УДК 517.956.225+517.575

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик[1], *Н.А. Антропова*[2]

Найдено полиномиальное решение задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения с полиномиальной правой частью и полиномиальными граничными данными в единичном шаре. Использовалось явное представление гармонических функций в формуле Альманси.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, полиномиальные решения, задача Дирихле, формула Альманси.

1. Введение

Хорошо известно классическое представление Альманси для полигармонической функции $Q(x)$:

$$Q(x) = H_0(x) + |x|^2 H_1(x) + \cdots + |x|^{2s} H_s(x), \tag{1}$$

где $H_k(x)$ – некоторые гармонические функции, которые успешно применяются при построении решений модельных задач для гармонического, бигармонического и полигармонического уравнений. На основании результатов по построению нормированных систем функций для оператора Лапласа [1] в работах автора [2, 3] конечное представление Альманси распространено на аналитические функции действительных переменных. Имеются также многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы, отличные от оператора Лапласа, например [4, 5].

В настоящей работе представления Альманси сначала применяются для построения решения однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения (раздел 2), а затем и для построения решения общей задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре (раздел 3). В [6] с помощью формулы Альманси были построены полиномиальные решения уравнения Пуассона $\Delta u(x) = Q(x)$ и полигармонического уравнения $\Delta^m u(x) = Q(x)$, где $Q(x)$ – произвольный полином. Найденные решения отличаются от полиномиальных решений дифференциальных уравнений в частных производных общего вида [7,8]. В работе [9] было построено полиномиальное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а также третьей краевой задачи. Настоящая работа является продолжением этих исследований на задачу Дирихле для бигармонического уравнения.

В разделе 2 настоящей работы, с помощью исследования свойств представлений Альманси, описанных в леммах 1–5 и теореме 1, в теоремах 2 и 3 будут даны формулы (17) и (20), позволяющие легко вычислять полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения. В разделе 3, в теореме 6, на основании теорем 4 и 5 получена формула (30) для представления полиномиального решения общей задачи Дирихле для бигармонического уравнения с полиномиальными данными. К сожалению, полученные полиномиальные решения для записи их в обычном виде требуют вычисления степеней оператора Лапласа от некоторых многочленов, определяемых данными краевой задачи. Этот недостаток легко устраняется с помощью применения пакета *Mathematica* (см. примеры 1 и 6).

2. Полиномиальное решение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения

Сначала рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в единичном шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

[1] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет. e-mail: karachik@susu.ru

[2] Антропова Наталия Александровна – аспирант, преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем, факультет Вычислительной математики и информатики, Южно-Уральский государственный университет.

$$\Delta^2 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n > 2$. В работе [6] установлено, что некоторое полиномиальное решение бигармонического уравнения (2) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{|x|^4}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+4)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^{k+1} \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x)\, d\alpha. \tag{4}$$

Предположим сначала, что $Q(x) = Q_m(x)$ – однородный полином степени m. В [6] показано, что в этом случае решение (4) может быть записано также в виде

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+1)|x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2}(2m-2s+n,2)_{s+2}}. \tag{5}$$

Здесь $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+(k-1)b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$. Например, $(2,2)_k = (2k)!!$. Заметим, что в знаменателе дроби под знаком суммы стоит выражение $(2m-2s+n,2)_{s+2} = (2m-2s+n)\cdots(2m+n+2)$, которое не обращается в нуль, поскольку $2s \le m$. В [6] установлено, что некоторое полиномиальное решение уравнение Пуассона $\Delta v = Q(x)$ имеет вид

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!} \int_0^1 (1-\alpha)^k \alpha^{k+n/2-1} (-\Delta)^k Q(\alpha x)\, d\alpha. \tag{6}$$

Кроме этого показано [6], что при $Q(x) = Q_m(x)$ решение (6) может быть записано в ином виде

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}}. \tag{7}$$

Установим связь между формулами (7) и (5).

Лемма 1. Пусть полином $v(x)$ определяется из (7), а полином $u(x)$ определяется тоже по формуле (7), но при $Q_{m+2}(x) = v(x)$, тогда полином $u(x)$ имеет вид (5).

Доказательство. По условию леммы

$$v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+1}(2m-2s+n,2)_{s+1}}$$

и поскольку $\deg v(x) = m+2$, то

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s v(x)}{(2,2)_{s+1}(2m+2-2s+n,2)_{s+1}}.$$

Преобразуем полином $u(x)$. Имеем

$$u(x) = \frac{|x|^2 v(x)}{2(2m+n+2)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^s v(x)}{(2,2)_{s+1}(2m+2-2s+n,2)_{s+1}}.$$

Подставим в первый член значение $v(x)$, а во второй сумме учтем, что $\Delta v = Q_m(x)$. Кроме этого при преобразовании первого члена заметим, что $(2m+n+2)(2m-2s+n,2)_{s+1} = (2m-2s+n,2)_{s+2}$ и $(2s+4)(2,2)_{s+1} = (2,2)_{s+2}$. Имеем

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s+2)|x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2}(2m-2s+n,2)_{s+2}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+2} \Delta^{s-1} Q_m(x)}{(2,2)_{s+1}(2m+2-2s+n,2)_{s+1}}.$$

Сдвинем индекс суммирования во второй сумме $s \to s+1$ и тогда области суммирования обоих сумм будут одинаковы. Объединим эти суммы

$$u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{|x|^{2s+4} \Delta^s Q_m(x)}{(2,2)_{s+2}(2m-2s+n,2)_{s+2}} ((s+2)-1).$$

Отсюда сразу следует формула (5).

