Механика

УДК 532.516

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

***О.Н. Шабловский*[1]**

Дано новое точное аналитическое решение стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учетом нелинейной внешней силы сопротивления течению. Основные элементы исследования: процессы релаксации в сдвиговом потоке; завихренность при малых и больших градиентах скорости; диффузионная скорость движения вихря.

Ключевые слова: сила трения, течение Куэтта, диффузия вихря, индикаторная функция, релаксация напряжений.

Введение

Плоское двумерное стационарное течение сплошной среды определяется уравнениями [1]:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i \,, \; \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \,; \; i,k = 1,2 \,; \; \rho \equiv \mathrm{const} \,. \tag{1}$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла [2] возьмем в следующей форме записи:

$$\tau_{ij} + \gamma \left[v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + m(\tau_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}\tau_{kj}) \right] = 2\mu e_{ij} \,, \; 2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \,, \; 2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \,. \tag{2}$$

Здесь $x_1 = x$, $x_2 = y$ – декартовы прямоугольные координаты; $\boldsymbol{v}(v_1, v_2)$ – вектор скорости; ρ – плотность; p – давление; $\boldsymbol{F}(F_1, F_2)$ – вектор массовой силы; τ_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; e_{ij} компоненты тензора скоростей деформации; μ – коэффициент динамической вязкости; γ – время релаксации вязких напряжений. Дважды повторяющийся индекс k означает суммирование. Дифференциальный оператор в (2) при $m = 1$ есть конвективная производная Яуманна, при $m = 0$ – обычная субстанциональная производная. При $\gamma = 0$ формула (2) описывает свойства вязкой ньютоновской жидкости. Релаксационная модель Максвелла (2) имеет своим «метагидродинамическим» аналогом уравнение Хинце–Лойцянского в релаксационной теории турбулентных сдвиговых течений [3, 4].

Внешняя сила трения Рэлея $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^R$, $F_i^R = -\zeta v_i$, где $\zeta > 0$ – коэффициент сопротивления, позволяет моделировать периодические течения в тонких слоях жидкости, изучать крупномасштабные океанические процессы [5–8]. Еще одной областью применения модели $\boldsymbol{F}^R = -\zeta \boldsymbol{v}$ являются задачи кластерообразования в расплавах в условиях микрогравитации [9]; при таком подходе гидродинамическое описание расплава в окрестности фронта кристаллизации учитывает присутствие частиц твердой фазы, оказывающих сопротивление потоку. В работах [6–9] применялся линейный вариант силы трения: $\zeta \equiv \mathrm{const}$. В рамках приближения $\zeta \sim |\boldsymbol{v}|$ в [5, гл. 4] построены многоярусные гидродинамические системы, описывающие процесс преобразования энергии в развитом турбулентном потоке. Далее полагаем $\zeta = \zeta(\boldsymbol{v}^2)$ и рассматриваем течения, для которых коэффициент сопротивления – монотонно возрастающая функция модуля скорости, $\partial\zeta / \partial(\boldsymbol{v}^2) > 0$. Будем изучать движение вида

$$v_1 \equiv u = u(y) \,, \; v_2 \equiv 0 \,, \; p = p(y) \,, \tag{3}$$

применяя следующий математический результат. Автономная динамическая система с одной степенью свободы

$$d^2\tau / d\xi^2 = Q(\tau) \,, \; Q(\tau) = 2\tau(k^2 + \tau^2) \tag{4}$$

---

[1] Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра технической механики, машиностроительный факультет, Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого.
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru, shabl@gstu.by

имеет точное решение [10]:

$$\tau = k[\sin(2k\xi)]/[1+\cos(2k\xi)], \qquad (5)$$

где k – произвольная постоянная; функция $\tau(\xi)$ – ограниченная на конечном интервале $\xi \in [0, \xi_2] \subset [0, \pi/(2k))$. Покажем, что это решение допускает интересную гидродинамическую интерпретацию.

Цель работы: дать аналитическое описание стационарных вихревых процессов в сдвиговом потоке вязкой жидкости при воздействии нелинейной внешней силы трения.

