{m-2}H_s(x)$, где $H_s(x)$ – однородный гармонический полином степени s, то вычисления показывают что

$$\widetilde{\Delta}h_{i,j}^s(\tilde{x})=\frac{2i(2i+2s+n-3)}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}\|\tilde{x}\|^{2i-2}H_s^j(\tilde{x})=\frac{\|\tilde{x}\|^{2i-2}}{(2,2)_{i-1}(n-1+2s,2)_{i-1}}H_s^j(\tilde{x})=\widetilde{\Delta}h_{i-1,j}^s(\tilde{x}).$$

Кроме этого, $\widetilde{\Delta}h_{0,j}^s(\tilde{x})=0$. Значит, системы полиномов $\left\{h_{i,j}^s(\tilde{x})x_1^{m-s,!}:i\in\mathbb{N}_0\right\}$ являются 0-нормированными относительно оператора $\widetilde{\Delta}$. Рассмотрим основания этих систем $h_{0,j}^s(\tilde{x})x_1^{m-s,!}=x_1^{m-s,!}H_s^j(\tilde{x})$ при $j=1,\dots,N_s(n-1,2)$ и $s=0,\dots,m$. Поскольку

$$0=\widetilde{\Delta}P(x)\equiv\widetilde{\Delta}\sum_{s=0}^m x_1^{m-s}P_s(\tilde{x})=\sum_{s=0}^m x_1^{m-s}\widetilde{\Delta}P_s(\tilde{x})\Rightarrow\widetilde{\Delta}P_s(\tilde{x})=0\Rightarrow P_s(\tilde{x})=\sum_j c_{s,j}H_s^j(\tilde{x})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\sum_{s=0}^m x_1^{m-s}P_s(\tilde{x})=\sum_{s=0}^m x_1^{m-s}\sum_j c_{s,j}H_s^j(\tilde{x})=\sum_{s,j}(m-s)!c_{s,j}x_1^{m-s,!}H_s^j(\tilde{x}),$$

то основания систем $h_{0,j}^s(\tilde{x})x_1^{m-s,!}$ образуют базис в $\ker\widetilde{\Delta}\cap\mathcal{P}_m$. Поэтому по теореме 1 произвольный однородный гармонический полином от n переменных степени m может быть представлен как линейная комбинация полиномов вида (10)

$$u(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(m)}(-1)^i(\Delta-\widetilde{\Delta})^i\vartheta_i(x)=\sum_{i=0}^{[(m-s)/2]}(-1)^i D_{x_1}^{2i}\frac{\|\tilde{x}\|^{2i}x_1^{m-s,!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}H_s(\tilde{x})=$$

$$=\sum_{i=0}^{[(m-s)/2]}(-1)^i\frac{\|\tilde{x}\|^{2i}x_1^{m-s-2i,!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i}H_s(\tilde{x})=G_{m-s}^s(x)H_s(\tilde{x}),$$

где обозначено

$$G_k^s(x)=\sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i\frac{\|\tilde{x}\|^{2i}x_1^{k-2i,!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i},\tag{14}$$

а $H_s(\tilde{x})$ – произвольный гармонический полином от $n-1$ переменной.

Итак, для того чтобы из однородного гармонического полинома от $n-1$ переменной $H_s(\tilde{x})$ получить однородный гармонический полином от n переменных $H_m(x)$ необходимо его умножить на полином $G_{m-s}^s(x)$ из (14). Если взять базисные гармонические полиномы $\{H_s^j(\tilde{x}):0\le s\le m\}$ степени m от $n-1$ переменной, то система полиномов $\{G_{m-s}^s(x)H_s^j(\tilde{x}):0\le s\le m\}$ будет базисом в однородных степени m гармонических полиномах от n переменных. Это соответствует замечанию 1 из [1].

Рассмотрим неоднородное уравнение (2), в котором $f(x)$ – однородный полином степени l.

Теорема 2. Любое полиномиальное степени $l+k$ решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$u(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i\vartheta_i(x),\tag{15}$$

где система полиномов $\{\vartheta_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$ – некоторая f-нормированная система полиномов относительно оператора $I_s(D)$, удовлетворяющая условию $\vartheta_i(x)\in\mathcal{P}_{l+k(i+1)}$.

Доказательство. Заметим, что если иметь в виду формулу (13) из теоремы 1 при $m=k+l$, то достаточно доказать представление хотя бы одного частного решения уравнения (2) в виде (15). Действительно, если $\{w_i(x):i\in\mathbb{N}_0\}$ – некоторая 0-нормированная система полиномов, задающая по теореме 1 произвольный полином $u_0(x)\in\ker L(D)\cap\mathcal{P}_{l+k}$ по формуле (13), то система

$\{w_i(x)+\vartheta_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ такая, что $w_i(x)+\vartheta_i(x)\in\mathcal{P}_{l+k(i+1)}$ будет f-нормированной системой полиномов относительно оператора $I_s(D)$, т.е.

$$I_s(D)(w_i(x)+\vartheta_i(x))=w_{i-1}(x)+\vartheta_{i-1}(x); I_s(D)(w_0(x)+\vartheta_0(x))=I_s(D)\vartheta_0(x)=f$$