Рассмотрим бигармоническое уравнение со специальной правой частью

$$\Delta^2 u = |x|^{2m} \cdot P_s(x), x \in D, \tag{8}$$

где $P_s(x)$ – однородный гармонический полином степени s, а $D \subset \mathbb{R}^n$ – звездная область с центром в начале координат. Из результатов работы [6] следует, что решение уравнения $\Delta v = |x|^{2m} \cdot P_s(x)$, записанное в форме (7), имеет вид

$$u(x) = \frac{|x|^{2m+2} \cdot P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)}. \tag{9}$$

Установим аналогичный результат и для бигармонического уравнения.

Теорема 1. Решение уравнения (8), записанное в форме (4) или (5), имеет вид

$$u(x) = C_{m,s} |x|^{2m+4} \cdot P_s(x), \tag{10}$$

где $1/C_{m,s} = (2m+2)(2m+4)(2m+2s+n)(2m+2s+n+2)$.

Доказательство. Обозначим $v(x) = \Delta u$. Тогда $\Delta v = |x|^{2m} P_s(x)$. Будем последовательно применять формулу (7) для нахождения сначала полинома $v(x)$ при $Q_{2m+s}(x) = |x|^{2m} P_s(x)$, а затем и $u(x)$ при $Q_{2m+s+2}(x) = v(x)$. Согласно лемме 1 мы должны получить при этом формулу (5). С другой стороны, полином $v(x)$ будет записан в виде (9)

$$v(x) = |x|^{2m+2} \frac{P_s(x)}{(2m+2)(2m+2s+n)} \equiv |x|^{2m+2} P_s'(x).$$

А, значит, опять используя этот результат, получим, что полином $u(x)$ будет записан в виде

$$u(x) = |x|^{2m+4} \frac{P_s'(x)}{(2m+4)(2m+2s+n+2)}.$$

Подставляя сюда значение $P_s'(x)$, получим (10). Таким образом, формула (5) при $Q_{2m+s}(x) = |x|^{2m} P_s(x)$ имеет вид (10). Согласно [6] формула (5) может быть переписана в виде (4) и значит (4) при $Q(x) = |x|^{2m} P_s(x)$ имеет вид (10).

Разложим $Q_m(x)$ с помощью формулы Альманси (1) на слагаемые вида $|x|^{2s} R_{m-2s}(x)$:

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2 R_{m-2}(x) + \cdots + |x|^{2s} R_{m-2s}(x), m-2s \geq 0. \tag{11}$$

Применим к обеим частям формулу (5). Тогда по теореме 1 решение уравнения $\Delta^2 v(x) = Q_m(x)$, задаваемое формулой (5) имеет вид

$$v(x) = \sum_{s=0}^{[m/2]} \frac{|x|^{2s+4} R_{m-2s}(x)}{(2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)}, \tag{12}$$

где $[a]$ – целая часть числа a, а однородные гармонические полиномы $R_k(x)$ определяются формулой Альманси (11). Из явного вида полиномов $R_k(x)$, найденного в [2], аналогично формуле (7), верно утверждение.

Лемма 2 [9]. Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси (11) имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2,2)_s (2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле (2)–(3) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$.

Лемма 3. Решение $v_s(x)$ однородной задачи Дирихле (2)–(3) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ имеет вид

$$v_s(x) = C'_{m,s} \left(|x|^{2s+4} + (s+1) - (s+2)|x|^2 \right) R_{m-2s}(x), \tag{13}$$

где $1/C'_{m,s} = (2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)$.

Доказательство. Пусть полином $u_s(x)$ определяется формулой

$$v_s(x) = C'_{m,s} \left(|x|^{2s+4} R_{m-2s}(x) + H^1_{m-2s}(x) - |x|^2 H^2_{m-2s}(x) \right),$$

где $H^1_{m-2s}(x)$ и $H^2_{m-2s}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени $m-2s$. Легко видеть, что $C'_{m,s}=C_{s,m-2s}$, где $C_{m,s}$ определен в теореме 1. Используя теорему 1, получим равенство $\Delta^2 v_s(x)=|x|^{2s}R_{m-2s}(x)$. Будем подбирать полиномы $H^1_{m-2s}(x)$ и $H^2_{m-2s}(x)$ так, чтобы выполнялись однородные граничные условия (3). Тогда будем иметь

$$R_{m-2s}(x)-H^1_{m-2s}(x)-H^2_{m-2s}(x)=0\Rightarrow v_{s|\partial\Omega}=0,$$

$$(m+4)R_{m-2s}(x)-(m-2s)H^1_{m-2s}(x)-(m-2s+2)H^2_{m-2s}(x)=0\Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial n}_{|\partial\Omega}=0$$