Жидкость Максвелла. В классе решений (3) рассмотрим изотермическое течение жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями $(\gamma > 0, m = 1)$. Из уравнений (1), (2) находим:

$$\tau_{11} = \gamma m \tau_{12} du/dy\,,\ \tau_{11} + \tau_{22} = 0\,,\ p - p_0 = \tau_{22}\,, \qquad (6)$$

$$\tau_{12} = \mu(du/dy)/[1+(\gamma m du/dy)^2]\,,\ \tau_{12} = \tau_{21}\,, \qquad (7)$$

$$du/dy = 2\omega_{12} = -2\omega\,,\ d\tau_{12}/dy = \rho\zeta u\,,$$

где $p_0 \equiv \mathrm{const}$ – равновесное (отсчетное) значение давления. Вихрь скорости $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ имеет одну ненулевую составляющую $\omega_z \equiv \omega = -(du/dy)/2$, направленную перпендикулярно плоскости (x, y). Здесь и в дальнейшей записи сохраняем $m = 1$. Это дает возможность подчеркнуть роль производной Яуманна, для которой реологическое уравнение состояния удовлетворяет принципу объективности поведения материала [2]; в случае $m = 0$ этот принцип не выполняется. Воспользуемся решением (4), (5) и возьмем $\tau = u$, $\xi = y/(y_1 u_1)$, $k = u_1$, $d^2u/dy^2 = Q/(y_1u_1)^2$, $Q = 2u(u_1^2 + u^2) = (y_1u_1)^2 \zeta u/\nu$. Отсюда вычисляем скорость движения жидкости и коэффициент сопротивления:

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{u_1} = \frac{\sin(2\bar{y})}{1+\cos(2\bar{y})}\,,\ \bar{y} = \frac{y}{y_1}\,,\ y \in [0, y_2]\,; \qquad (8)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2/\nu = 2(1+\bar{u}^2)\frac{[1-\bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2]}{[1+\bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2]^2}\,; \qquad (9)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma u_1/y_1\,;\ \bar{\omega} = \omega y_1/u_1\,,\ d\bar{u}/d\bar{y} = -2\bar{\omega}\,,\ \nu = \mu/\rho\,.$$

Здесь y_1, u_1 – положительные константы, имеющие размерности длины и скорости соответственно; линейный масштаб релаксации равен $L_1 = \gamma u_1$; безразмерные величины отмечены чертой сверху. Ясно, что $d\bar{u}/d\bar{y} = 1 + \bar{u}^2$, поэтому коэффициент внешнего сопротивления (9) есть четная функция скорости. Форма записи

$$\zeta = 4\bar{\omega}(4\Gamma - 1)/(4\Gamma+1)^2\,,\ \Gamma = (\bar{\gamma} m \bar{\omega})^2$$

демонстрирует то обстоятельство, что сила внешнего трения проявляет себя на фоне релаксирующей завихренности; переменный параметр $\Gamma(y)$ характеризует неравновесные свойства вихревого поля. Решение (8) представляет течение Куэтта:

$$y = 0\,,\ u = 0\,;\ y = y_2\,,\ u = u(y_2)\,,$$

где y_2 – расстояние между параллельными плоскими непроницаемыми стенками; одна стенка неподвижна, а другая перемещается в своей плоскости с конечной скоростью $u_2 = u(y_2) > 0$.

Условия $\zeta > 0$, $d\zeta/d(u^2) > 0$ приводят к неравенству $(\gamma m du/dy)^2 \le 1/3$, которое дает такие ограничения:

$$0 < \bar{\gamma} m \le 1/(2\sqrt{3})\,, \qquad (10)$$

$$1 + \cos(2y_2/y_1) \ge 2\bar{\gamma} m\sqrt{3}\,. \qquad (11)$$

Неравенство (11) исключает из структуры решения координату $2\bar{y} = \pi$. Далее оценки (10), (11) будут уточнены для отдельных интервалов значений u_2. Давление жидкости вычисляется по формуле:

$$\frac{p_0 - p}{\rho u_1^2} \equiv \bar{p}_1 = \frac{\bar{\nu}\bar{\gamma} m (d\bar{u}/d\bar{y})^2}{1+\bar{\gamma}^2 m^2 (d\bar{u}/d\bar{y})^2}\,,\ \bar{\nu} = \mu/(\rho u_1 y_1)\,.$$

Перепад давления $p_0 - p$ положителен во всей области решения; константу p_0 выбираем так, чтобы обеспечить условие $p(y) > 0$. Зависимость давления от времени релаксации монотонно убывающая: $\partial p / \partial \gamma < 0$. Функциональная связь завихренности и давления имеет вид:

$$4\overline{\omega}^2 = \overline{p}_1 / [\overline{\gamma} m(\overline{\nu} - \overline{\gamma} m \overline{p}_1)],$$

где выполнено условие $0 < \overline{p}_1 < [\overline{\nu} / (\overline{\gamma} m)]$. В релаксирующем потоке $(\gamma > 0)$ завихренность обусловлена отклонением давления от равновесного значения: если $p = p_0$, то $\omega = 0$. По мере удаления от неподвижной стенки модуль завихренности растет $d(\omega^2)/dy > 0$, а давление падает: $p(y=0) > p(y=y_2)$; следовательно, $\partial(\omega^2)/\partial p < 0$.