и, значит, будет верно представление вида (15)

$$u_0(x)+u(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i w_i(x)+$$

$$+\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i\vartheta_i(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i(w_i(x)+\vartheta_i(x)).$$

Пусть $\{\vartheta_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ – система полиномов f-нормированная относительно оператора $I_s(D)$, удовлетворяющая условию $\vartheta_i(x)\in\mathcal{P}_{l+k(i+1)}$. Очевидно, что такая система существует. Тогда для полинома $u(x)$, определяемого по формуле (15), аналогично (6) будем иметь

$$L(D)u(x)=(L(D)-I_s(D)+I_s(D))\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i\vartheta_i(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^{i+1}\vartheta_i(x)+\sum_{i=1}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^i\vartheta_{i-1}(x)+f(x)=$$

$$=f(x)+\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^{i+1}\vartheta_i(x)-\sum_{i=0}^{\alpha(k+l)-1}(-1)^i\big(L(D)-I_s(D)\big)^{i+1}\vartheta_i(x)=$$

$$=f(x)+(-1)^{\alpha(k+l)}\big(L(D)-I_s(D)\big)^{\alpha(k+l)+1}\vartheta_{\alpha(k+l)}(x).$$

Поэтому, если выполнено равенство

$$\big(L(D)-I_s(D)\big)^{\alpha(k+l)+1}\vartheta_{\alpha(k+l)}(x)=0, \tag{16}$$

то формула (15) будет задавать полиномиальное решение уравнения (2). Равенство же (16) легко следует из определения величины $\alpha(m)$, так как для того, чтобы было выполнено равенство

$$\big(L(D)-I_s(D)\big)^{\alpha(m)+1}\vartheta_{\alpha(m)}(x)=0,$$

не имеет значения является ли система $\{\vartheta_i(x): i\in\mathbb{N}_0\}$ 0-нормированной или нет, а важно лишь включение $\vartheta_i(x)\in\mathcal{P}_{m+ik}$ (см. лемму 1 и теорему 1). Доказательство завершено. □

Приведем более простой способ построения решения неоднородного уравнения (2) с полиномиальной правой частью $f(x)$, вытекающий из теоремы 2. Пусть полином $f(x)$ представляется в форме $f(x)=\sum_\alpha f_\alpha x^{\alpha,!}$, а полиномы $\vartheta_\sigma(x)$ при $\sigma\in\mathbb{N}_0^n$ имеют вид

$$\vartheta_\sigma(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(|\sigma|)}(-1)^i\widetilde{L}^i(D)x^{\beta i+\sigma,!},$$

где $\beta\in\Lambda\equiv\left\{\min_{\pi(1)}\cdots\min_{\pi(n-1)}\Gamma_0:\pi\in S_n\right\}$, $\Gamma_0=\left\{\alpha\in\mathbb{N}_0^n: a_\alpha\neq 0, |\alpha|=k\right\}$, a_α – коэффициенты оператора $L(D)$, S_n – симметрическая группа, а оператор $\widetilde{L}(D)$ определяется равенством

$$\widetilde{L}(D)=\sum_{\alpha\neq\beta}\big(a_\alpha/a_\beta\big)D^\alpha.$$

Базисность системы полиномов $\{\vartheta_\sigma(x):\beta\nleq\sigma,\sigma\in\mathbb{N}_0^n\}$ устанавливает следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть $u(x)$ – некоторое полиномиальное решение уравнения (2), тогда найдутся такие числа C_σ, что имеет место равенство

$$u(x)=\sum_\alpha\big(f_\alpha/a_\beta\big)\vartheta_{\alpha+\beta}(x)+\sum_{\beta\nleq\sigma}C_\sigma\vartheta_\sigma(x). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\beta\in\Lambda$. Разделим обе части уравнения (2) на коэффициент a_β, поскольку $a_\beta\ne 0$. Очевидно, что перенумерацией переменных можно добиться того, чтобы $\beta = MinL_k$. Согласно определения s_o имеем $J_{s_o}(D)=D^\beta$. Воспользуемся примером 2. По нему система полиномов $\left\{x^{k\beta+\alpha,!}: k\in\mathbb{N}_0, \beta\not\leq\alpha\right\}$ является 0-нормированной относительно оператора D^β, т.е. $D^\beta x^{k\beta+\alpha,!}=x^{(k-1)\beta+\alpha,!}$ и $D^\beta x^{\alpha,!}=0$, и имеющей основание $x^{\alpha,!}$. Эти основания составляют базис в $\ker L(D)\cap\mathcal{P}$. Поэтому на основании теоремы 1 система полиномов $\{\vartheta_\sigma(x):|\sigma|=m, \beta\not\leq\sigma\}$, находимых по формуле, являющейся частным случаем формулы (10), образует максимальную систему линейно независимых по старшему члену полиномиальных степени m решений однородного ($f(x)=0$) уравнения (2). Далее, так как система полиномов $\left\{x^{(k+1)\beta+\alpha,!}: k\in\mathbb{N}_0\right\}$ является $x^{\alpha,!}$-нормированной относительно оператора D^β, то по теореме 2 полином $\vartheta_{\alpha+\beta}(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{k\le|\alpha|\le q}(a_\alpha/a_\beta)D^\alpha u(x)=x^{\alpha,!},$$