и поэтому необходимо решить систему уравнений

$$H^1_{m-2s}(x)+H^2_{m-2s}(x)=R_{m-2s}(x),$$

$$(m-2s)H^1_{m-2s}(x)+(m-2s+2)H^2_{m-2s}(x)=(m+4)R_{m-2s}(x).$$

Решение этой системы относительно $H^1_{m-2s}(x)$ и $H^2_{m-2s}(x)$ методом Крамера имеет вид

$$H^1_{m-2s}(x)=R_{m-2s}(x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ m+4 & m-2s+2\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}1 & 1\\ m-2s & m-2s+2\end{vmatrix}=-(s+1)R_{m-2s}(x),$$

$$H^2_{m-2s}(x)=R_{m-2s}(x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ m-2s & m+4\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}1 & 1\\ m-2s & m-2s+2\end{vmatrix}=(s+2)R_{m-2s}(x).$$

Подставляя полученные значения в формулу для $v_s(x)$, получим (13).

Теперь можно построить полином $u_0(x)$ – решение задачи Дирихле (2)–(3) при $Q(x)=Q_m(x)$. Раскладывая однородный полином $Q_m(x)$ по формуле (11), а затем применяя к каждому слагаемому лемму 3 (s заменяется на k), получим решение нашей задачи в виде

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}v_k(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}C'_{m,k}\left(|x|^{2k+4}+(k+1)-(k+2)|x|^2\right)R_{m-2k}(x),$$

где $C'_{m,k}$ определены как и в лемме 3. Как было доказано выше полином

$$\sum_{k=0}^{[m/2]}C'_{m,k}|x|^{2k+4}R_{m-2k}(x)$$

равный полиному из (12), записывается в виде (5). Поэтому

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}v_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)|x|^{2k+4}\Delta^k Q_m(x)}{(2,2)_{k+2}(2m-2k+n,2)_{k+2}}+\sum_{k=0}^{[m/2]}C'_{m,k}\left((k+1)-(k+2)|x|^2\right)R_{m-2k}(x). \quad (14)$$

Преобразуем решение $u_0(x)$.

Лемма 4.Пусть $A=m+n/2$ и

$$A_{s,k}=k(A-2s+2k-3)(A-s+k+1)+(s-k+1)(A-2s+2k-1)(A-2s+k-2),$$

тогда справедливо равенство

$$u_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}}\sum_{k=0}^{s+2}\frac{(-1)^k A_{s,k}|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+4}}, \quad (15)$$

где $(a)_s=a(a+1)\cdots(a+s-1)$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 для преобразования многочлена $u_0(x)$ из (14). Учитывая что $1/C'_{m,s}=(2s+2)(2s+4)(2m-2s+n)(2m-2s+n+2)$, а также $(2,2)_{k+2}=(2k+2)(2k+4)(2,2)_k$ и

$$(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+3}=(2m-2k+n)(2m-2k+n+2)(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+1},$$

перепишем это решение в виде

$$u_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(s+1)|x|^{2s+4}\Delta^sQ_m(x)}{(2,2)_{s+2}(2m-2s+n,2)_{s+2}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(k+1)-(k+2)|x|^2}{(2,2)_{k+2}}\sum_{2s+2k\le m}^{\infty}\frac{(-1)^s(2m+n-4k-2)|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+3}}.$$

Обозначим $s+k=\alpha$ и учтем при этом, что $(2,2)_{k+2}(2,2)_s=2^{\alpha+2}(\alpha-s+2)!s!$ и $(2m+n-4k-2s-2,2)_{s+k+3}=2^{\alpha+3}(A-2\alpha+s-1)_{\alpha+3}$, где $A=m+n/2$. Тогда повторное суммирование преобразуется к виду

$$u_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(s+1)|x|^{2s+4}\Delta^sQ_m(x)}{4^{s+2}(s+2)!(A-s)_{s+2}}+$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\Delta^\alpha Q_m(x)}{4^{\alpha+2}}\sum_{s=0}^{\alpha}(-1)^s(A-2\alpha+2s-1)\frac{(\alpha-s+1)|x|^{2s}-(\alpha-s+2)|x|^{2s+2}}{(\alpha-s+2)!s!(A-2\alpha+s-1)_{\alpha+3}}.$$

Заменим в двукратной сумме α на s, s на α и разделим эту сумму на два слагаемых

$$u_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^sQ_m(x)}{4^{s+2}}\Big((-1)^s\frac{(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s)_{s+2}}+\sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^\alpha\times$$
$$\frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)|x|^{2\alpha}}{(s-\alpha+2)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+3}}-\sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^\alpha\frac{(s-\alpha+2)(A-2s+2\alpha-1)|x|^{2\alpha+2}}{(s-\alpha+2)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+3}}\Big).\qquad(16)$$