Проанализируем физическое содержание данного решения. На неподвижной и подвижной границах безразмерный градиент скорости равен:

$$y = 0,\ d\overline{u}/d\overline{y} = 1;\ y = y_2,\ d\overline{u}/d\overline{y} = U > 1,\ U = 1 + (u_2^2 / u_1^2).$$

Значит, параметр U характеризует градиент скорости, обусловленный величиной u_2 скорости подвижной стенки. Другими словами, величина $U^2 = \omega^2(y = y_2)/\omega^2(y=0)$ определяет степень неоднородности завихренности потока. Некоторые градиентные свойства завихренности двумерного течения вязкой релаксирующей жидкости изучены в [11]. Примем обозначения: $\zeta_1 = \zeta(y=0)$, $\zeta_2 = \zeta(y = y_2)$, $\delta^2 = \overline{\gamma}^2 m^2 U^2$, $U_* = 1/U$, где $\cos(2y_2/y_1) = 2U_* - 1$. Расчеты показывают: условие $\zeta_2 > \zeta_1$ будет выполнено, если при $0 < \delta^2 < 1$ выполнено неравенство $(1-\delta^2)/(1+\delta^2)^2 \ge U_*$. Отсюда следует оценка параметра δ^2:

$$0 < \delta^2 \le [-1 - 2U_* + (1 + 8U_*)^{1/2}]/(2U_*) < 1. \quad (12)$$

Учитывая (10) получаем, что должно быть $\delta^2 U_*^2 \le 1/12$; тогда, применяя (12), находим два интервала, которым может принадлежать U_*. Область «больших» градиентов скорости:

$$0 < U_* \le a_*,\ a_* = (3 - \sqrt{6})/6, \quad (13)$$

в этом случае $U > 10$. Область «малых» градиентов скорости:

$$a_{**} \le U_* < 1,\ a_{**} = (3 + \sqrt{6})/6, \quad (14)$$

в этом случае U находится в правой конечной окрестности единицы, причем u_1 есть верхняя граница значений скорости течения; $u(y) < u_1$, $0 < u_2^2 < u_1^2$, $\cos(2\overline{y}) > 0$, $y \in [0, y_2]$, $(2a_{**} - 1) \le \cos(2y_2/y_1) < 1$. Для «малых» градиентов на обеих стенках (неподвижной и подвижной) поведение завихренности определяется неравенством $\partial(\overline{\omega}^2)/\partial U > 0$, $y = 0$, $y = y_2$.

В области «больших» градиентов (13) верхняя граница скоростей равна $u_2 : u_2 > u_1$, $y \in [0, y_2]$, $2y_2/y_1 = \pi - \delta_1$, $0 < \delta_1 < \pi/2$, $U = 2/(1 - \cos\delta_1)$. Из (11) следует $(2/3)^{1/2} \le \cos\delta_1 < (1 - 2\overline{\gamma} m \sqrt{3})$. Значит, исходная оценка (10) принимает вид

$$\overline{\gamma}^2 m^2 < [1 - (2/3)^{1/2}]^2 / 12.$$

Расчеты показали, что в интервале (13) на неподвижной стенке $\partial(\overline{\omega}^2)/\partial U < 0$, $y = 0$. В этом заключается существенное различие в поведении при $y = 0$ функции $\overline{\omega}^2(U)$ в областях с «малыми» и «большими» градиентами. На подвижной стенке для обеих областей $\partial(\overline{\omega}^2)/\partial U > 0$. В области «больших» градиентов производная $\partial(\overline{\omega}^2)/\partial U$ является знакопеременной: при $y = 0$ она отрицательная, при $y = y_2$ – положительная.