а, значит, уравнения (2) при $f(x)=a_\beta x^{\alpha,!}$. Поэтому полином следующего вида $\sum_\alpha\left(f_\alpha/a_\beta\right)\vartheta_{\alpha+\beta}(x)$ является частным решением уравнения (2) для заданного $f(x)$. Доказательство завершено. □

Пример 5. Множество Λ для двух основных операторов математической физики $D_t^2-\Delta$ и Δ совпадает с множеством индексов $\Gamma(L)\equiv\left\{\alpha\in\mathbb{N}_0^n: a_\alpha\ne 0\right\}$ их ненулевых коэффициентов. Если $L(D)=D_t^2-\Delta$, тогда можно положить $\beta=(2,0,\ldots,0)$ и поэтому $\widetilde{L}(D)=-\Delta$. В этом случае решение (17) при $f(x)=0$ может быть преобразовано к известной форме [12]

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k,!}\Delta^k P(x)+\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k+1,!}\Delta^k Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые полиномы от $x\in\mathbb{R}^n$.

Литература

1. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.
2. Zweiling, K. Grundlagen einer Theorie der biharmonishen Polynome / K. Zweiling. – Verlag Technik, Berlin, 1952. – 128 p.
3. Бицадзе, А.В. К теории гармонических функций / А.В. Бицадзе // Труды Тбилисского университета. – 1962. – Вып. 84. – С. 35–37.
4. Miles, E.P. Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations / E.P. Miles, E. Williams // Duke Math. Journ. – 1959. – V. 26, № 1. – P. 35–40.
5. Watzlawek, W. Wärmpolynome-Modell für besondere Lösungssysteme bei linearen partiellen Differentialgleichungen / W. Watzlawek // Berichte Math.-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz. – 1983. – V. 211. – P. 1–34.
6. Hile, G.N. Polynomial solutions to Cauchy problems for complex Bessel operators / G.N. Hile, A. Stanoyevitch // Complex Variables. – 2005. – V. 50, № 7–11. – P. 547–574.
7. Bondarenko, B.A. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных / B.A. Bondarenko. – Ташкент: ФАН, 1987. – 127 с.
8. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 534–535.

9. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 384–395.

10. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – V. 287, № 2. – P. 577–592.

11. Филатов, А.Н. Обобщенные ряды Ли и их приложения / А.Н. Филатов. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963. – 108 с.

12. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе // М.: Наука, 1982. – 336 с.

Поступила в редакцию 10 декабря 2010 г.

POLYNOMIAL SOLUTIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS II

V.V. Karachik[1]

A construction method of polynomial solutions to systems of linear partial differential equations with constant coefficients of general form is offered in the article.

Keywords: polynomial solutions, linear partial differential equations.

References

1. Karachik V.V. Polinomial'nye reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proiz-vodnyh s postojannymi kojefficientami I (Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I). *Vestnik JuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2011. Vol. 4, no. 10(227). pp. 4–17. (in Russ.)

2. Zweiling K. *Grundlagen einer Theorie der biharmonishen Polynome*. Verlag Technik, Berlin, 1952. 128 p.

3. Bicadze A.V. *Trudy Tbilisskogo universiteta.* 1962. Vol. 84. pp. 35–37. (in Russ.).

4. Miles E.P., Williams E. Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations *Duke Math. Journ.* 1959. Vol. 26, no. 1. pp. 35–40.

5. Watzlawek W. Wärmpolynome-Modell für besondere Lösungssysteme bei linearen partiellen Differentialgleichungen. *Berichte Math.-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz.* 1983. Vol. 211. pp. 1–34.

6. Hile G.N., Stanoyevitch A. Polynomial solutions to Cauchy problems for complex Bessel operators. *Complex Variables.* 2005. Vol. 50, no. 7–11. pp. 547–574.

7. Bondarenko, B.A. *Bazisnye sistemy polinomial'nyh i kvazipolinomial'nyh reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh* (The basic system of polynomial and quasipolynomial solutions of partial differential equations). Tashkent: FAN, 1987. 127 p. (in Russ.).

8. Karachik V.V. *Dif. uravnenija*. 1991. Vol. 27, no. 3. pp. 534–535. (in Russ.).

9. Karachik V.V., Antropova N.A. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. *Differential Equations.* 2010. Vol. 46, no. 3. pp. 387–399.

10. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.

11. Filatov A.N. *Obobwennye rjady Li i ih prilozhenija* (Generalized Lie series and their applications). Tashkent, AN UzSSR. 1963. 108 p. (in Russ.)

12. Bicadze A.V. *Uravnenija matematicheskoj fiziki* (The equations of mathematical physics). Moskow, Nauka, 1982. 336 p. (in Russ.).

[1] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University. e-mail: karachik@susu.ru