Преобразуем выражение в больших круглых скобках, которое обозначим J_1. Если в последней сумме сдвинуть индекс суммирования $\alpha\to\alpha-1$ и выделить отдельно первый член (при $\alpha=0$) у второй суммы, то получим

$$J_1=(-1)^s\frac{(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s)_{s+2}}+\sum_{\alpha=1}^{s+1}(-1)^\alpha|x|^{2\alpha}\Big[\frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{(s-\alpha+2)!\alpha!(A-2s+\alpha-1)_{s+3}}+$$
$$+\frac{(s-\alpha+3)(A-2s+2\alpha-3)}{(s-\alpha+3)!(\alpha-1)!(A-2s+\alpha-2)_{s+3}}\Big]+\frac{(s+1)(A-2s-1)}{(s+2)!(A-2s-1)_{s+3}}$$

или

$$J_1=\frac{(-1)^s(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s)_{s+2}}+\sum_{\alpha=1}^{s+1}\frac{(-1)^\alpha|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+2)!(A-2s+\alpha-1)_{s+2}}\times$$
$$\times\Big[\frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1}+\frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2}\Big]+\frac{(s+1)(A-2s-1)}{(s+2)!(A-2s-1)_{s+3}}.$$

Суммирование во внутренней сумме можно продолжить и на значение $\alpha=0$ и при этом под знаком суммы мы получим значение выражения, равное последнему члену в формуле. Поэтому можно записать

$$J_1=\frac{(-1)^{s+2}(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s)_{s+2}}+\sum_{\alpha=0}^{s+1}\frac{(-1)^\alpha|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+2)!(A-2s+\alpha-1)_{s+2}}\times$$
$$\times\Big[\frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1}+\frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2}\Big].$$

Вычислим значение выражения под знаком суммы при $\alpha=s+2$. Имеем

$$\frac{(-1)^{s+2}|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s+1)_{s+2}}\Big[-1+\frac{(s+2)(A+1)}{A-s}\Big]=\frac{(-1)^{s+2}|x|^{2s+4}(sA+2s+A+2)}{(s+2)!(A-s)_{s+3}}=$$
$$=\frac{(-1)^{s+2}(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!}\frac{(A+2)}{(A-s)_{s+3}}=\frac{(-1)^{s+2}(s+1)|x|^{2s+4}}{(s+2)!(A-s)_{s+2}}.$$

Поэтому можно записать

$$J_1=\sum_{\alpha=0}^{s+2}\frac{(-1)^\alpha|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+2)!(A-2s+\alpha-1)_{s+2}}\Big[\frac{(s-\alpha+1)(A-2s+2\alpha-1)}{A-s+\alpha+1}+\frac{\alpha(A-2s+2\alpha-3)}{A-2s+\alpha-2}\Big].$$

Если привести дроби к общему знаменателю и учесть значение $A_{s,\alpha}$, то получим

$$J_1=\sum_{\alpha=0}^{s+2}\frac{(-1)^{\alpha}A_{s,\alpha}\,|x|^{2\alpha}}{\alpha!(s-\alpha+2)!(A-2s+\alpha-2)_{s+4}}.$$

Подставляя вычисленное значение J_1 в (16), получим (15).

Из полученной формулы (15) сразу не видно, что полином $u_0(x)$, находимый из (15), удовлетворяет однородным условиям (3) $u_0(x)_{|x|=1}=0$, $\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial n}\Big|_{|x|=1}=0$.

Теорема 2. Решение $u_0(x)$ задачи (2)–(3) при $Q(x)=Q_m(x)$ можно записать в виде

$$u_0(x)=(|x|^2-1)^2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+2}},\tag{17}$$

где, как и в лемме 4, для краткости обозначено $A=m+n/2$.

Доказательство. Обозначим полином из (17) через $v(x)$ и разобьем внутреннюю сумму на три слагаемых. Заменяя $k\to k-1$ во второй сумме и $k\to k-2$ в третьей сумме, получим

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{|x|^{2k}-2|x|^{2k+2}+|x|^{2k+4}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+2}}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)}\Big(\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{k!(s-k)!(A-2s+k)_{s+2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{s+1}\frac{2(-1)^k|x|^{2k}}{(k-1)!(s-k+1)!(A-2s+k-1)_{s+2}}+\sum_{k=2}^{s+2}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(k+2)!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+2}}\Big)$$

или

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)}\Big(\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k(s-k+2)(s-k+1)|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k)_{s+2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{s+1}\frac{2(-1)^k k(s-k+2)|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-1)_{s+2}}+\sum_{k=2}^{s+2}\frac{(-1)^k k(k-1)|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+2}}\Big).$$

Учитывая специфику членов у трех рассматриваемых сумм в круглых скобках, суммирование можно взять в общих пределах от 0 до $s+2$:

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)}\sum_{k=0}^{s+2}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!}\times$$

$$\Big(\frac{(s-k+2)(s-k+1)}{(A-2s+k)_{s+2}}+\frac{2k(s-k+2)}{(A-2s+k-1)_{s+2}}+\frac{k(k-1)}{(A-2s+k-2)_{s+2}}\Big).$$