Схема расчета констант, входящих в данное решение, состоит в следующем. Задаем скорость u_2 и время релаксации γ; параметр U_* берем из интервала (13) либо (14); подсчитываем константу $u_1 = u_2/(U-1)^{1/2}$; выбираем δ^2 из интервала (12) и вычисляем $\overline{\gamma}^2 m^2 = \delta^2 / U^2$; находим $y_1 = \gamma u_1 / \overline{\gamma}$, $2y_2/y_1 = \arccos(2U_* - 1)$. Профили скорости и давления монотонные, перегибов не имеют: $du/dy > 0$, $d^2u/dy^2 > 0$, $dp/dy < 0$, $d^2p/dy^2 < 0$; выпуклость функции $\tau_{12}(y)$ обращена вверх, $d^2(\tau_{12})/dy^2 < 0$. Поведение разности первых нормальных напряжений $\tau_{11} - \tau_{22}$ коррелирует со свойствами давления, подчиняясь формуле $\tau_{11} - \tau_{22} = 2(p_0 - p)$.

Построенное решение можно применить на более широком отрезке $y \in [0, y_3]$, $y_3 > y_2$, полагая, что $\zeta(u^2)$ является немонотонной функцией. Нетрудно видеть, что $\zeta = 0$ при $du/dy = 1/(\gamma m)$. Именно при этом значении градиента скорости касательное напряжение τ_{12} имеет максимум. Этот максимум достигается при $y = y_3$:

$$\cos(2y_3/y_1) = (1-\overline{u}_3^2)/(1+\overline{u}_3^2),\ \overline{u}_3 = u_3/u_1,$$
$$1+\overline{u}_3^2 = 1/(\overline{\gamma} m) = U/\delta > U,\ u_3 = u(y = y_3).$$

Верхняя граница скоростей равна u_3; в области «больших» градиентов $u_3 > u_2$; в области «малых» градиентов $u_3 > u_1$. Функция $\zeta(u^2)$ немонотонная при $u \in [0, u_3]$; в левой окрестности значения $u = u_3$ коэффициент сопротивления резко уменьшается до нуля.

Следуя аналогии между вязкоупругими и турбулентными сдвиговыми течениями [3, 4], введем в рассмотрение принятую в теории турбулентности динамическую скорость $u_\tau = (\tau_{12}/\rho)^{1/2}$. Решение (7) дает

$$\frac{u_\tau^2}{w^2} = \frac{\gamma du/dy}{1+(\gamma m du/dy)^2} < 1,$$

где $w^2 = \nu/\gamma$ – квадрат скорости распространения волны сдвига. Таким образом, динамическая скорость «дозвуковая» во всей области решения. При экспериментальном изучении турбулентных течений жидкости в плоском канале применяют так называемые индикаторные функции [12]:

$$\varphi_1 = \overline{y} d\overline{u}/d\overline{y},\ \varphi_2 = (\overline{y}/\overline{u})(d\overline{u}/d\overline{y}).$$

Физический смысл индикаторов в том, что если $\varphi_1 = \mathrm{const}$, то профиль скорости логарифмический; если $\varphi_2 = \mathrm{const}$, то профиль скорости степенной. Для тригонометрического профиля (8) индикаторная функция есть

$$\varphi_3 = (d\overline{u}/d\overline{y})/(1+\overline{u}^2) = 1.$$

Результаты вычислений говорят о том, что в данном классе решений отсутствуют конечные отрезки значений координаты $\overline{y}$, на которых φ_1 либо φ_2 постоянны. Это значит, что профиль скорости (8), формирующийся под воздействием нелинейной внешней силы трения, существенным образом отличается во всех своих точках и от логарифмического и от степенного законов.

Ньютоновская жидкость. В ньютоновском изобарическом варианте $(\gamma = 0, p = p_0 \equiv \mathrm{const})$ свойства движения (8) не являются формальным следствием результатов, полученных при $\gamma > 0$. Дело в том, что при $\gamma = 0$ изменяется структура формулы (9): теперь $\overline{\zeta} = 2(1+\overline{u}^2)$, и автоматически выполнены требования $\zeta > 0$, $d\zeta/d(u^2) > 0$. Расчет констант, входящих в формулы решения, выполняем по следующей схеме.