Если обозначить

$$B_{s,k}=(s-k+2)(s-k+1)(A-2s+k-2)(A-2s+k-1)+$$

$$+2k(s-k+2)(A-2s+k-2)(A-s+k+1)+k(k-1)(A-s+k)(A-s+k+1),$$

то получим

$$v(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)}\sum_{k=0}^{s+2}\frac{(-1)^k B_{s,k}\,|x|^{2k}}{k!(s-k+2)!(A-2s+k-2)_{s+4}}.\tag{18}$$

Разложим коэффициент $B_{s,k}$ по степеням $s+2$. Для этого можно воспользоваться пакетом *Mathematica*. Имеем

$$B_{s,k}=(-6-10k-2k^2-5A-4kA-A^2)(s+2)+$$

$$+(16+16k+4k^2+9A+4kA+A^2)(s+2)^2+(-14-8k-4A)(s+2)^3+4(s+2)^4.$$

Если же разложить коэффициент $A_{s,k}$ по степеням $s+2$, то получим

$$A_{s,k}=-6-10k-2k^2-5A-4kA-A^2+$$
$$+(16+16k+4k^2+9A+4kA+A^2)(s+2)+(-14-8k-4A)(s+2)^2+4(s+2)^3.$$

Видно, что $B_{s,k}=A_{s,k}(s+2)$. Подставляя это значение в (18) и сокращая на $(s+2)$ получаем (15). Значит $v(x)=u_0(x)$.

Теперь легко непосредственно видеть, что многочлен $u_0(x)$, удовлетворяющий неоднородному бигармоническому уравнению (2) с $Q(x)=Q_m(x)$, удовлетворяет и однородным условиям Дирихле (3).

Замечание 1. Формулы, задающие решение однородной задачи Дирихле для гармонического уравнения $u_1(x)$ [9] и бигармонического уравнения $u_2(x)$ (17), очень похожи:

$$u_1(x)=(|x|^2-1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+1}(s+1)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+1}}$$

и

$$u_2(x)=(|x|^2-1)^2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+2}(s+2)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+2}}.$$

Пример 1. Решение задачи Дирихле (2)–(3) при $Q_6(x)=x_1^3x_2x_3^2$, записанное в виде (17), легко вычисляется с помощью пакета *Mathematica* и имеет вид

$$u(x_1,x_2,x_3)=-\frac{x_1x_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^2}{12252240}\Big(-255+245x_1^4-63x_2^4-1190x_3^2+861x_3^4+$$
$$+14x_1^2(-17+13x_2^2-350x_3^2)+14x_2^2(17+57x_3^2)\Big).$$

Еще немного преобразуем многочлен $u_0(x)$, являющийся решением задачи Дирихле (2)–(3) при $Q(x)=Q_m(x)$, чтобы затем иметь возможность получить формулу для произвольного $Q(x)$.

Лемма 5. Имеет место равенство

$$u_0(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt. \tag{19}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (17), запишем

$$u_0(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\Delta^s Q_m(x)}{2^s(2s+4)!!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(A-2s+k)_{s+2}},$$

где $A=m+n/2$. Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя определение символа Похгаммера $(a)_k$, свойство гамма функции $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ и связь гамма $\Gamma(x)$ и бета $B(x)$ функций Эйлера, можем записать

$$\frac{1}{(A-2s+k)_{s+2}}=\frac{1}{(A-2s+k)\cdots(A-s+k+1)}=\frac{\Gamma(m+n/2-2s+k)}{\Gamma(m+n/2-s+k+2)}=$$
$$=\frac{B(s+2,m+n/2-2s+k)}{\Gamma(s+2)}=\frac{1}{(s+1)!}\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2+k-2s-1}\,dt.$$

Используя это равенство, внутреннюю сумму, умноженную на $s+1$, запишем в виде

$$\frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+1}t^{m+n/2-2s-1}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}|x|^{2k}\,t^k\,dt=\frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+1}(1-t|x|^2)^s\,t^{m-2s}t^{n/2-1}\,dt.$$

Следовательно, многочлен $u_0(x)$ можно записать в форме

$$u_0(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t)^{s+1}(1-t|x|^2)^s}{(2s+4)!!(2s)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt,$$

что совпадает с формулой (19).

Получим решение задачи Дирихле (2)–(3) с неоднородным многочленом $Q(x)$.

Теорема 3. Решение задачи Дирихле (2)–(3) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ – произвольный полином. Представим его в виде суммы однородных слагаемых $Q(x)=\sum_m Q_m(x)$. Обозначим через $u_m(x)$ полиномиальное решение задачи Дирихле (2)–(3) с правой частью $Q(x)=Q_m(x)$. Тогда очевидно, что искомое решение имеет вид $u(x)=\sum_m u_m(x)$. Из формулы (19) следует, что

$$u(x)=\sum_m u_m(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\alpha^{n/2-1}\Delta^s\sum_m Q_m(\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Замечание 2. Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле (2)–(3) в единичном шаре в случае полиномиальных функций $Q(x)$ можно записать в виде

$$G(x;\alpha)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\alpha^{n/2-1}(\Delta^s\cdot)(\alpha x)$$

и тогда решение (20) имеет вид

$$u(x)=\int_0^1 G(x;\alpha)Q(x)\,d\alpha.$$

Пример 2. Пусть в задаче Дирихле (2)–(3) $Q(x)=x_i$, а значит $m=1$. Тогда в сумме из формулы (20) будет только один член при $s=0$. Получаем

$$u(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1(1-\alpha)\alpha x_i\frac{\alpha^{n/2-1}}{2\cdot 4}\,d\alpha=x_i\frac{(|x|^2-1)^2}{8(n+2)(n+4)}.$$

Можно воспользоваться формулой (15). Тогда так как $A_{s,k}=k(A-2s+2k-3)(A-s+k+1)+(s-k+1)(A-2s+2k-1)(A-2s+k-2)$ и $s=0$, $m=1$, то $A_{0,0}=(A-1)(A-2)$, $A_{0,1}=(A-1)(A+2)$, $A_{0,2}=2(A+1)(A+3)-(A+3)A=(A+3)(A+2)$, $A=(n+2)/2$ и то же решение имеет вид

$$u(x)=\frac{x_i}{4^2}\Big(\frac{A_{0,0}}{2(A-2)_4}-\frac{A_{0,1}|x|^2}{(A-1)_4}+\frac{A_{0,2}|x|^4}{2(A)_4}\Big)=$$

$$=\frac{x_i}{4^2}\Big(\frac{1}{2A(A+1)}-\frac{|x|^2}{A(A+1)}+\frac{|x|^4}{2A(A+1)}\Big)=\frac{x_i(|x|^2-1)^2}{8\cdot 2A(2A+2)}=x_i\frac{(|x|^2-1)^2}{8(n+2)(n+4)}.$$

3. Полиномиальное решение неоднородной задачи Дирихле для однородного бигармонического уравнения

Рассмотрим теперь следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре Ω

$$\Delta^2 u(x)=0,\quad x\in\Omega; \tag{21}$$

$$u_{|\partial\Omega}=P(x),\quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega}=0 \tag{22}$$

с полиномиальным граничным значением $P(x)$ и при $n>2$.

Сформулируем утверждение, дополняющее утверждение теоремы 3.

Рассмотрим оператор $\Lambda u=\sum_{k=1}^{n}x_k u_{x_k}$. Он обладает легко проверяемыми свойствами: $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega}=\Lambda u_{|\partial\Omega}$; если функция u – гармоническая в Ω, то функция Λu тоже гармоническая в Ω; верно равенство $\Lambda(uv)=v\Lambda u+u\Lambda v$; $\Lambda P_m(x)=mP_m(x)$.

Теорема 4. Решение задачи (21)–(22) можно записать в виде

$$v(x)=P(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x)+\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\times$$
$$\times\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big(\Lambda P-\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta P\Big)(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{23}$$

Доказательство. С помощью формулы (20) найдем решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2u(x)=\Delta^2P(x), x\in\Omega;\quad u_{|x|=1}=0, \frac{\partial u}{\partial n}_{|x|=1}=0.$$

Имеем

$$u(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+1}}{(2s)!!(2s+4)!!}\Delta^{s+2}P(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Пусть гармонический полином $u_0(x)$ удовлетворяет условию $u_0(x)_{|x|=1}=\Lambda P(x)_{|x|=1}$. Тогда следующий полином $v(x)=P(x)+u_0(x)(1-|x|^2)/2-u(x)$ является бигармоническим, поскольку $\Delta^2v(x)=\Delta^2P(x)-\Delta^2u(x)=0$ и в силу свойств оператора Λ и функции $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям $v(x)_{|x|=1}=P(x)_{|x|=1}$ и

$$\frac{\partial v}{\partial n}_{|x|=1}=\Lambda\Big(P(x)+\frac{1-|x|^2}{2}u_0(x)\Big)_{|x|=1}=$$
$$=\Big(\Lambda P(x)-|x|^2u_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda u_0(x)\Big)_{|x|=1}=(\Lambda P(x)-u_0(x))_{|x|=1}=0.$$

Преобразуем решение $v(x)$. Полином $u_0(x)$ запишется в виде

$$u_0(x)=\Lambda P(x)-\frac{|x|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Lambda P(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Поэтому искомое решение $v(x)$ запишется в виде

$$v(x)=P(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\Lambda P(x)+$$
$$+\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!}\Delta^{s+1}\Big(\Lambda P-\frac{1-\alpha}{2s+4}\Delta P\Big)(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\,d\alpha.$$

Решение задачи (21)–(22) найдено и оно имеет вид (23).