Коэффициент сопротивления конечен и изменяется в интервале $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2]$, где $\zeta_1 = \zeta(u=0) > 0$, $\zeta_2 = \zeta(u = u_2) = U\zeta_1$. Из физических соображений полагаем, что ζ_1 и ζ_2 различаются не слишком сильно: $\zeta_2 - \zeta_1 = (U-1)\zeta_1$, $1 < U \le 2$. Это означает, что данное решение описывает течение, для которого знаменатель дроби в (8) не только положителен, но и не меньше единицы. Коэффициенты ζ_1, ζ_2 могут зависеть от кинематической вязкости ν и от других параметров, определяющих силу трения. Коэффициент сопротивления имеет вид

$$\zeta = \zeta_1\left[1+\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}-1\right)\frac{u^2}{u_2^2}\right].$$

Следовательно, в нашем распоряжении четыре исходные константы ν, ζ_1, ζ_2, u_2, которые позволяют вычислить остальные параметры решения:

$$y_1^2 = 2\nu / \zeta_1 ,\ u_1^2 = u_2^2 /(U - 1) ,\ 0 < 2y_2 / y_1 = \arccos[(2 - U)/U] \le \pi / 2 .$$

В решении (8) параметры u_1, y_1, y_2 несут (посредством ζ_1, ζ_2) информацию о внешнем сопротивлении и вязкостных свойствах системы «жидкость – граничные стенки».

В статье [13] показано, что для двумерных течений несжимаемой ньютоновской жидкости выполнено равенство

$$\nu\Delta\ \mathbf{v} = 2\ \mathbf{v}_d \times \boldsymbol{\omega} , \qquad (15)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{v}_d$ – диффузионная скорость движения вихря, $\mathbf{v}_d = \nu(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) / \boldsymbol{\omega}^2$. Для течения (8) свойство (15) выполнено, а диффузионная скорость параллельна оси y и ее алгебраическая величина равна

$$v_d = -2\nu u /(y_1 u_1) = -u[2\nu\partial\zeta / \partial(u^2)]^{1/2} \le 0 . \qquad (16)$$

Значит, вектор $\mathbf{v}_d$ направлен от подвижной стенки к неподвижной. Очевидно, что для течения чистого сдвига ($u \sim y$, $p \equiv \mathrm{const}$, $\omega_z \equiv \mathrm{const}$, $\zeta \equiv 0$) имеем $v_d = -(\nu / \omega_z)(d\omega_z / dy) \equiv 0$. Таким образом, диффузионная скорость (16) генерируется внешним сопротивлением течению.

Заключение. Отличительная черта рассмотренных процессов – наличие нелинейной внешней силы трения. Дано аналитическое описание течения Куэтта с тригонометрическим профилем скорости (8). Обсуждены реологические модели Максвелла и Ньютона. Для жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями коэффициент сопротивления проявляет себя на фоне неравновесной завихренности, для которой линейный масштаб релаксации равен $L_1 = \gamma u_1$. Взаимное влияние неоднородности и неравновесности вихревого поля – причина нетривиального поведения производной $\partial(\omega^2)/\partial U$ на подвижной и неподвижной стенках, см. (13), (14). Представленный пример движения ньютоновской жидкости принципиально отличается от обычного течения чистого сдвига существованием ненулевой скорости диффузии вихря, направленной от подвижной стенки к неподвижной.

Литература

1. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
2. Астарита, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
3. Лойцянский, Л.Г. Наследственные явления в турбулентных движениях/ Л.Г. Лойцянский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1982. – № 2. – С. 5–19.
4. Корнилов, В.И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях / В.И. Корнилов. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 399 с.
5. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
6. Обухов, А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование/ А.М. Обухов // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, Вып. 4. – С. 101–111.
7. Должанский, Ф.В. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений / Ф.В. Должанский, В.А. Крымов, Д.Ю. Манин // Успехи физических наук. – 1990. – Т. 160. – Вып. 7. – С. 1–47.
8. Должанский, Ф.В. О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий/ Ф.В. Должанский // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175, № 12. – С. 1257–1288.
9. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А.В. Картавых, М.Г. Мильвидский, В.П. Гинкин и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
10. Шабловский, О.Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / О.Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. науч. тр. – М.: Янус-К., 2010. – Вып. 13. – С. 78–89.

11. Шабловский, О.Н. Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2001. – 142 с.

12. Wosnik, M. A theory for turbulent pipe and channel flows / M. Wosnik, L. Castillo, W.K. George // J. Fluid Mech. – 2000. – V. 421. – P. 115–145.

13. Дынникова, Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости / Г.Я. Дынникова // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 5. – С. 11–19.