Пример 3. Пусть в задаче (21)–(22) $P(x)=x_j^2$. Тогда в сумме из формулы (23) будет только один член $s=0$. Ясно, что $\Delta x_j^2=2$, $\Lambda x_j^2=2x_j^2$ и поэтому

$$v(x)=x_j^2+(1-|x|^2)x_j^2+\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\int_0^1\frac{1}{2}\cdot 4\alpha^{n/2-1}\,d\alpha=$$
$$=x_j^2+(1-|x|^2)x_j^2+\frac{1}{n}(|x|^2-1)^2=2x_j^2-x_j^2|x|^2+\frac{|x|^4-2|x|^2+1}{n}.$$

Проверим, что найденное $v(x)$ действительно является решением задачи (21)–(22) с $P(x)=x_j^2$. Воспользуемся простым равенством [6]

$$\Delta(|x|^kP_m(x))=k(2m+k+n-2)|x|^{k-2}P_m(x)+|x|^k\Delta P_m(x).$$

Тогда легко получить

$$\Delta v(x)=4-2(n+4)x_j^2-2|x|^2+(4(n+2)|x|^2-4n)/n$$

и значит полином $v(x)$ бигармонический

$$\Delta^2v(x)=-4(n+4)-4n+\frac{8n(n+2)}{n}=0. \tag{24}$$

Кроме этого $v(x)$ удовлетворяет условиям $v_{|x|=1}=(x_j^2)_{|x|=1}$ и

$$\frac{\partial v}{\partial n}_{|x|=1} = \Lambda v_{|x|=1} = \left(4x_j^2 - 4x_j^2\,|\,x\,|^2 + \frac{4\,|\,x\,|^4 - 4\,|\,x\,|^2}{n}\right)_{|x|=1} = 0.$$

Рассмотрим другую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном шаре Ω:

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{25}$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = R(x) \tag{26}$$

с полиномиальным граничным значением $R(x)$ и при $n > 2$.

Теорема 5. Решение задачи (25)–(26) можно записать в виде

$$v(x) = \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} R(x) - \frac{(|\,x\,|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha\,|\,x\,|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\, d\alpha. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть гармонический полином $u_1(x)$ удовлетворяет условию $u_1(x)_{|x|=1} = R(x)_{|x|=1}$. Тогда следующий полином $v(x) = u_1(x)(|\,x\,|^2 - 1)/2$ является бигармоническим и удовлетворяет условиям $v_{|x|=1} = 0$ и

$$\frac{\partial v}{\partial n}_{|x|=1} = \Lambda v_{|x|=1} = \left(u_1(x)\Lambda \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} + \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} \Lambda u_1(x)\right)_{|x|=1} = (R(x)\,|\,x\,|^2)_{|x|=1} = R(x)_{|x|=1}.$$

Полином $u_1(x)$ можно записать в виде

$$u_1(x) = R(x) - \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha\,|\,x\,|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\, d\alpha$$

и поэтому

$$v(x) = \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} R(x) - \frac{(|\,x\,|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha\,|\,x\,|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^{s+1} R(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\, d\alpha.$$

Что и утверждалось.

Пример 4. Пусть в задаче (25)–(26) $P(x) = x_k^2$. Тогда в сумме из формулы (27) будет только один член $s = 0$. Поэтому

$$v(x) = \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} x_k^2 - \frac{(|\,x\,|^2 - 1)^2}{4} \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2\alpha^{n/2-1}\, d\alpha = \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2} x_k^2 - \frac{(|\,x\,|^2 - 1)^2}{2n}.$$

Аналогично формуле (24) из примера 3 полином $v(x)$ бигармонический

$$\Delta^2 v(x) = 2(n+4) + 2n - 8n(n+2)/(2n) = 0.$$

Кроме этого $v(x)$ удовлетворяет условиям $v_{|x|=1} = 0$ и

$$\frac{\partial v}{\partial n}_{|x|=1} = \Lambda v_{|x|=1} = \left(2x_k^2\,|\,x\,|^2 - x_k^2 - \frac{4\,|\,x\,|^4 - 4\,|\,x\,|^2}{2n}\right)_{|x|=1} = (x_k^2)_{|x|=1}.$$

Объединяя теоремы 4 и 5 получим следующее общее утверждение.

Теорема 6. Решение задачи Дирихле

$$\Delta^2 u(x) = Q(x), \quad x \in \Omega; \tag{28}$$

$$u_{|\partial\Omega} = P(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = R(x) \tag{29}$$

в единичном шаре Ω с полиномиальными данными $Q(x)$, $P(x)$ и $R(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered} u(x) = P(x) + \frac{|\,x\,|^2 - 1}{2}(R(x) - \Lambda P(x)) + \frac{(|\,x\,|^2 - 1)^2}{4} \times \\ \times \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha\,|\,x\,|^2)^s (1-\alpha)^s}{(2s)!!(2s+2)!!} \Delta^s \left(\Delta(\Lambda P - R) + \frac{1-\alpha}{2s+4}(Q - \Delta^2 P)\right)(\alpha x)\alpha^{n/2-1}\, d\alpha. \end{gathered} \tag{30}$$

Доказательство. Как нетрудно заметить решение задачи (28)–(29) можно разложить на сумму решений трех задач (2)–(3), (21)–(22) и (25)–(26). Сумма этих решений, находимых из формул (20), (23) и (27), и дает искомое решение (30).