Поступила в редакцию 10 февраля 2011 г.

TRIGONOMETRICAL PROFILE OF THE VELOCITY OF THE SHEAR FLOW OF THE VISCOUS FLUID

O.N. Shablovsky[1]

A new exact analytical solution for stationary hydrodynamics equations are given with account of external resistance force. Basic elements of the research: relaxation properties in the shear flow; vorticity at small and large velocity gradients; diffusive rate of movement of vortex.

Keywords: resistance force, Couette flow, vorticity diffusion, indicator function, stress relaxation.

References

1. Sedov L.I. *Mehanika sploshnoj sredy* (Continuum mechanics). Moscow, Nauka, 1973. Vol. 1. p. 536. (in Russ.).

2. Astarita G., Marrucci G. *Osnovy gidromehaniki nen'jutonovskih zhidkostej* (Principles of non-Newtonian fluid mechanics). Moscow, Mir, 1978. 309 p. (in Russ.) [Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. McGhaw-Hill, 1974.].

3. Lojcjanskij L.G. Izv. AN SSSR. Mehanika zhidkosti i gaza. 1982. no. 2. pp. 5–19. (in Russ.).

4. Kornilov V.I. *Prostranstvennye pristennye turbulentnye techenija v uglovyh konfi-guracijah* (Spatial wall turbulence flow in a corner configurations). Novosibirsk: Nauka. Sibirskaja izdatel'skaja firma RAN, 2000. 399 p. (in Russ.).

5. Gledzer E.B., Dolzhanskij F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ih primenenie* (Systems of hydrodynamic type and their application). Moscow, Nauka, 1981. p. 368. (in Russ.).

6. Obukhov A.M. *Russian Mathematical Surveys*. 1983. Vol. 38, no. 4, pp. 113–126. [Obukhov A.M. Techenie Kolmogorova i ego laboratornoe modelirovanie (Kolmogorov flow and laboratory simulation of it). *Uspehi Matematicheskih Nauk*. 1983. Vol. 38, no. 4. pp. 101–111. (in Russ.)].

7. Dolzhanskii F.V., Krymov V.A., Manin D.Yu. Stability and vortex structures of quasi-two-dimensional shear flows. *Sov. Phys. Usp.* 1990. Vol. 33, no. 7. pp. 495–520. DOI: 10.1070/PU1990v033n07ABEH002605. [Dolzhanskij F.V., Krymov V.A., Manin D.Ju. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1990. Vol. 160, no. 7. pp. 1–47. DOI: 10.3367/UFNr.0160.199007a.0001 (in Russ.)].

8. Dolzhanskii F.V. On the mechanical prototypes of fundamental hydrodynamic invariants and slow manifolds. *Phys. Usp.* Vol. 48. pp.1205–1234. [Dolzhanskij F.V. *Uspehi fizicheskih nauk*. 2005. Vol. 175, no. 12. pp. 1257–1288. DOI: 10.3367/UFNr.0175.200512a.1257 (in Russ.)].

9. Kartavyh A.V., Mil'vidskij M.G., Ginkin V.P., Zabud'ko M.A., Naumenko O.M. *Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovanija.* 2004. no. 6. pp. 91–98.

10. Shablovskij O.N. Nelinejnye volnovye uravnenija i konkurencija istochnikov jenergii v dvuhkomponentnyh sistemah (Nonlinear wave equations and sources of energy competition in two-component systems) *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tehniko-tehnologicheskih sistem: sb. nauch. tr.* (The fundamental physical and mathematical problems and modeling of technical and technological systems: Proceedings). Moscow, Janus-K., 2010. no. 13. pp. 78–89.

11. Shablovskij O.N. *Dinamika vihrej i teploperenos v potoke vjazkoj zhidkosti* (Vortex dynamics and heat transfer in a viscous fluid). Gomel': GGTU im. P.O. Sukhogo, 2001. 142 p.

12. Wosnik M., Castillo L., George W.K. A theory for turbulent pipe and channel flows. *J. Fluid Mech*. 2000. Vol. 421. pp. 115–145.

13. Dynnikova G.Ja. *Izv. RAN. Mehanika zhidkosti i gaza.* 2003. no. 5. pp. 11–19.

[1] Shablovsky Oleg Nikiphorovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Technical Mechanics Departament, Machine Building Faculty, Gomel State Technical University. e-mail: shablovsky-on@yandex.ru, shabl@gstu.by