Пример 5. Найдем решение задачи

$$\Delta^2 u(x) = x_i, x \in \Omega; \quad u_{|\partial\Omega} = x^2_{j|\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = x^2_{k|\partial\Omega}.$$

В соответствии с примерами 2, 3 и 4 будем иметь

$$u(x) = x_i \frac{(|x|^2-1)^2}{8(n+2)(n+4)} + 2x_j^2 - x_j^2|x|^2 + \frac{(|x|^2-1)^2}{n} + \frac{|x|^2-1}{2}x_k^2 - \frac{(|x|^2-1)^2}{2n} =$$

$$= x_j^2 + (|x|^2-1)(x_k^2/2 - x_j^2) + (|x|^2-1)^2\Big(\frac{x_i}{8(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2n}\Big).$$

Пример 6. С помощью пакета *Mathematica* вычислим решение задачи Дирихле

$$\Delta^2 u(x) = x_1^2 - 2x_3^2, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3;$$

$$u_{|\partial\Omega} = \left(x_1^4 x_2^2 + x_2 x_3^5\right)_{|\partial\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = \left(x_1^6 + x_2^4 x_3^2\right)_{|\partial\Omega}$$

по формуле (30). Обозначая $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, запишем

$$u(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2^2 + x_2x_3^5 + \frac{|x|^2-1}{2}\left(x_1^6 - 6x_1^4x_2^2 + x_2^4x_3^2 - 6x_2x_3^5\right) -$$

$$-\frac{(|x|^2-1)^2}{83160}\Big(30240x_1^4 - 7x_1^2(-1727 + 19260x_2^2 - 5400x_2x_3 + 720x_3^2) + +2\Big(2409 + 4410x_2^4 +$$

$$+18900x_2^3x_3 + 352x_3^2 - 630x_3^4 - 900x_2x_3(22 + 105x_3^2) + x_2^2(-2783 + 13230x_3^2)\Big)\Big).$$

Литература

1. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. V. 287, № 2. – pp. 577–592.

2. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – V. 10, № 2. – pp. 142–162.

3. Карачик, В.В. Об одном разложении типа Альманси / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2008. – V. 83, № 3. – pp. 370–380.

4. Nicolescu, N. Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire / N. Nicolescu // Studia Math. – 1958. – V. 16. – pp. 353–363.

5. Карачик, В.В. Разложения Альманси для невырожденных операторов второго порядка / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2010. – Вып. 3. – № 30(206). – С. 4–12.

6. Карачик, В.В. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 384–395.

7. Бондаренко Б.А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях / Б.А. Бондаренко – Ташкент: Фан, 1984. – 183 с.

8. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 4–17.

9. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // ЖВМиМФ. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

Поступила в редакцию 1 октября 2011 г.

CONSTRUCTION OF POLYNOMIAL SOLUTIONS TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

***V.V. Karachik*[1], *N.A. Antropova*[2]**

Polynomial solution to the Dirihlet problem for the nonhomogeneous biharmonic equation with polynomial right hand side and polynomial boundary data in a ball is constructed. Explicit representation of harmonic functions in the Almansi representation is used.

Keywords: biharmonic equation, polynomial solutions, Dirichlet problem, Almansi equation.

References

1. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 287, no. 2. pp. 577–592.
2. Karachik V.V. On one representation of analytic functions by harmonic functions. *Siberian Advances in Mathematics.* 2008. Vol. 18, no. 2, pp. 103–117.
3. Karachik V.V. On an expansion of Almansi type. *Mathematical Notes.* 2008. Vol. 83, no. 3–4. pp. 335–344.
4. Nicolescu N. Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire. *Studia Math.* 1958. Vol. 16. pp. 353–363.
5. Karachik V.V. Razlozheniia Al'mansi dlia nevyrozhdennykh operatorov vtorogo poriadka (Almansi decompositions for non-singular second order partial differential operators). *Vestnik YuUrGU. Seriia «Matematika. Mehanika. Fizika».* 2010. Vol. 3, no. 30(206). pp. 4–12. (in Russ.).
6. Karachik V.V., Antropova N.A. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. *Differential Equations.* 2010, Vol. 46, no. 3. pp. 387–399.
7. Bondarenko B.A. Operatornye algoritmy v differentsial'nykh uravneniiakh (Operator algorithms in differential equations). Fan, Tashkent, 1984. 183 p.
8. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniia differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh s postoiannymi koeffitsientami I (Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I). *Vestnik YuUrGU. Seriia «Matematika. Mehanika. Fizika».* 2011. Vol. 4, no. 10(227). pp. 4–17. (in Russ.).
9. Karachik V.V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1567–1587.

[1] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University. e-mail: karachik@susu.ru
[2] Antropova Natalia Aleksandrovna is Post-graduate student, Teacher, Differential equations and Dynamical Systems Department, South Ural State University.